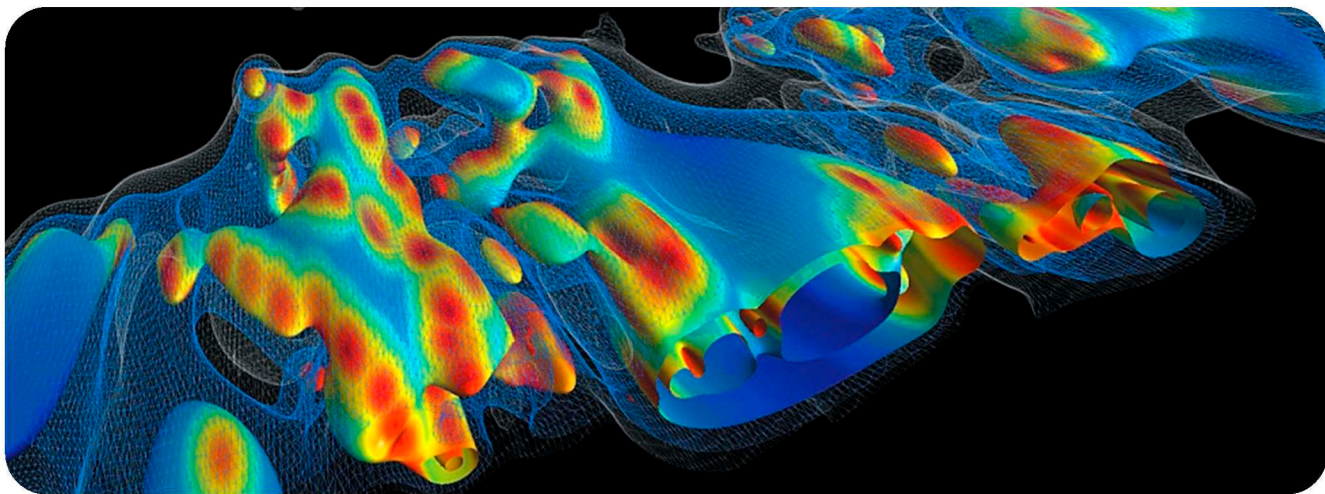
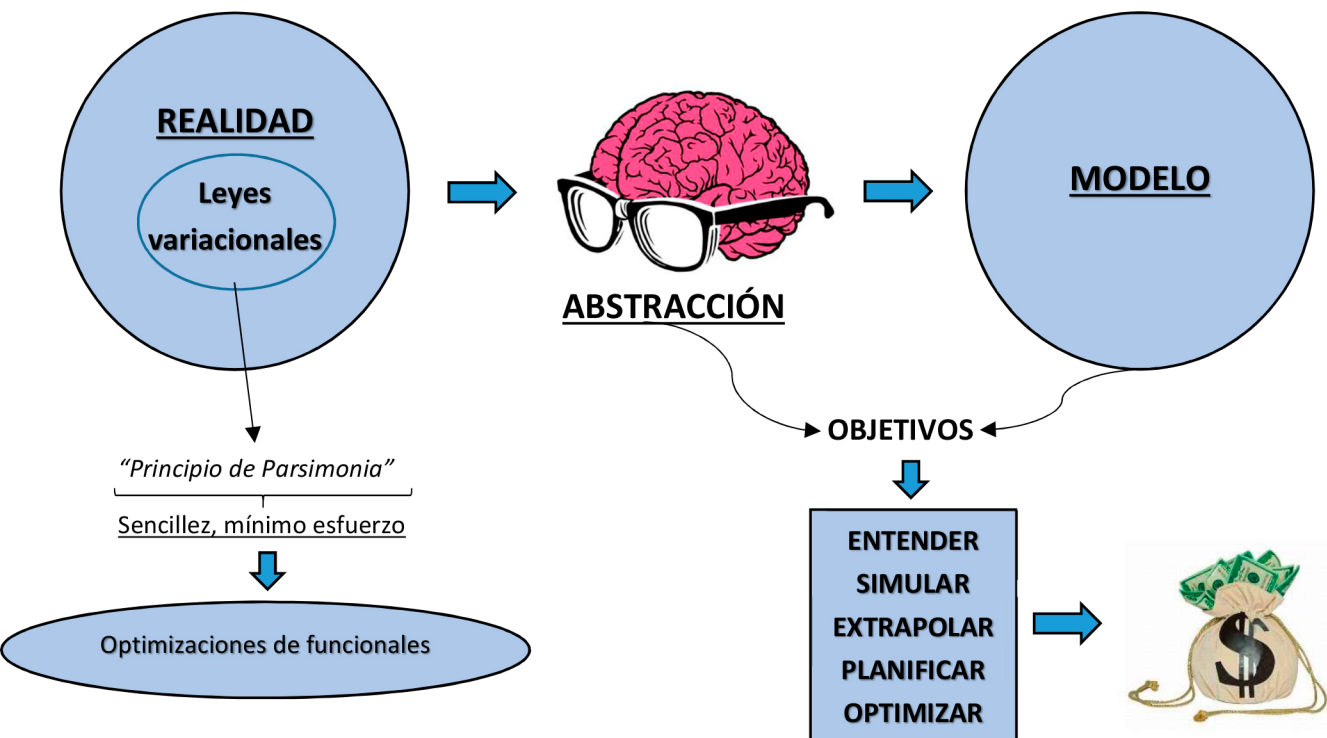


