

(Automáticos) MODELOS EXPERIMENTALES

$$y^*(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

Se tiene una tabla de datos del siguiente tipo:

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}$$

Y se pretende conseguir que el predictor “pase” por los datos:

$$y^*(x_i) \approx y_i$$

Por tanto:

$$F\vec{a} = \vec{y} \qquad F(i, j) = y_j(x_i)$$

Con $F \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Se trata de un sistema lineal que hay que resolver para obtener los pesos, a_k , y con ellos el predictor, $y^*(x)$.

En función del valor de m y n , pueden darse 3 casos diferentes:

$$m = n \rightarrow \text{problema de interpolación} \rightarrow \vec{a} = F^{-1}\vec{y}$$

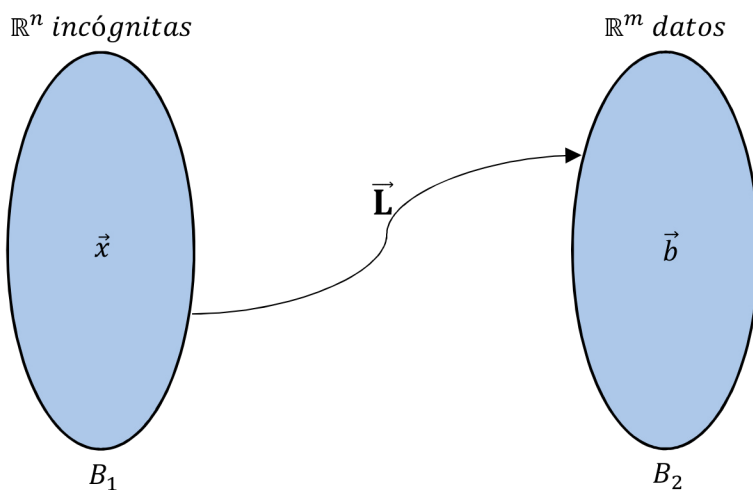
$$m > n \rightarrow \text{problema sobredeterminado de ajuste} \rightarrow \nexists \vec{a}$$

$$m < n \rightarrow \text{problema indeterminado; posiblemente} \rightarrow \exists \vec{a}$$

RESOLUCIÓN GENERALIZADA DE LOS SISTEMAS LINEALES. MÍNIMOS CUADRADOS.

Sistema general:

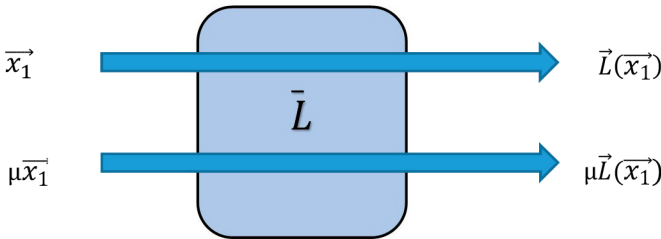
$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \qquad \vec{b} \in \mathbb{R}^m$$



$\vec{L}$ es una aplicación lineal entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, por lo que cumple el principio de superposición:

$$\vec{L}(\mu\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \mu\vec{L}(\vec{x}_1) + \beta\vec{L}(\vec{x}_2) \quad \mu, \beta \in \mathbb{R}$$

Si se cumple lo anterior se trata de un campo vectorial lineal, en el que se cumple que “lo que sale depende de lo que entra”:



Las matrices representan aplicaciones lineales:

$$A \rightarrow \vec{L}_{B_1}^{B_2}$$

De tal forma que:

$$\vec{x} \rightarrow \vec{L}(\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{y} \rightarrow PD \text{ (**Problema Directo**)}.$$

Hay muchas matrices que representan a una aplicación lineal (se obtienen cambiando las bases).

