

EJERCICIOS

1 Repaso de probabilidad

- (El problema del cumpleaños) Supongamos que la distribución del día de cumpleaños es uniforme, es decir, que cada día del año tiene probabilidad $1/365$ de ser el cumpleaños de una persona elegida al azar.
 - Elegimos a 3 personas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que todas tengan su cumpleaños en días distintos?
 - ¿A cuántas personas deberíamos seleccionar para que sea más probable alguna coincidencia en el día del cumpleaños que lo contrario?
- Un juego del casino nos proporciona las siguientes ganancias con sus respectivas probabilidades:

Ganancia	-1	0	5	10
Probabilidad	0.5	0.4	0.08	0.02

Jugamos a este juego, obteniendo una ganancia X_1 . Si no perdemos dinero, volvemos a jugar al mismo juego. Si perdemos, decidimos jugar a otro juego con la siguiente distribución:

Ganancia	-1	0	5	100
Probabilidad	0.7	0.23	0.06	0.01

Sea X_2 la ganancia que obtenemos la segunda vez que jugamos.

- Determina $E(X_2|X_1 > 0)$.
 - Calcula $E(X_1)$, $E(X_2)$ y $E(X_1 + X_2)$.
 - ¿Son X_1 y X_2 independientes?
- El número de clientes que llegan a una tienda en una hora sigue una distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 5$.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen exactamente 7 clientes en un intervalo de dos horas?
 - ¿Y la probabilidad de que pase menos de media hora desde que abre la tienda hasta que llega el primer cliente?
 - ¿Cuál es la distribución del tiempo en minutos entre dos llegadas consecutivas de clientes?

2 Introducción a los procesos estocásticos

1. Para los siguientes procesos, indica si son a tiempo discreto o continuo, y si los espacios de estados son numerables o no numerables:
 - (a) X_t :=Número de llamadas telefónicas a un servicio antes del instante t .
 - (b) X_n :=Ganancia total de una compañía al final del día n .
 - (c) X_n :=Número de artículos vendidos en total para los n primeros clientes del día.
 - (d) X_t :=Tiempo perdido por averías hasta el instante t .
2. Determina si los siguientes procesos son de incrementos independientes y/o estacionarios:
 - (a) $X_t \sim N(0, t)$, siendo $\{X_t\}_t$ independientes.
 - (b) $X_t = \min\{Y_t, 100\}$, con $Y_t = \max\{n : T_1 + \dots + T_n \leq t\}$, siendo $T_i \sim \exp(1)$ si $i \leq 5$ y $T_i \sim \exp(2)$ si $i > 5$.
 - (c) $X_t \equiv t \forall t$.
3. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas, y consideremos el proceso $\{S_n\}_n$ con $S_n = X_1 + \dots + X_n$.
 - (a) Supongamos que $X_n \sim N(0, 1)$. ¿Es $\{S_n\}_n$ un proceso estacionario?
 - (b) Supongamos que $X_n \sim N(1, 1)$. ¿Es $\{S_n\}_n$ un proceso estacionario?

3 Cadenas de Markov

1. Un jugador de tenis mete su primer servicio con probabilidad 0.4 cuando no lo ha hecho en ninguno de los dos puntos anteriores, y con probabilidad 0.75 en caso contrario. Denotemos X_n el resultado del primer servicio en el punto n -ésimo (0-fallo, 1-éxito.)
 - (a) Comprueba que $\{X_n\}_n$ NO es una cadena de Markov, pero $\{Y_n\}_n$, con $Y_n = (X_{n-1}, X_n)$ sí lo es.
 - (b) Determina la matriz de transición.

- (c) Si un jugador ha fallado sus dos últimos primeros servicios, ¿cuál es la probabilidad de que acierte los dos siguientes? ¿Y la de que falle el próximo pero acierte el siguiente?
2. (La cadena de Ehrenfest) Distribuimos 6 bolas blancas y 6 bolas negras en dos urnas, de manera que cada urna contiene 6 bolas. En cada iteración, cogemos una bola de cada urna y las intercambiamos. Sea X_n la variable que dice el número de bolas blancas en la urna número 1 en el instante n .
- (a) Determina la matriz de transición.
- (b) Si comenzamos con 4 bolas blancas en la urna 1, calcula la probabilidad de que al cabo de 5 iteraciones tengamos las 6 bolas blancas en la urna 1.
3. En una oficina trabajan 6 funcionarios. Cuando llega un expediente, el funcionario A lo dirige a B, C o D de manera aleatoria; B lo pasa a D o E con la misma probabilidad; C o E se lo pasan el uno a otro indefinidamente; D se lo pasa a A, B o F con la misma probabilidad; mientras que si llega a F éste resuelve el expediente.
- (a) Determina la matriz de transición.
- (b) Clasifica los estados en recurrentes y transitorios.
4. Consideremos la cadena de Markov con la siguiente matriz de transición:

