

Sesión 8

Procesos de renovación

Los procesos de renovación son una generalización de los procesos de Poisson en los que los tiempos entre llegadas, si bien se asumen independientes e idénticamente distribuidos, no siguen necesariamente una distribución exponencial.

Denotemos t_i el tiempo de duración del i -ésimo proceso, $T_n = t_1 + \dots + t_n$ el momento en el que se produce la n -ésima renovación, y N_t el número de renovaciones que se han producido en el momento t . Entonces, $\{N_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso a tiempo continuo, y se cumple

$$\{N_t \geq t\} = \{T_n \leq t\},$$

de donde se deduce que el número esperado de renovaciones hasta el tiempo t es

$$E(N_t) = \sum_n P(T_n \leq t).$$

En esta práctica vamos a comprobar cómo simular distintos procesos de renovación.

8.1. Simulación de procesos de renovación

La simulación de un proceso de renovación es bastante sencilla: es suficiente con conocer la distribución del tiempo entre llegadas. A continuación presentamos un ejemplo en el que estos tiempos siguen una distribución uniforme en $(0, 2)$. Vamos a estimar el número esperado de renovaciones que se producen hasta el instante $t = 6$: para ello, simularemos un gran número de renovaciones (por ejemplo 100) y estudiaremos cuántas de ellas llegan a producirse antes de $n = 6$, suponiendo que es prácticamente imposible que las 100 hayan ocurrido en un intervalo de tiempo tan pequeño.

```
x=runif(100,0,2)
y=cumsum(x)
z=which.max(y>6)-1
```

En este código, la instrucción `which.max` nos devuelve el menor n para el que $T_n > 6$, por lo que el número de renovaciones antes del instante 6 se corresponde con $n-1$.

Repitiendo el proceso, obtendremos una muestra de la variable N_t , que podremos utilizar para dar una estimación de la media:

```

muestra=rep(0,1000)
for (i in 1:1000){
x=runif(100,0,2)
y=cumsum(x)
muestra[i]=which.max(y>6)-1
}

> mean(muestra)
[1] 5.703

```

Recordemos que las cotas que habíamos visto en clase únicamente nos permitían determinar que $E(N_6)$ pertenecía al intervalo $[\frac{t}{\mu} - 1, \frac{t+M}{\mu} - 1]$. En este caso, $t = 6$, $M = 2$, $\mu = 1$, luego el resultado teórico únicamente permite asegurar que $E(N_6) \in [5, 7]$.

Uno de los resultados más importantes dentro de los procesos de renovación es el que asegura que el cociente $\frac{N_t}{t}$ converge, con probabilidad 1, al valor $\frac{1}{\mu}$. Vamos a comprobarlo creando una función que, en función de un margen de error ϵ dado, simule una muestra grande de la variable N_t , y nos devuelva el porcentaje de observaciones dentro del intervalo $[\frac{1}{\mu} - \epsilon, \frac{1}{\mu} + \epsilon]$. Por ejemplo, cuando $t_n \sim U(0, 2)$ y $\epsilon = 0,01$, obtendríamos:

```

conv=function(error,t){
muestra=rep(0,10000)
for (i in 1:10000){
x=runif(100000,0,2)
y=cumsum(x)
muestra[i]=which.max(y>t)-1
}
mean(abs((muestra/t)-1)<error)
}

```

Nótese que en este caso aumentamos mucho el número de observaciones simuladas, para asegurarnos de que la probabilidad de que todas las renovaciones se produzcan antes del instante t es prácticamente nula.

Se observa, por ejemplo:

```

> conv(0.01,100)
[1] 0.0665

> conv(0.01,500)
[1] 0.273

> conv(0.01,1000)
[1] 0.4038

> conv(0.01,10000)
[1] 0.9127

```

8.2. Procesos de renovación con recompensas

Un modelo más general son los llamados procesos de renovación con recompensa (reward renewal processes), en los que cada renovación lleva asociada una ganancia X_n . En ese caso, las recompensas obtenidas hasta el instante t determinarían un proceso continuo $R_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$.