Problema Inverso:

dado $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, se quiere saber de dónde viene:

$\vec{L}^{-1}(\vec{b}) \rightarrow$ la imagen recíproca de $\vec{b}$. Se define como:

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n: \vec{L}(\vec{x}) = \vec{b}\} \text{ donde } \vec{L}(\vec{x}) = A\vec{x}$$

Pueden suceder 3 casos:

1. $\nexists \vec{x}: \vec{L}(\vec{x}) = \vec{b} \rightarrow$ el problema no tiene solución $\rightarrow$ **Sistema Incompatible.**
2. $\exists! \vec{x}: \vec{L}(\vec{x}) = \vec{b} \rightarrow$ **Sistema Compatible Determinado.**
3. $\exists \infty \vec{x}: \vec{L}(\vec{x}) = \vec{b} \rightarrow$ **Sistema Compatible Indeterminado.**

Se estudiará qué caso corresponde en cada problema, ya que en función de ello se resolverá de una forma u otra:

$$A\vec{x}$$

A se puede ver como:

$$A = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vdots \\ \vec{f}_m \end{pmatrix} \quad \vec{f}_i \in \mathbb{R}^n$$

$$A = [\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n] \quad \vec{c}_j \in \mathbb{R}^m$$

Así:

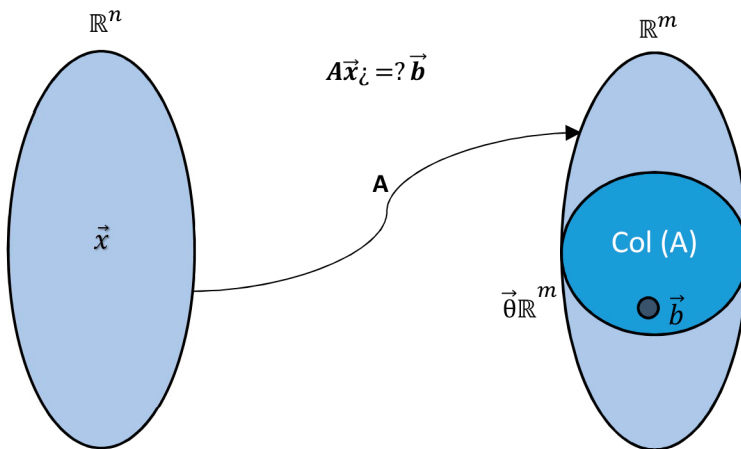
$$A\vec{x} = [\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n] \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \vdots \\ \vec{x}_n \end{pmatrix} = x_1\vec{c}_1 + x_2\vec{c}_2 + \dots + x_n\vec{c}_n \in \langle \vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n \rangle = \text{Col}(A) \rightarrow \text{espacio de predicciones.}$$

Lo que quiere decir que $A\vec{x}$, para cualquier $\vec{x}$, pertenece al subespacio vectorial que forman las columnas de A, $\text{Col}(A)$.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\text{Col}(A)$ es un subespacio vectorial ($\langle \dots \rangle$) de $\mathbb{R}^m$. Los subespacios son hiperplanos o hiperrectas que pasan por el origen. En un espacio vectorial siempre existe el vector nulo:



$$\dim(\text{Col}(A)) = \text{rang}(A)$$

$\dim(\text{Col}(A))$ es el número de vectores columna linealmente independientes.

$$\text{Col}(A) \in \mathbb{R}^m$$

Teorema de Rouché-Frobenius:

$$\exists \vec{x}: A\vec{x} = \vec{b} \leftrightarrow \vec{b} \in \text{Col}(A)$$

Ejercicio: Estudiar si tiene solución:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Col}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \in \mathbb{R}^3$$

$$\dim(\text{Col}(A)) = 2$$

Se observa que se ha perdido 1 (3-2) grado de libertad: hay una restricción.