	1	2	3	4
1	0	0.3	0.4	0.3
2	0.2	0	0	0.8
3	0.3	0	0.7	0
4	0.5	0.1	0.2	0.2

- (a) Si inicialmente estamos en el estado 1, ¿cuál es la probabilidad de retornar a este estado antes de la quinta iteración?
- (b) ¿Cuáles son los estados recurrentes?
5. Consideramos la cadena de Markov con siguiente matriz de transición:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.3	0.3	0.2	0.2	0	0	0
2	0	0.5	0	0	0	0	0.5
3	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0.5	0	0.5	0
5	0	0.2	0	0.3	0	0.2	0.3
6	0	0	0	0.4	0	0.6	0
7	0	0.3	0	0	0	0	0.7

- (a) Determina los estados transitorios y los recurrentes.
- (b) ¿Es irreducible?
- (c) ¿Cuál es el período de los distintos estados recurrentes?
- (d) ¿Es una cadena ergódica?

6. Una compañía de seguros clasifica a sus clientes en cuatro categorías: (A) premium; (B) perfil alto; (C) perfil bajo; y (D) de riesgo. La experiencia les dice que la transición de unas categorías a otras sigue una cadena de Markov con matriz de transición:

	A	B	C	D
A	0.9	0.1	0	0
B	0.8	0	0.2	0
C	0.1	0.4	0	0.5
D	0	0	0.2	0.8

De acuerdo con esto, ¿qué porcentaje de clientes estará en cada categoría a largo plazo?

7. El número de expedientes por resolver en una oficina evoluciona diariamente de acuerdo con una cadena de Markov, con las siguientes probabilidades de transición: cuando hay n expedientes pendientes, al final del día hay $n + 1$ con probabilidad $0.5 - \frac{1}{n+2}$, y $n - 1$ con probabilidad $0.5 + \frac{1}{n+2}$. Por otro lado, si no hay expedientes pendientes al final del día llega uno con probabilidad 0.2. ¿Cuál sería la distribución estacionaria?

4 Martingalas

1. Se considera una urna con bolas blancas, negras y rojas. Inicialmente hay 5 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. En cada instante se elige una bola al azar; si es blanca, se devuelve a la urna y se añade una de color rojo; si es roja, se devuelve a la urna y se añade una de color blanco; y si es negra, se devuelve a la urna y se añade una de color negro. Sea X_n la proporción de bolas blancas en el instante n . ¿Es $\{X_n\}_n$ una martingala?
2. Sean T_1, T_2 dos tiempos de parada respecto a un proceso $\{X_n\}_n$. Demuestra que $\min\{T_1, T_2\}$, $\max\{T_1, T_2\}$ y $T_1 + T_2$ son también tiempos de parada.
3. Jugamos a un juego en el que en cada iteración podemos ganar 1 euro con probabilidad 0.4 y perderlo con probabilidad 0.6. Si comenzamos con 10 euros, determina:
 - (a) La probabilidad de llegar a 15 euros antes de llegar a 0.
 - (b) Si jugamos indefinidamente, el tiempo medio en llegar a 0.
 - (c) ¿Cuál debería ser nuestro objetivo de ganancias para que sea más probable cumplir ese objetivo que arruinarnos?

5 Procesos de Poisson

1. La llegada de mails a un servidor se modeliza con un proceso de Poisson con parámetro 3.
 - (a) Supongamos que el servidor se cae entre las 9 y las 11 de la mañana. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya llegado ningún mensaje durante ese período?
 - (b) ¿Cuál es el tiempo medio de espera hasta el primer mail, una vez que el servidor vuelve a funcionar?
2. El número de pacientes que llegan a un servicio de urgencias sigue un proceso de Poisson con tasa 1/4 por minuto. El 60% de los pacientes son hombres y el resto son mujeres.
 - (a) ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen dos o más mujeres a lo largo de una hora?

- (b) Si han llegado 10 mujeres en una hora, ¿cuál es el número esperado de pacientes que han pasado por el servicio de urgencias?
 - (c) Si han pasado 20 pacientes en una hora, ¿qué probabilidad hay de que hayan sido 10 hombres y 10 mujeres?
3. El número de quejas mensuales recibidas por las sucursales A y B de una compañía puede modelizarse mediante sendos procesos de Poisson con parámetros 6 y 8, respectivamente.
- (a) Calcula la probabilidad de que en un mes se produzcan más de 15 quejas entre las dos sucursales.
 - (b) Si en un mes se producen 4 quejas en la sucursal A, ¿qué probabilidad hay de que todas tengan lugar durante la segunda quincena?