Tema 1: Introducción a los modelos matemáticos para la descripción de los procesos en ingeniería.



MODELOS MATEMÁTICOS

Un modelo matemático es una abstracción, representación o simplificación de la realidad: PROTOTIPO.



FASES DE UN MODELO:

- 1) Conceptualización (modelo teórico).** Es la primera fase del modelo, y en ella se analiza el problema, determinando qué variables o principios están implicados en el mismo: leyes matemáticas, técnicas posibles, etc.

Ejemplo: Ley de Newton.

$$F = m \times a \rightarrow F(t) = m \times \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow E.D.O. \rightarrow m \times \frac{d^2x}{dt^2} - F(t) = 0$$

Es necesario conocer el problema de valor inicial (pvi):

$$x(0) = x_0 \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0$$

Si solo existen fuerzas de gravedad:

$$F(t) = m \times g \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = g$$

Aplicando "primitivación" se obtiene lo siguiente:

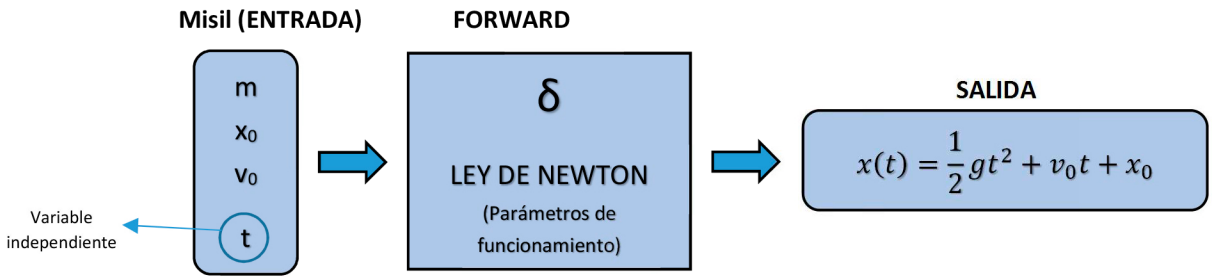
$$\frac{dx}{dt} = gt + C_1 \rightarrow x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2 \text{ (solución general)}$$

$$x(0) = C_2 = x_0 \quad x'(t) = gt + C_1 \quad x'(0) = C_1 = v_0$$

Se obtiene finalmente:

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

En un **PROBLEMA DIRECTO** (forward), como por ejemplo para conocer la trayectoria seguida por un misil siguiendo la formulación anterior, se entra con los valores de las variables y, tras una serie de operaciones regidas por los parámetros de funcionamiento del modelo, se obtienen los parámetros de salida:



- 2) **Análisis teórico (buen planteamiento).** Esta fase consiste en comprobar si el modelo cumple las siguientes condiciones:
- Existencia de solución.
 - Unicidad de solución.
 - Estabilidad de solución.

Las fases 1 y 2 engloban constituyen el MODELO TEÓRICO; a partir de aquí comienza el MODELO NUMÉRICO.

- 3) **Implementación numérica.** Se compone a su vez de dos partes:
- Cálculo numérico, en el que se analiza si existe la solución numérica, y si es única y estable.
 - Programación.
- 4) **Mediciones.** Consiste en la obtención de datos relacionados con el modelo. Es necesario tener en cuenta que toda medición tiene un error de medida asociado.
- 5) **Calibración del modelo.** En esta fase se compara la salida del modelo con los datos observados en la realidad (mediciones).
- 6) **Validación.** Llegado este punto, se observa si el modelo funciona o no; si funciona adecuadamente puede emplearse en estudios científicos o en aplicaciones ingenieriles; si no funciona, es necesario volver a la fase 1), pues los fallos se deben, habitualmente, a errores conceptuales.