$$(x, y, z) = \alpha(-1, -1, 0) + \beta(2, 0, 1)$$

$$x = -\alpha + 2\beta \rightarrow x = y + 2$$

$$y = -\alpha$$

$$z = \beta$$

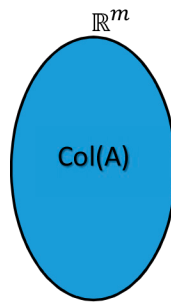
$$\text{Col}(A) = \{(x, y, z): x - y - 2z = 0 \text{ (plano que pasa por el origen)}\}$$

Ahora se sustituye en la ecuación del plano los valores de los elementos del vector $\vec{b}$:

$$1 - 0 - 2 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

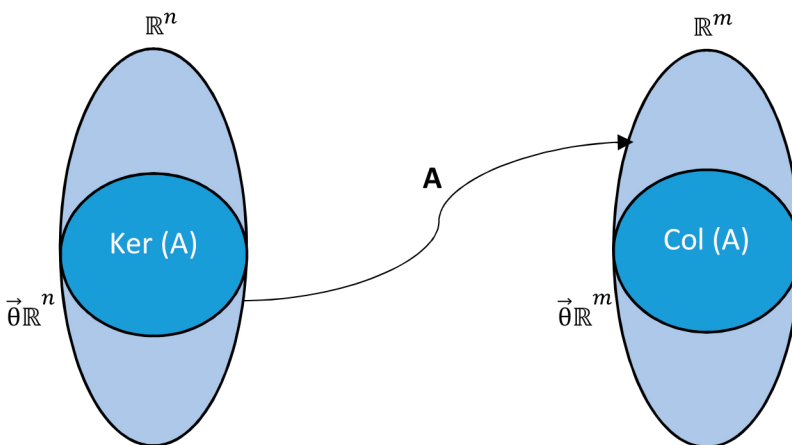
NOTA:

- Si $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m \rightarrow A$ es suprayectiva o sobreyectiva, y $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución para todo $\vec{b}$:



- Espacio nulo de A (núcleo). Es el espacio de "incertidumbre" de A :

$$\text{Ker}(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n: A\vec{x} = \vec{0}\}$$



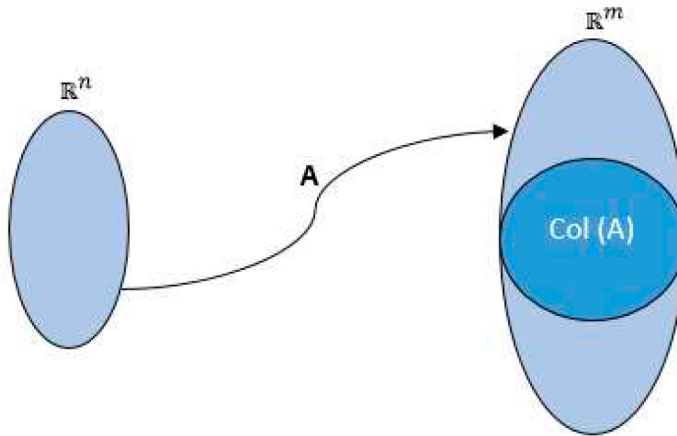
$$\underbrace{\dim(\text{Ker}(A))}_{\text{Incertidumbre}} + \underbrace{\dim(\text{Col}(A))}_{\text{Predicciones}} = \underbrace{n}_{\text{Nº de parámetros totales}}$$

Como se vio: $\dim(\text{Col}(A)) = \text{ran}(A)$

$$\dim(Ker(A)) = \underbrace{n}_{\text{Nº de parámetros indeterminados}} - \underbrace{rang(A)}_{\substack{\text{Nº de} \\ \text{grados de} \\ \text{libertad} \\ \text{(parámetros} \\ \text{totales)}}} = \underbrace{\quad}_{\text{Nº de restricciones independientes}}$$

Así, fijados m , n y $\text{rang}(A)$ puede obtenerse $\dim(\ker(A))$.