6 Procesos de renovación

1. Una máquina atiende peticiones online, las cuales se producen de acuerdo con una tasa de 10 por hora. La máquina entra en modo de ahorro de energía cuando han pasado 3 minutos (0.05 horas) desde el comienzo de la última petición, y permanece en ese estado hasta la siguiente petición.
 - (a) Determina la fracción de tiempo que la máquina está en modo de ahorro de energía, a largo plazo.
 - (b) La máquina entre períodos de actividad A_n y de suspensión B_n . Determina $E(A_n)$.
2. Jaimito, Jorgito y Juanito están jugando a Clash Royale por turnos; cada uno de ellos juega partidas hasta que pierde, y en ese momento coge la máquina el siguiente. Supongamos que sus probabilidades de ganar una partida son 0.6, 0.75 y 0.8, respectivamente, y que los resultados de las partidas son independientes unos de otros. Determina la proporción de tiempo que cada uno de ellos está jugando, a largo plazo.
3. El tiempo de vida (en años) de ciertas componentes se modeliza mediante una distribución exponencial con parámetro 4. Cuando una componente se estropea, con probabilidad 0.75 se puede reparar, y el coste asociado a una reparación, en miles de euros, sigue una distribución uniforme en (1,4). Si

no es posible repararla, se produce un reemplazo, con un coste total asociado de 5.

- (a) Calcula la probabilidad de que una componente se estropee antes de un mes.
- (b) ¿Cuál es el coste medio asociado a este proceso, a largo plazo?
- (c) Examinamos el sistema en un momento elegido al azar. Determina el tiempo medio hasta que se estropea la componente activa en ese momento.

7 Cadenas de Markov a tiempo continuo

1. Cinco concursantes de Gran Hermano están encerrados en una casa; algunos están sanos y otros han sido infectados por un virus. Los enfermos se recuperan con una tasa $\mu = 2$, cada par de personas tiene contacto con tasa $\lambda = 1$ y la enfermedad se transmite siempre que se produce un contacto entre una persona sana y una infectada.
 - (a) Determina el modelo de Markov asociado a este problema.
 - (b) Supongamos que $\mu = 0$ (el virus es incurable). ¿Cuánto tiempo pasa entre que la primera persona se infecta hasta que todos lo están?
2. Una partícula transita entre los estados A, B y C de la siguiente manera: la permanencia en cada estado sigue una distribución exponencial con parámetro 4 en el caso de los estados A y B, y 5 en el caso de C. Por otro lado, desde el estado A transita a los estados B y C de manera aleatoria; desde B pasa a A con probabilidad 0.6 y a C con probabilidad 0.4; y desde C siempre transita al estado A. Determina el porcentaje de tiempo que la partícula está en cada estado a largo plazo.
3. Supongamos que en una población cada individuo produce un nacimiento con una tasa exponencial $\lambda = 2$ y muere de acuerdo con una tasa exponencial $\mu = 3$.
 - (a) Determina las tasas de permanencia y las probabilidades de transición para este problema.
 - (b) ¿Cuál es la distribución estacionaria?

8 Teoría de colas

1. En una tienda, el tiempo de atención a cada cliente sigue una distribución exponencial con media 4 minutos, mientras que las llegadas se producen según un proceso de Poisson con tasa 10 llegadas por hora. Determina:
 - (a) La probabilidad de que haya clientes a la espera de ser atendidos.
 - (b) El tiempo medio desde que llega un cliente hasta que se va de la tienda.
 - (c) La probabilidad de que un cliente esté en la tienda más de 10 minutos.
2. Un servidor consta de 4 nodos que atienden peticiones a razón de 50 por minuto. El tiempo medio de servicio de cada nodo es de 4 segundos por petición.
 - (a) Determina la probabilidad de que haya algún nodo libre cuando llega una petición.
 - (b) Un segundo servidor consta de un único mega-nodo, con un tiempo de servicio de 1 segundo por petición. Si las peticiones se producen con la misma tasa, ¿cuál de los dos servidores tiene menor tiempo medio de permanencia en el sistema?
3. Un supermercado dispone de 3 líneas de caja. Los clientes llegan al supermercado con una tasa de 50 por hora, y el tiempo de servicio es de 3 minutos por persona. El supermercado se plantea si le conviene aumentar el número de cajas para satisfacer mejor a los clientes. El coste que le supone abrir una nueva línea de caja es de 5 euros la hora, mientras que el coste horario de espera se ha estimado en 20 euros por cliente. ¿Qué debería hacer el supermercado?