

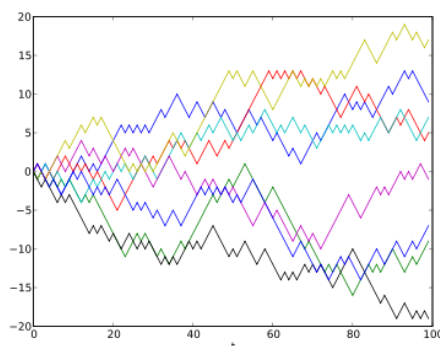
Sesión 2

Simulación de procesos estocásticos independientes.

En esta sesión vamos a considerar procesos estocásticos a tiempo discreto $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en los que las variables $(X_n)_n$ son independientes. Como vimos en la práctica anterior, si las variables son además idénticamente distribuidas resulta equivalente simular n observaciones de una de las variables X_i a tener una observación del vector aleatorio $(X_1, \dots, X_n)$. A partir de ello, podemos obtener también simulaciones de observaciones de algunas transformaciones del proceso estocástico, como por ejemplo de $(X_1, X_1 + X_2, \dots, X_1 + \dots + X_n)$. Esta idea subyace a dos de los ejemplos de procesos estocásticos que consideramos en esta sesión: el camino aleatorio y la ruina del jugador.

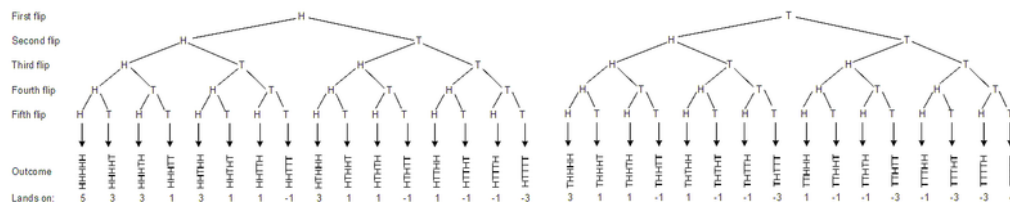
2.1. Los caminos aleatorios

El **camino aleatorio**, en inglés *random walk*, es una formalización matemática de la trayectoria que resulta de hacer sucesivos pasos aleatorios. Por ejemplo, la ruta trazada por una molécula mientras viaja por un líquido o un gas, el camino que sigue un animal en su búsqueda de comida, el precio de una acción fluctuante y la situación financiera de un jugador pueden tratarse como un camino aleatorio.



En su forma más general, los caminos aleatorios son cualquier proceso aleatorio donde la posición de una partícula en cierto instante depende sólo de su posición en algún instante previo y alguna variable aleatoria que determina su subsecuente dirección y la longitud de paso.

Vamos a simular un ejemplo sencillo de un camino aleatorio, asociado de nuevo al lanzamiento de una moneda equilibrada. Suponemos que cuando sale cara (H) avanzamos 1 y cuando sale cruz (T) retrocedemos 1:



De esta manera, al acabo de n movimientos nuestra posición sería $2k - n$, donde k es una variable aleatoria con distribución binomial $B(n, 0.5)$.

Vamos a comprobar que la distancia media entre el origen y la posición después de n lanzamientos de la moneda es aproximadamente $0.8 \cdot \sqrt{n}$. Para ello, una vez fijado el valor de n , simulamos un gran número de muestras de n lanzamientos de la moneda, y para cada una de ellas calculamos la distancia entre la posición origen y la final:

```
dist=function(n){
  x=sample(c(1,-1),n,c(0.5,0.5),replace=TRUE) #generamos n
                                                    #observaciones de los lanzamientos
  y=abs(sum(x)) #calculamos la distancia final al origen
  y }
```

La estimación de la distancia media se corresponde entonces con la media de las distancias en todas estas muestras:

```
z=rep(0,1000)
estim=function(n){
  for(i in 1:1000)
    z[i]=dist(n) #repetimos el proceso 1000 veces
  mean(z) } #calculamos la distancia media
```

2.2. Ejercicios

- Consideremos una versión más general del camino aleatorio en la que avanzamos hacia la derecha con probabilidad p y hacia la izquierda con probabilidad $q = 1 - p$.
 - Determina la probabilidad teórica de encontrarnos en la posición m al cabo de N movimientos.

- (b) Construye una función que, para valores de m y N dados, estime esta probabilidad, simulando el experimento $k = 1000$ veces.
 - (c) (El problema de Polya) Queremos estimar la probabilidad de volver a pasar por el origen al cabo de N movimientos. Para ello, usa la simulación para estimar:
 - (c1) La probabilidad de estar en el origen al cabo de N movimientos;
 - (c2) La probabilidad de volver a pasar por el origen por primera vez al cabo de N movimientos.
 - (c3) Da una estimación del valor de (c2) cuando $N = 10$ y $p=0.5$.
2. Vamos a comprobar experimentalmente el fenómeno conocido como la *ruina del jugador*, consistente en que todo jugador con una cantidad finita de dinero que juega a un juego justo contra una banca de dinero infinito se queda sin dinero con probabilidad 1. Para ello, vamos a comprobar que todo camino aleatorio acaba cruzando cualquier límite que fijemos con probabilidad 1. Suponemos que comenzamos con $n = 10$ euros, jugamos a cara o cruz, y ganamos 1 euro cuando sale cara y perdemos 1 euro cuando sale cruz.
- (a) Supongamos que jugamos $m = 20$ veces. Simula el juego y determina la cantidad de dinero de que disponemos al final.
 - (b) Repite el apartado (a) $k = 1000$ veces, y estima la probabilidad de quedarnos sin dinero cuando empezamos con 10 euros y jugamos 20 veces.
 - (c) Repite los apartados anteriores con $m = 500$ y $m = 50000$. Comenta los resultados.

Nota: En estos ejercicios puede ayudarte la instrucción `cumsum`, que devuelve el vector de sumas acumuladas de un vector dado: así, si $x=c(1,2,-1,0,3)$, $\text{cumsum}(x)=c(1,3,2,2,5)$.