

Sesión 6

Martingalas

Recordemos que una secuencia $\{X_n\}_n$ de variables aleatorias con valores en un espacio finito Ω es una *martingala* cuando

$$E(X_{n+1}|X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = x_n,$$

siendo x_i se denomina estado del sistema en el instante i .

Se dice que es una *supermartingala* cuando

$$E(X_{n+1}|X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \leq x_n,$$

y una *submartingala* cuando

$$E(X_{n+1}|X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \geq x_n.$$

En esta práctica, vamos a considerar dos ejemplos de martingalas y vamos a usar simulación para estimar dos probabilidades asociadas a estos procesos.

6.1. Probabilidad de ruina en seguros

Consideremos un modelo simplificado de seguros, que a su vez generalizará el problema de la ruina del jugador. Una compañía de seguros tiene unos gastos anuales modelados por una variable aleatoria X_n , siendo $\{X_n\}_n$ una colección de variables independientes e idénticamente distribuidas, y unos ingresos constantes que normalizaremos a 1. Si su capital inicial es de x , entonces su capital disponible al final del período n -ésimo vendría dado por

$$M_n = x + n - \sum_{i=1}^n X_i.$$

De esta forma, se produce la ruina cuando en algún momento superamos el capital disponible, esto es, cuando $M_n < 0$ para algún n .

Sea $\mu = E(X_i)$ (recordemos que al ser idénticamente distribuidas μ no depende de i). Se cumple entonces que $\{M_n\}_n$ es una martingala cuando $\mu = 1$, una supermartingala cuando $\mu > 1$ y una submartingala cuando $\mu < 1$.

Vamos a estimar la probabilidad de ruina en un período de n años. Para ello, supondremos que X_n es una variable aleatoria discreta con valores en $\{0, 1, \dots, k\}$ con respectivas probabilidades $\{p_0, \dots, p_k\}$. Creamos entonces una función que determine la secuencia de ganancias acumuladas durante este período:

```

ganancia=function(x,k,n,prob){
y=rep(0,n)
z=rep(0,n)
y[1]=x
for(i in 2:n){
y[i]=y[i-1]+1-sample(seq(0,k,1),1,prob,replace=TRUE)
z=cumsum(y)}
return(z)}

```

Así, para determinar si se produce la quiebra deberíamos comprobar si alguna de estas ganancias acumuladas es menor que 0, y para estimar la probabilidad de que esto suceda repetimos el proceso con un gran número de repeticiones:

```

estim=function(x,k,n,prob){
quiebra=rep(0,1000)
for (i in 1:1000){
quiebra[i]=min(ganancia(x,k,n,prob))<0}
return(mean(quiebra))}

```

Así, si por ejemplo X_n tomase los valores 0, 1, 2 con probabilidades respectivas 0,3, 0,5, 0,2, la estimación de la probabilidad de quiebra si disponemos de un capital inicial de 1.2 sería:

```

> estim(1.2,2,10,c(0.3,0.5,0.2))
[1] 0.084

```

Nótese que en este caso $E(X_i)=0.9 < 1$, luego el proceso $\{M_n\}_n$ sería una submartingala.

6.2. La ecuación de Wald

A continuación vamos a comprobar mediante simulación el resultado que hemos visto en teoría conocido como la ecuación de Wald. Consideremos un camino aleatorio

$$S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n,$$

donde las variables $\{X_n\}_n$ son independientes e idénticamente distribuidas con esperanza $\mu < +\infty$. Si definimos $M_n = S_n - n\mu$ para todo n , entonces $\{M_n\}_n$ constituye una martingala con respecto a X_n (nótese que el ejemplo de la sección anterior es un caso particular de este modelo).

Sea T un tiempo de parada con esperanza finita. Entonces, la ecuación de Wald nos dice que

$$E(S_T - S_0) = \mu E(T).$$

De acuerdo con esto, si consideramos un juego en el que ganamos 1 con probabilidad p y perdemos 1 con probabilidad $1 - p > p$ y comenzamos con x euros, el tiempo medio hasta que lo perdemos todo sería $\frac{x}{1-2p}$.

Para comprobarlo, creamos una función dependiente de x y p que nos estime dicha probabilidad:

```
estim=function(x,p){
  z=rep(0,1000)
  y=rep(0,1000)
  time=rep(1000,1000)
  for (i in 1:1000){
    z=sample(c(1,-1),1000,c(p,1-p),replace=TRUE)
    y=x+cumsum(z)
    time[i]=which.max(y<=0)}
  mean(time)}
```

En este código, la instrucción `which.max( )` aplicado a un vector devuelve el índice del vector en el que la condición se cumple por primera vez. Otra posibilidad sería escribir

```
time[i]=which(y<=0)[1]
```

que también devolvería el índice correspondiente al primer elemento en el que se cumple la condición.

Por ejemplo, si empezamos con 5 euros y la probabilidad de éxito es 0.3, obtenemos

```
> estim(5,0.3)
[1] 12.496
```

que está muy próximo a $5/0.4 = 12.5$.

De la misma forma, si paramos cuando lleguemos a 10 o cuando nos arruinemos, el tiempo medio de parada se obtendría mediante el siguiente código:

```
estim=function(x,p){
  z=rep(0,1000)
  y=rep(0,1000)
  time=rep(1000,1000)
  for (i in 1:1000){
    z=sample(c(1,-1),1000,c(p,1-p),replace=TRUE)
    y=x+cumsum(z)
    time[i]=which.max(y<=0 | y>=10)}
  mean(time)}
```

La estimación cuando empezamos con 5 euros y la probabilidad de éxito es 0.3 sería

```
> estim(5,0.3)
[1] 12.1
```

6.3. Ejercicios

1. Consideremos el modelo de seguros de la sección 1, y supongamos ahora que el capital inicial es de 1 y que la variable gastos toma los valores 0,1,2 con probabilidades $1/3, 1/3$ y $1/3$, respectivamente.

- (a) En este caso, ¿el proceso $\{M_n\}_n$ es una martingala, una supermartingala o una submartingala?

- (b) Estima la probabilidad de ruina en un período de 20 años.
 - (c) Supongamos que decidimos salir a bolsa cuando el capital acumulado excede a 2 en un momento dado. Estima la probabilidad de salir a bolsa antes de 20 años, si nuestro capital inicial es 1.2 y los gastos son de 0, 1 y 2 con probabilidades respectivas 0.3, 0.5 y 0.2.
2. Consideremos un camino aleatorio en el que la variable X_n toma los valores $-2, 0, 2$ con probabilidades respectivas 0.3, 0.3, 0.4. Supongamos que $S_0 = 0$, y que nuestro tiempo de parada T se produce cuando llegamos a 6.
- (a) De acuerdo con la ecuación de Wald, ¿cuál es el tiempo medio de parada?
 - (b) Realiza una estimación de este tiempo mediante simulación.
 - (c) ¿Cuál sería el tiempo medio de parada si el criterio es parar cuando lleguemos a 6 o a -6?