

Sesión 9

Cadenas de Markov a tiempo continuo

El concepto de cadenas de Markov que vimos en las prácticas anteriores se generaliza al caso continuo de la siguiente manera: un proceso a tiempo continuo $\{X_t\}_{t \geq 0}$ se dice *cadena de Markov a tiempo continuo* (CMTC) cuando para cualesquiera tiempos $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_n < s$ y estados $i_0, \dots, i_n, i, j$, se cumple

$$P(X_{t+s} = j | X_s = i, X_{s_n} = i_n, \dots, X_{s_0} = i_0) = P(X_t = j | X_0 = i).$$

Como casos particulares, tenemos los procesos de Poisson que vimos en prácticas anteriores.

9.1. Simulación de cadenas de Markov a tiempo continuo

Existen varias formas de simular observaciones de una cadena de Markov a tiempo continuo. Los primeros algoritmos fueron establecidos por Gillespie en los años 70.

Hemos visto en teoría que, por la propiedad de Markov antes señalada, en una cadena de Markov a tiempo continuo los tiempos entre transiciones siguen una distribución exponencial, con tasa ν_i dependiente del estado en el que nos encontremos. Así, podemos simular la CMTC si conocemos las tasas ν_i y las probabilidades de transición entre unos estados y otros, de forma similar a como vimos en la práctica 7 para procesos de Poisson.

Supongamos por ejemplo que tenemos el conjunto de estados $\{0, 1, 2, 3\}$, y que las probabilidades de transición vienen dadas por la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mientras que las tasas de permanencia en cada estado son:

$$\nu_0 = 0,5 \quad \nu_1 = 1 \quad \nu_2 = 1,5 \quad \nu_3 = 2.$$

En ese caso, podemos simular los instantes de transición y los estados correspondientes de acuerdo con el siguiente código:

```
par=c(0.5,1,1.5,2)
muestra=rep(0,100)
```

```

t=rep(0,100)
prob=rep(0,4)
trans=matrix(c(0,1,0,0,0.4,0,0.6,0,0,0.5,0,0.5,0,0,1,0),4,4,byrow=T)
for (i in 2:100){ #inicialmente estamos en el estado 0
x=muestra[i-1]+1
t[i]=t[i-1]+rexp(1,par[x]) #simulamos el tiempo de la transición i-ésima
for (j in 1:4){prob[j]=trans[x,j]} #generamos el vector de prob. de transición
muestra[i]=sample(c(0,1,2,3),1,prob,replace=F)
}

```

Con esta idea, podemos dar una estimación de la distribución estacionaria, teniendo en cuenta que, de existir, se cumple $\pi(j) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_t(i, j)$ para todo i , siendo $p_t(i, j)$ la probabilidad $P(X_t = j | X_0 = i)$. Obtendríamos:

```

par=c(0.5,1,1.5,2)
prob=rep(0,4)
freq=rep(0,4)
for (k in 1:1000){
muestra=rep(0,200)
t=rep(0,200)
trans=matrix(c(0,1,0,0,0.4,0,0.6,0,0,0.5,0,0.5,0,0,1,0),4,4,byrow=T)
for (i in 2:200){
x=muestra[i-1]+1
t[i]=t[i-1]+rexp(1,par[x])
for (j in 1:4){prob[j]=trans[x,j]}
muestra[i]=sample(c(0,1,2,3),1,prob,replace=F)
}
y=which.max(t>100)
z=muestra[y-1]
freq[z+1]=freq[z+1]+1
}

```

Así, la estimación con $t = 100$ (aunque obviamente podríamos simularlo para valores mayores de t e ir comprobando la evolución) sería:

```

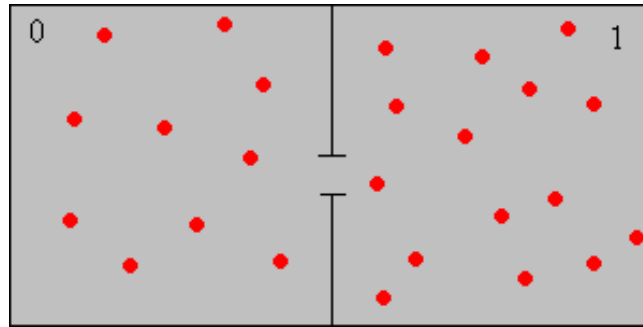
> freq/1000
[1] 0.268 0.322 0.302 0.108

```

9.2. La cadena de Ehrenfest

La *cadena de Ehrenfest*, llamada así en honor al físico y matemático austriaco Paul Ehrenfest, es un modelo matemático del intercambio de moléculas de gas entre dos urnas. Fue utilizado para explicar la segunda ley de la Termodinámica.

Desde un punto de vista matemático, el modelo de la cadena de Ehrenfest puede formularse de manera sencilla considerando urnas con bolas. Supongamos que tenemos dos urnas A y B con un total de N bolas, y que en cada instante de tiempo t elegimos una bola al azar de una de las urnas y la trasladamos a la otra. El modelo de Ehrenfest consiste en el proceso estocástico $\{X_0, X_1, X_2, \dots\}$, donde X_j denota el número de bolas en la urna A en el instante j .



