

Sesión 7

Procesos de Poisson

Un proceso de Poisson es un proceso estocástico a tiempo continuo $\{X_t\}_{t \geq 0}$, cumpliendo las siguientes propiedades:

- (i) $P(X_0 = 0) = 1$.
- (ii) $X_{t_2} - X_{t_1} \sim \mathcal{P}(\lambda(t_2 - t_1))$ para todo $0 < t_1 < t_2$.
- (iii) Dados $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, las variables aleatorias $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.

Habitualmente, X_t representa el número de ocurrencias de un suceso (llamadas a un número de teléfono, llegadas de clientes a una tienda, etc) en un intervalo de tiempo de longitud t . Los procesos de Poisson son la base de la teoría de colas.

7.1. Simulación de procesos de Poisson

En la primera práctica vimos cómo simular observaciones ajustadas a una distribución de Poisson y a una distribución exponencial. De esta manera, resulta sencillo obtener estimaciones de las probabilidades asociadas a un proceso de Poisson.

Ejemplo 7.1. (Durrett, p.153) *Tres pescadores están pesacando juntos y cada uno pesca con una tasa de dos peces por hora. ¿Cuál es el tiempo esperado hasta que todos ellos han pescado algo?*

Sea T_i la variable ‘tiempo (en horas) hasta que el pescador i -ésimo pesca algo’, y X_i la variable ‘número de peces pescados por hora’. Entonces $X_i \sim \mathcal{P}(2)$ y por la relación entre las distribuciones Poisson y exponencial se obtiene $T_i \sim \exp(2)$. Debemos calcular $E(\max\{T_1, T_2, T_3\})$. Para estimarlo, vamos a simular una muestra de tamaño grande de la variable $\max\{T_1, T_2, T_3\}$ y a utilizar su media como estimación

```
t1=rexp(1000,2)
t2=rexp(1000,2)
t3=rexp(1000,2)
t=pmax(t1,t2,t3)
mean(t)
```

Se obtiene

```
> mean(t)
[1] 0.8911036
```

muy próximo al valor correcto, que en este caso es $11/12$.

Nótese que en el código anterior estamos utilizando la instrucción *pmax* para hacer el máximo de los tres vectores componente a componente; la instrucción *max* haría el máximo de todas las componentes de todos los vectores.

Ejemplo 7.2. (Durrett, p.154) *Los equipos de hockey A y B marcan goles de acuerdo con un Proceso de Poisson con parámetros 1 y 2, respectivamente. Supongamos que el equipo A comienza con una ventaja de 3 goles a 1. ¿Cuál es la probabilidad de que A llegue a 5 antes que B?*

De acuerdo con esto, si llamamos T_A a la variable ‘Tiempo hasta que el equipo A marca 2 goles’ y T_B a ‘Tiempo hasta que el equipo B marca 4 goles’, queremos calcular $P(T_A < T_B)$. Se cumple que $T_A \sim \exp(1) + \exp(1) \sim \Gamma(2, 1)$ mientras que $T_B \sim \exp(2) + \exp(2) + \exp(2) + \exp(2) \sim \Gamma(4, 2)$. Mediante simulación (y sin recurrir a la distribución gamma), se obtiene

```
t1=rexp(1000,1)
t2=rexp(1000,1)
ta=t1+t2
t3=rexp(1000,2)
t4=rexp(1000,2)
t5=rexp(1000,2)
t6=rexp(1000,2)
tb=t3+t4+t5+t6
t=ta<tb
```

lo que produce

```
> mean(t)
[1] 0.544
```

7.2. Refinamiento y superposición

De manera análoga podemos simular procesos de Poisson que resultan del *refinamiento* o la *superposición* de otros. El primer caso se refiere a la descomposición de un proceso de Poisson como suma de varios, mientras que en el segundo caso la suma de varios procesos de Poisson independientes produce otro proceso de Poisson en el que se suman las tasas.

Ejemplo 7.3. *Supongamos que el número de reclamaciones diarias a un servicio por parte de los clientes de tipo básico y premium constituyen dos procesos de Poisson independientes, con tasas 6 y 4, respectivamente. Deseamos calcular:*

- (a) *La probabilidad de que en un día se produzcan exactamente 9 reclamaciones.*
- (b) *La probabilidad de que las próximas 4 reclamaciones exactamente 2 sean de clientes de tipo básico.*

Si bien por la superposición sabemos que el total de reclamaciones es un proceso de Poisson con tasa 10 y que cada una tiene probabilidad 0.6 de ser de un cliente de tipo básico, podemos también estimar la solución de (a) y (b) utilizando simulación. Así, para la primera pregunta haríamos:

```
basico=rpois(1000,6)
premium=rpois(1000,4)
total=basico+premium
mean(total==9)
```

obteniendo por ejemplo

```
> mean(total==9)
[1] 0.141
```

(la probabilidad exacta es $P(\mathcal{P}(10) = 9) = 0,125$). En cuanto al segundo apartado, haríamos

```
prop=rep(0,1000)
for(i in 1:1000){
  basico=rep(4,6)
  premium=rep(4,4)
  tiemposbasico=cumsum(basico)
  tiempospremium=cumsum(premium)
  prop[i]=(tiemposbasico[3]>tiempospremium[2] & tiempospremium[3]>tiemposbasico[2])}
```

obteniendo por ejemplo

```
> mean(prop)
[1] 0.35
```

siendo la probabilidad exacta $P(B(4,0.6)=2)=0.3456$.

7.3. Ejercicios

1. El número de reclamaciones diarias a una compañía de seguros se modeliza con un proceso de Poisson con tasa 6. Por otro lado, la cuantía de cada reclamación sigue una distribución normal $N(10, 4)$, y dichas cuantías son independientes unas de otras.
 - (a) Estima mediante simulación la probabilidad de que en un período de 2 días la cuantía total de las reclamaciones sea inferior a 100.
 - (b) Supongamos ahora que el 30 % de las reclamaciones corresponden a accidentes de tráfico, y que su cuantía sigue una distribución normal $N(8, 5)$, mientras que la distribución de la cuantía del resto de reclamaciones sigue una distribución $N(12, 6)$. Determina:
 - (b1) La probabilidad de que de las próximas 5 reclamaciones, exactamente 1 corresponda a un accidente de tráfico.
 - (b2) La cuantía total esperada para las próximas 10 reclamaciones.

2. Consideremos de nuevo el modelo de seguros del apartado (a) del ejercicio anterior. Supongamos que la compañía tiene unos ingresos mensuales de 1800, y un capital inicial acumulado de 300 (consideramos meses de 30 días).
 - (a) ¿Cuál sería la distribución del estado de cuentas al final del mes?
 - (b) Utiliza el modelo del apartado (a) para estimar la probabilidad de bancarrota en un período de 12 meses.
3. Una compañía tiene dos sucursales A y B. La llegada de clientes por hora a cada una de ellas sigue un proceso de Poisson con tasas 12 y 15, respectivamente.
 - (a) Estima la probabilidad de que en una hora lleguen menos de 25 clientes entre las dos sucursales.
 - (b) Estima la probabilidad de que los tres primeros clientes lleguen a la sucursal B.
 - (c) Compara las estimaciones obtenidas en (a) y (b) con las probabilidades teóricas.