

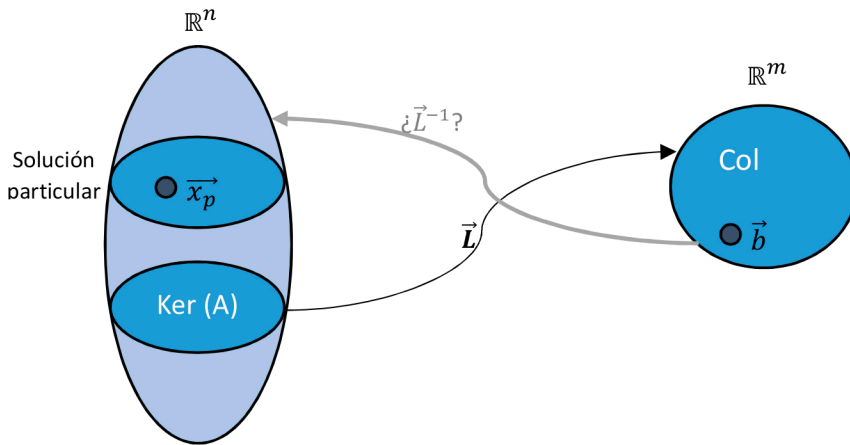
PROBLEMAS PURAMENTE INDETERMINADOS

$$A\vec{x} = \vec{b}; \text{ con } A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \quad m < n \quad \text{rang}(A) = m$$

Este tipo de problemas surge en casos reales cuando se discretizan ecuaciones diferenciales (EDP's) o ecuaciones integrales (ecuaciones de Fredholm de 1ª y 2ª especie), que son muy típicas en problemas de teoría de potencial.

¿Qué caracteriza a estos problemas?

Si $\text{rang}(A) = m \rightarrow$ la aplicación es suprayectiva, pues $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ (el espacio de predicciones coincide con el espacio de datos), con lo cual el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible para cualquier $\vec{b}$ (Tª de Rouché-Frobenius).



Hay que hallar:

$$\vec{x}: A\vec{x} = \vec{b} = \vec{L}^{-1}(\vec{b})$$

A admite ∞ soluciones $\rightarrow \vec{x}_{sol} = \vec{x}_p + \text{ker}(A)$

Donde $\vec{x}_p$ es una solución particular $\rightarrow A\vec{x}_p = \vec{b}$;

En este caso A posee kernel $\leftrightarrow \vec{L}$ no es inyectiva:

$$\dim(\text{ker}(A)) = n - \text{rang}(a) = n - m > 0$$

El conjunto de soluciones es una variedad lineal orientada por el $\text{Ker}(A)$.

Si tengo:

$$\vec{x}_{sol} = \vec{x}_p + \vec{w}; \quad \vec{w} \in \text{Ker}(A)$$

$$A\vec{x}_{sol} = \vec{b} + \vec{\theta} = \vec{b}$$

Ejemplo:

$x + y + z = 1; \quad x - y = 0;$ No es un subespacio vectorial, porque no pasa por el origen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Col}(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \equiv \mathbb{R}^2$$

Aplicación suprayectiva, por tanto:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Una solución particular sería, por ejemplo:

$$\vec{x}_p = (1, 1, -1)$$

$$\text{Ker}(A) = \{(x, y, z): \quad x + y + z = 0, \quad x - y = 0\} \quad \text{Es un subespacio vectorial, porque pasa por el origen}$$

$$z = -2x = -2y$$

$$x = y$$

Por tanto:

$$\text{Ker}(A) = (x, x, -2x) = x(1, 1, -2) = \langle (1, 1, -2) \rangle$$

De este modo, $\text{Ker}(A)$ se trata de una recta. Todo vector que se sitúe en esta recta tiene predicción nula:

$$\text{Ker}(A) = \{(x, y, z): \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}\}$$

Sustituyendo:

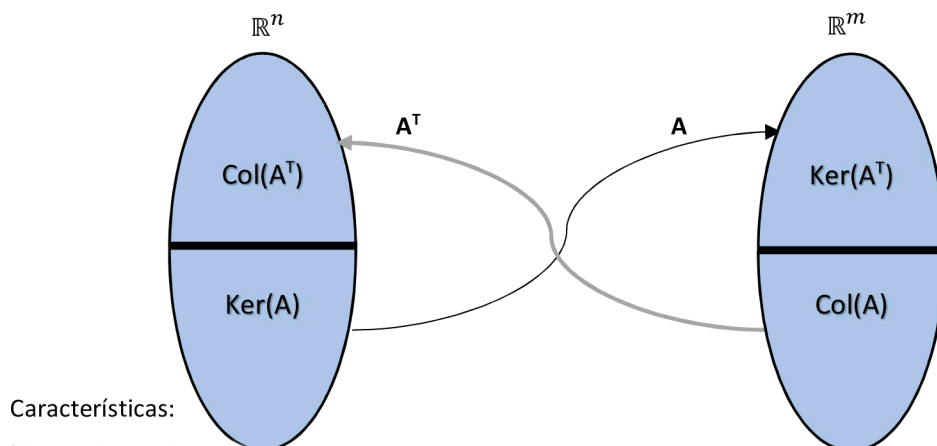
$$\vec{x}_{sol} = \left\{ \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2} \right\}$$

El problema tiene estructura: de entre todas las soluciones se va a buscar una $\rightarrow$ la solución más sencilla, “simple”, que es aquella que posee mínima energía.

Dado $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, ¿cómo defino su energía?

$$\text{Energía}(\vec{x}) = \|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

Se procede a hallar de “entre todas” la solución de mínima norma.



Características:

- $\dim(\text{Col}(A)) = \dim(\text{Col}(A^T)); \quad \text{rang}(A) = \text{rang}(A^T)$

(Si hay unas relaciones de dependencia, al trasponer la matriz se mantienen)

Se trata de espacios euclídeos, ya que: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k$; (no solo hay proyecciones, sino también productos escalares).

- $\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rang}(A) = n$
- $\dim(\text{Ker}(A^T)) + \text{rang}(A^T) = m$
- $(\text{Ker}(A^T))^{\perp} = \text{Col}(A^T)$
- $(\text{Ker}(A))^{\perp} = \text{Col}(A)$
- $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A) + \text{Col}(A^T)$; (Suma directa)
- $\mathbb{R}^m = \text{Ker}(A^T) + \text{Col}(A)$

Para cualquier $\vec{x} \in \mathbb{R}^n: \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$

$$\vec{x}_1 \in \text{Ker}(A) \quad \vec{x}_2 \in \text{Col}(A^T)$$

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 0 \quad (\text{son ortogonales})$$

$$\|\vec{x}_1\|_2^2 = (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \cdot (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 + \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 + \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_2 = \|\vec{x}_1\|_2^2 + \|\vec{x}_2\|_2^2 \rightarrow \text{PITÁGORAS.}$$

Se tiene:

$$\overrightarrow{x_{sol}} = \overrightarrow{x_p} + \text{Ker}(A); \quad A\overrightarrow{x_{sol}} = \vec{b}$$

La solución de mínima energía es aquella que no tiene componentes en $\text{Ker}(A)$.

$$\overrightarrow{x_{NormaMínima}} \in \text{Col}(A^T)$$

$$\overrightarrow{x_{NM}} = A^T \vec{Z}; \quad A\overrightarrow{x_{NM}} = \vec{b}$$

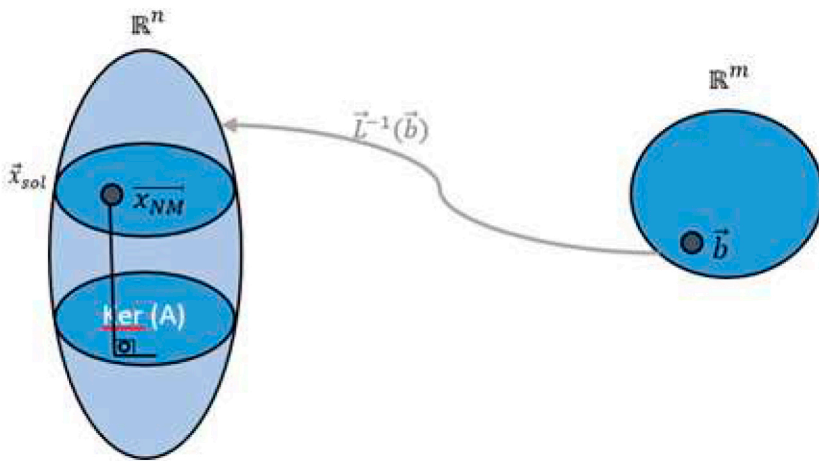
$$AA^T \in M_{m \times m}(\mathbb{R}); \quad \text{rang}(AA^T) = \text{rang}(A) = m$$