TIPOS DE MODELOS:

- 1) **Deterministas (leyes físicas).** La respuesta está determinada por la física.
- 2) **Basados en datos.** A su vez se diferencian dos tipos:
 - a. **Modelos experimentales** (modelos de ajuste).

En los procesos experimentales, o de ajuste, se dispone de una serie de datos observados (considerando un ejemplo unidimensional):

$$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)\}; \text{ donde } m \text{ es el número de datos.}$$

El objetivo es construir un modelo explicativo de dichas observaciones:

$$y^*(x) \quad (* \equiv \text{predictor, estimador})$$

Lo ideal es conseguir que:

$$y^*(x_1) \approx y_1 \quad y^*(x_2) \approx y_2 \quad y^*(x_m) \approx y_m$$

En primer lugar se define el modelo, de la siguiente manera:

$$y^*(x) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x)$$

Donde $\varphi_k(x)$ son las funciones de base o de construcción del modelo, y de ellas depende la forma del modelo. Hay varios tipos de funciones de base:

- Funciones interpoladoras: $\{\varphi_i(x)\} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. Funciones polinómicas (Lagrange).

- Funciones trigonométricas:

$$\{\varphi_i(x)\} = \{1, \cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x), \dots, \cos(nx), \sin(nx)\}. \text{ Funciones de Fourier.}$$

Estas funciones son los patrones del interpolador, y una vez que se fijan se tiene que:

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x_1) \approx y_1 \quad \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x_2) \approx y_2 \quad \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x_m) \approx y_m$$

Se desconocen los valores de a_k , que son los pesos. El problema puede escribirse matricialmente de la forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_m(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_m) & \dots & \varphi_m(x_m) \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\vec{a}} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}}_{\vec{y}}$$

Con: $\vec{a} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^m \quad F \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Por tanto, para determinar los pesos es necesario resolver un sistema lineal, de m ecuaciones y n incógnitas.

Así, en función del valor de m y n , pueden darse dos casos:

- **Caso 1: $m = n$** $\rightarrow$ F es cuadrada, y $\text{rang}(F) = n \rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Existe una solución única y exacta. Se trata de un problema de interpolación.
- **Caso 2: $m \neq n$** . Se diferencian entonces dos supuestos diferentes:
 - **$m > n$** $\rightarrow$ Problema sobredeterminado: existen más restricciones que grados de libertad. No tiene solución. Se trata de un problema de ajuste o de mínimos cuadrados.
 - **$m < n$** $\rightarrow$ Existen $n - \text{rang}(F)$ grados de libertad. Donde n es el número de ecuaciones independientes. El problema tendrá posiblemente infinitas soluciones.

Recordatorio: el Rango de una matriz F es el número de ecuaciones y de parámetros independientes de la misma:

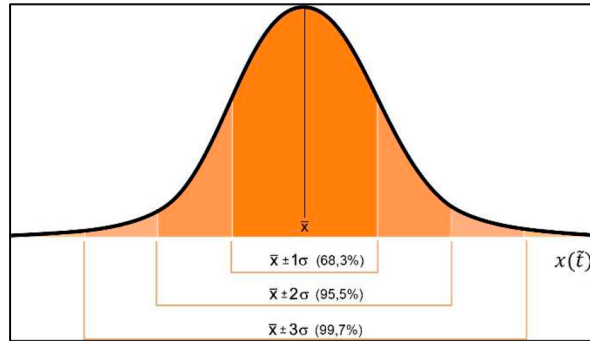
$$\text{rang}(F) \leq \min(m, n)$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang}(F) = 2$$

La última fila es redundante con respecto a las demás.

b. Modelos estadísticos (leyes de probabilidad).

Sea $x(t)$ una serie temporal (proceso estocástico que depende del tiempo). Dado $\tilde{t}$, $x(\tilde{t})$ es una variable aleatoria:



Se trata de una variable aleatoria que varía con el tiempo, y que tiene una correlación temporal.

Así, los procesos estocásticos pueden ser:

- Temporales, (t) .
- Espaciales, (x, y, z) .
- Espacio-temporales, (x, y, z, t) .

La estadística sin incertidumbre tiende al determinismo.