Supongamos en el ejemplo anterior que cada renovación lleva asociada una ganancia X_n con una distribución normal $N(3, 0.5)$. Simulamos una muestra de las ganancias acumuladas hasta el instante $t = 6$:

```
ganancia=rep(0,1000)
for (i in 1:1000){
  x=runif(100,0,2)
  z=rnorm(100,3,0.5)
  y=cumsum(x)
  t=cumsum(z)
  h=which.max(y>6)-1
  ganancia[i]=t[h]
}
```

Y así una estimación de la ganancia media sería

```
> mean(ganancia)
[1] 16.7928
```

8.3. Procesos de renovación alternantes

Otro proceso relacionado son los procesos de renovación alternantes, en los que cada ciclo pasa por dos estados, gobernados por distribuciones X_n e Y_n respectivamente, de forma que $t_n = X_n + Y_n$ y donde las variables $\{X_n\}_n$ son i.i.d, y también lo son las variables $\{Y_n\}_n$.

En estos casos, resulta por ejemplo de interés estimar la proporción de tiempo que pasamos en cada estado, en media. Vamos a considerar un proceso de renovación alternante en el que el primer estado sigue una distribución uniforme $U(0, 2)$ y el segundo una exponencial $\exp(1,5)$. Para simular por ejemplo los tiempos de 100 renovaciones, podemos hacer lo siguiente:

```
t=rep(0,200)
tiempos=rep(0,200)
estado1=runif(100,0,2)
estado2=rexp(100,1.5)
for(i in 1:100){
  t[2*i-1]=estado1[i]
  t[2*i]=estado2[i]
  tiempos=cumsum(t)}
```

Por otro lado, si queremos estimar el porcentaje de tiempo que pasamos en el estado 1 bastaría con dividir el total de tiempo que pasamos en dicho estado entre el total de tiempo:

```
total1=sum(estado1)
total=sum(estado1)+sum(estado2)
total1/total
```

Se obtiene por ejemplo

```
> total1/total
[1] 0.6007548
```

mientras que el resultado teórico nos garantiza que este porcentaje converge a

$$\frac{E(X_n)}{E(X_n) + E(Y_n)} = \frac{1}{1 + 1/1,5} = 0,6.$$

8.4. La paradoja de la inspección

Por último, vamos a comprobar mediante simulación la llamada *paradoja de la inspección*, que consiste en que si inspeccionamos un proceso de renovación en un instante t y calculamos el tiempo medio de vida del ciclo de renovación que está teniendo lugar en ese momento, obtenemos un tiempo medio superior al de cada ciclo de renovación.

Para ello, consideramos de nuevo el proceso de renovación en el que los tiempos de vida siguen una distribución uniforme en $(0,2)$, y supondremos que observamos la duración del proceso que está teniendo lugar en el instante $t = 6$. Para ello, consideramos el siguiente código:

```
muestra=rep(0,1000)
for (i in 1:1000){
  x=runif(100,0,2)
  y=cumsum(x)
  min=which.max(y>6)-1
  max=which.max(y>6)
  muestra[i]=y[max]-y[min]
}
```

Observamos así cómo la duración media es:

```
> mean(muestra)
[1] 1.326394
```

De acuerdo con los resultados vistos en clase de teoría, ésta es de $E(t_n^2)/E(t_n) = 4/3$, superior a la duración media de un ciclo, que es 1.

8.5. Ejercicios

1. (a) Simula una muestra de tamaño 200 de los tiempos de renovación asociados a un proceso en el que los tiempos de duración de las componentes siguen una distribución exponencial con parámetro 2.
- (b) Utiliza simulación para dar una estimación del tiempo medio de vida residual del ciclo activo en el instante $t = 5$. ¿Cuál sería el resultado exacto, de acuerdo con la fórmula vista en teoría?

2. Los tiempos de vida de ciertas componentes siguen una distribución uniforme en el intervalo $(0,5)$. El reemplazo de una componente lleva asociados unos costes, los cuales siguen una distribución de Poisson con parámetro 2.3. Utilizando simulación, da una estimación de la media y la varianza de los costes acumulados hasta el instante $t = 12$.
3. Las bombillas de un tipo tienen un tiempo de vida acorde a una distribución Weibull con parámetros 2,3. Cuando una bombilla se estropea, se produce un proceso de reparación y reemplazo, cuya duración sigue una distribución exponencial con parámetro 1. Utiliza la simulación para estimar la probabilidad de que, elegido un instante al azar, el proceso esté en el estado de funcionamiento en lugar del de reparación.