$$\overrightarrow{x_{NM}} = A^T (AA^T)^{-1} \vec{b} \rightarrow \text{right inverse of } A$$

(Inciso) En MC (P. Puramente Sobredeterminado):

$$\overrightarrow{x_{LS}} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b} \rightarrow \text{left inverse of } A$$

Gráficamente:



¿Cómo se resolvería con ello el problema anterior?

$$x + y + z = 1; \quad x - y = 0$$

Se añade la nueva expresión:

$$(x, y, z) \cdot (1, 1, -2) = 0 \rightarrow x + y - 2z = 0$$

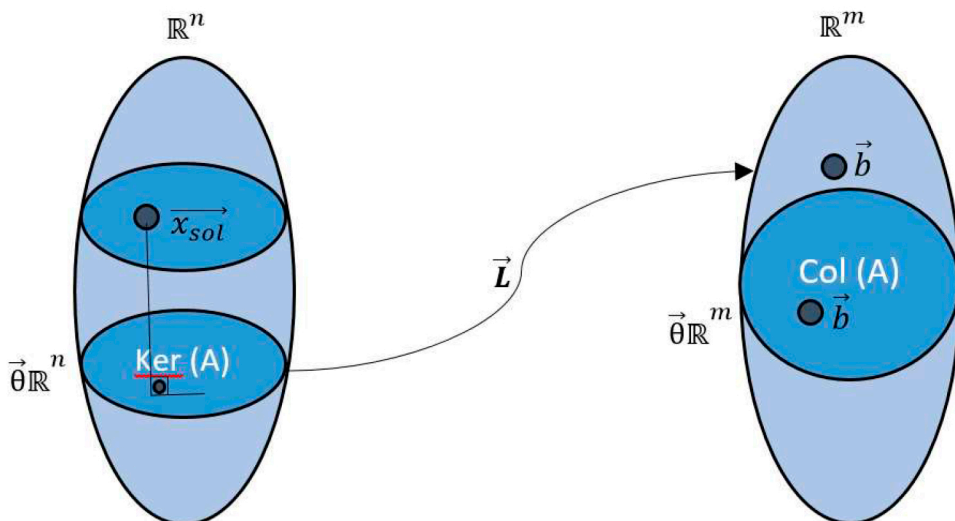
Y se resuelve el sistema.

¿Qué ocurriría si el sistema es deficiente en rango?

Sistema:

$$A\vec{x} = \vec{b}; \quad m, n \text{ cualesquiera.}$$

$\text{rang}(A) = r < \min(m, n) \rightarrow$ hay ecuaciones y parámetros redundantes: típico en problemas ingenieriles:

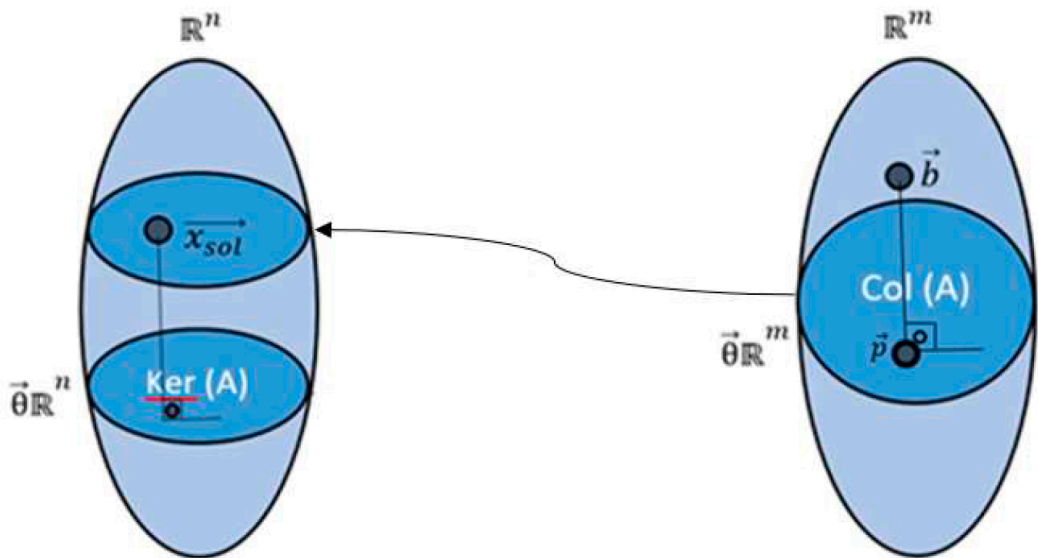


No es suprayectiva.

$\dim(Ker(A)) = n - r \neq 0 \rightarrow$ no es inyectiva.

$\vec{b}$ puede situarse en $Col(A)$ (en cuyo caso $\exists \infty$ soluciones $\rightarrow$ hallar solución de NM), lo que sería una mera coincidencia, ya que lo lógico es que no se encuentre en $Col(A) \rightarrow$ no tiene solución.

Si $\vec{b}$ no está en $Col(A) \rightarrow$ Sistema incompatible $\rightarrow$ ¿MC?



Se puede modelizar $\vec{p}$, que es la parte más cercana a $\vec{b}$, y como hay espacio de incertidumbre ($Ker(A)$), hay infinitas soluciones de MC $\rightarrow$ se busca la solución de Norma Mínima de Mínimos Cuadrados.

En este caso, $\vec{b} \in Col(A)$ (en general)

$$\overrightarrow{x_{MC}} = \overrightarrow{x_p^{MC}} + Ker(A^T A) = \overrightarrow{x_p^{MC}} + Ker(A)$$

Es posible hallar $\vec{x}^*$, que es la solución de norma mínima de MC (pseudoinversa de Moore-Penrose, A^+).

Con MATLAB:

`>> x = pinv(A) * b`

Proporciona la solución generalizada de $A\vec{x} = \vec{b}$, para cualquier $A, \vec{b}$.

Si se trata de un SCD $\rightarrow A^+ = A^{-1}$

Si se trata de un SPS $\rightarrow A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \rightarrow MC$

Si se trata de un SPI $\rightarrow A^+ = A^T (A A^T)^{-1} \rightarrow NM$

Si el sistema es deficiente en rango $\rightarrow$ proporciona la solución de NM del sistema de MC.

¿Cómo se construye A^+ ?

Se relaciona con SVD (Singular Value Decomposition).

Tª de Schurr $\rightarrow$ cualquier matriz se puede factorizar como producto de 3 matrices:

Para cualquier $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$:

$$A = U \Sigma V^T$$

Donde:

A es de dimensión $m \times n$

U es de dimensión $m \times m$

Σ es de dimensión $m \times n$

V^T es de dimensión $n \times n$

$U^T = U^{-1} \rightarrow$ ortogonal

$V^T = V^{-1} \rightarrow$ ortogonal

Si es así:

$\Sigma = \text{SVD}(A)$; es diagonal por bloques.

Si $\text{rang}(A) = r \leq \min(m, n)$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \alpha_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0_1 \\ 0_2 & 0_3 \end{pmatrix}$$

$\alpha_k > 0$; son los valores singulares de A (no propios, singulares): espectro de A.

$$A^+ = (U\Sigma V^T)^+ = (V^T)^+(\Sigma)^+U^+ = V\Sigma^+U^T$$

Donde:

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\alpha_r} & \\ & 0_1 & & 0_3 \end{pmatrix}$$

A^+ proporciona la solución de NM de MC.

En MATLAB:

$\gg (u, s, v) = \text{svd}(A)$;

$$A = U\Sigma V^T$$

$$AA^T = U\Sigma V^T V\Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^T$$

Sino:

$$A^T A = V\Sigma^T \Sigma V^T$$

Solo se necesita una de las dos diagonalizaciones.