Para el siguiente caso, en el que $m > n$, la transformación **NO PUEDE SER SUPRAYECTIVA**:

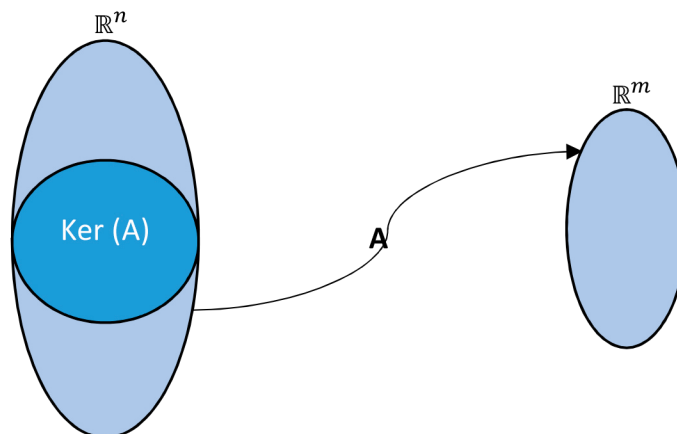


$$\text{rang}(A) \leq \text{MIN}(m, n) = n \neq m$$

Sin embargo, ¿puede ser que la aplicación sea **inyectiva**? $\rightarrow \dim(\ker(A)) \stackrel{?}{=} 0 \rightarrow \vec{\theta} \in \mathbb{R}^n$

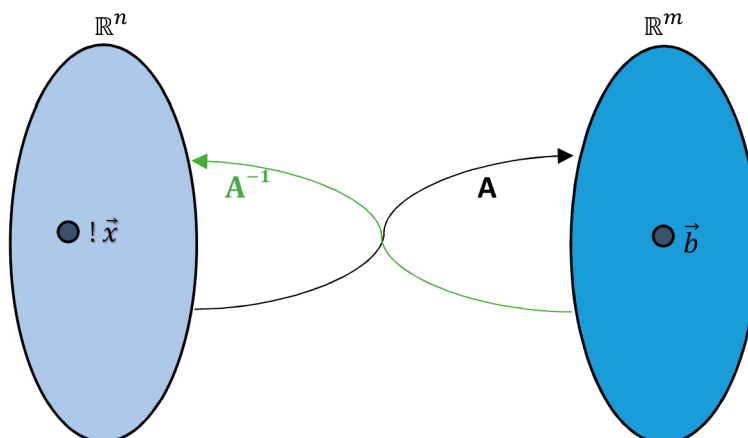
Si $m > n$, nunca puede ser suprayectiva, pero puede ser inyectiva, existiendo incertidumbre.

En el caso opuesto, en el que $n > m$, la transformación **NO PUEDE SER INYECTIVA**:



Sin embargo, puede ser **suprayectiva**.

Por último, en el caso en el que $m=n$:



$$\text{rang}(A) \leq n$$

Si $\text{rang}(A) = n \leftrightarrow A$ es **suprayectiva**

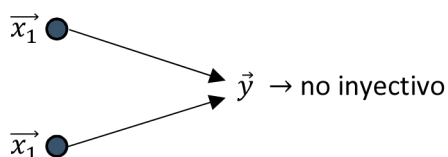
Además, si $\text{rang}(A) = n \rightarrow \dim(\ker(A)) = n - n = 0 \rightarrow$ **inyectiva**

A es **biyectiva** $\rightarrow$ no hay incertidumbre
 existe un único $\vec{x}$

¿Por qué es importante la inyectividad?

Implica que si $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \rightarrow A\vec{x}_1 \neq A\vec{x}_2$

Con vectores diferentes no se pueden tener imágenes iguales:



Supongamos que A no es inyectiva:

$$\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2 \quad \text{pero} \quad A\vec{x}_1 = A\vec{x}_2$$

$$A\vec{x}_1 - A\vec{x}_2 = \vec{\theta}$$

$$A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{\theta} \leftrightarrow (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \in \text{Ker}(A)$$