La distribución de probabilidad de X_j depende del valor de X_{j-1} , de forma que

$$P(X_j = k + 1 | X_{j-1} = k) = \frac{n - k}{N} \text{ y } P(X_j = k - 1 | X_{j-1} = k) = \frac{k}{N}$$

para todo $k = 1, \dots, N$. Obviamente, cuando $k = 0$ o $k = N$ se obtiene

$$P(X_j = N - 1 | X_{j-1} = N) = 1 \text{ y } P(X_j = 1 | X_{j-1} = 0) = 1.$$

La cadena de Ehrenfest constituye un ejemplo de proceso de nacimiento y muerte a tiempo discreto, puesto que entre dos instantes consecutivos el estado del sistema puede variar como mucho en 1. En esta práctica, vamos a simular su comportamiento cuando tenemos 10 bolas entre las dos urnas, e inicialmente colocamos 5 bolas en cada urna. Para simular una realización del experimento y determinar el número de bolas en la urna 1 después de 5 instantes de tiempo, hacemos lo siguiente:

```
ehrenfest=function(n,x,m){ #creamos una función dependiente del número total
                           #de bolas n, el número inicial de bolas en la urna 1, x,
                           #y el número de repeticiones, m
  for(i in 1:m)
    x=x+sample(c(1,-1),1,c((n-x)/n,x/n),replace=TRUE) #en cada paso el número de bolas
                                                         #aumenta o disminuye en 1
                                                         #con probabilidad (n-x)/n y x/n
  return(x)}
```

Obtenemos por ejemplo:

```
> ehrenfest(10,5,5)
[1] 6
```

También podemos utilizar la simulación para estimar la distribución de probabilidad de la composición de la urna A después de 5 instantes de tiempo:

```
freq=rep(0,11)
for(j in 1:1000){
  z=ehrenfest(10,5,5)
  freq[z+1]=freq[z+1]+1}
```

Obtenemos por ejemplo:

```
> freq/1000
[1] 0.000 0.000 0.083 0.000 0.429 0.000 0.410 0.000 0.078 0.000 0.000
```

mientras que la distribución de probabilidad teórica sería:

número bolas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
probab.	0,03125	0	0,15625	0	0,375	0	0,375	0	0,15625	0	0,03125

Por otro lado, también podemos suponer que el estado inicial es aleatorio. A modo de ejemplo, supongamos que inicialmente tenemos una distribución uniforme en $\{0, \dots, N\}$ para el número de bolas en la urna A . En ese caso la simulación del número de bolas al final de $m = 5$ instantes de tiempo se haría de acuerdo con las siguientes instrucciones:

```
ehrenfestmod=function(n,m){
x=sample(seq(0,n,1),1,rep(1/(n+1),n+1),replace=TRUE) #simulamos el estado inicial
for(i in 1:m)
x=x+sample(c(1,-1),1,c((n-x)/n,x/n),replace=TRUE)
return(x)}
```

De manera análoga, estimaríamos la distribución de probabilidad al cabo de $m = 5$ instantes de tiempo cuando el estado inicial es aleatorio:

```
freq=rep(0,11)
for(j in 1:1000){
z=ehrenfestmod(10,5)
freq[z+1]=freq[z+1]+1}
freq/1000
```

9.3. Ejercicios

1. Consideremos el modelo de crecimiento de stocks de Kou y Kou, basado en procesos de nacimiento y muerte ¹. Se considera que la capitalización de un stock en el instante t , M_t , sigue la fórmula

$$M_t = \Theta_t X_t,$$

donde Θ_t modeliza la tendencia global del mercado en ese tipo de stock y X_t sigue un proceso de nacimiento y muerte, con tasas:

$$\lambda_i = i\lambda + g, \quad \mu_i = i\mu + h \quad \forall i \geq 1, \quad \lambda_0 = g, \quad \mu_0 = 0,$$

y donde:

- λ, μ son las tasas instantáneas de apreciación y depreciación del mercado;
- $g > 0$ es la tasa de crecimiento debida a factores externos al mercado; y
- h es la tasa de depreciación debida a factores externos al mercado.

¹Fuente: ‘Modelling growth stocks via birth-death processes’. S.C. Kou, S.G. Kou. Annals of Advanced Probability, vol. 35, 661-664 (2003)

Consideremos el caso particular de $\lambda = 9, \mu = 10, g = 1, h = 0$.

- (a) Estima mediante simulación la distribución estacionaria del proceso $\{X_t\}_{t \geq 0}$.
- (b) ¿Cuál sería el valor exacto de acuerdo con lo que hemos visto en teoría?

Nota: Para resolver este ejercicio puedes suponer que el espacio de estados es únicamente $0, 1, \dots, 5$, puesto que la probabilidad de estados superiores es muy cercana a 0. Supón entonces que si nos encontramos en el estado 5 la siguiente transición es a 4 con probabilidad 1.

2. El modelo de Ehrenfest modificado consiste en elegir, en cada instante de tiempo, una bola y una urna al azar, y en colocar la bola elegida en la urna correspondiente (que puede ser la urna en la que ya estaba).
 - (a) Determina la distribución de probabilidad condicionada $P(X_j | X_{j-1})$ en este caso.
 - (b) Supongamos un modelo con 12 bolas repartidas en 2 urnas, y donde la urna A tiene inicialmente 5 bolas. Simula una realización del experimento durante 10 instantes de tiempo, y calcula el número final de bolas en la urna A.
 - (c) Estima la probabilidad de cada uno de los estados finales en (b).
 - (d) Repite los apartados (b) y (c) suponiendo que el número de bolas inicial en A es aleatorio, con distribución uniforme en $\{0, \dots, 12\}$.