

Procesos estocásticos

Sesión 11. Otros modelos

Enrique Miranda

Universidad of Oviedo

Máster Universitario en Análisis de Datos
para la Inteligencia de Negocios

Contenidos

1. El movimiento browniano.
2. Modelos markovianos de renovación.
3. Procesos regenerativos.
4. Modelos MCMC.

El movimiento browniano

El **movimiento browniano** es el movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido. Recibe su nombre en honor al escocés **Robert Brown**, biólogo y botánico que descubrió este fenómeno en 1827 y observó que pequeñas partículas de polen se desplazaban en movimientos aleatorios sin razón aparente.

También se denomina **proceso de Wiener**, en honor al matemático americano **Norbert Wiener**, que realizó numerosos trabajos sobre el tema.

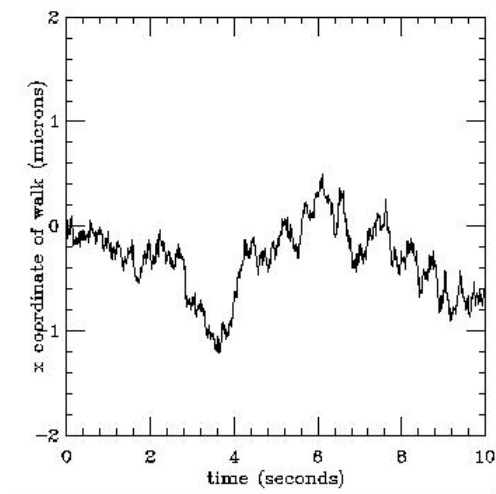
Definición

Un proceso estocástico $\{W_t\}_{t \geq 0}$ se dice **movimiento Browniano** cuando cumple las siguientes condiciones:

- ▶ $P(W_0 = 0) = 1$.
- ▶ Para cualquier conjunto de instantes de tiempo $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ se tiene que las variables $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ son independientes.
- ▶ Si $0 \leq s < t$, entonces $W_t - W_s \sim N(0, \sqrt{t - s})$.

Podemos interpretar W_t como el vector posición de una partícula respecto al eje en el instante $t \geq 0$.

Ejemplo



Aplicaciones

El movimiento browniano posee aplicaciones en los siguientes campos:

- ▶ Análisis de mercados (**Osborne; Black-Scholes**).
- ▶ Teoría de la decisión (**Romanow**).
- ▶ Modelos de estabilización de precios (**Smith**).
- ▶ Teoría de fractales (**Perrin**), con aplicaciones en análisis de imágenes médicas (**Chen-Fox**).

El movimiento browniano se verá con mucho más detalle en la asignatura **Cálculo Estocástico para las Finanzas y los Seguros**.

Modelos markovianos de renovación

Un **modelo markoviano de renovación** (MRP) es un proceso estocástico que generaliza a muchos de los modelos que hemos visto en sesiones anteriores. Consiste en una colección $\{X_n, T_n\}_{n \geq 1}$ de variables aleatorias tales que

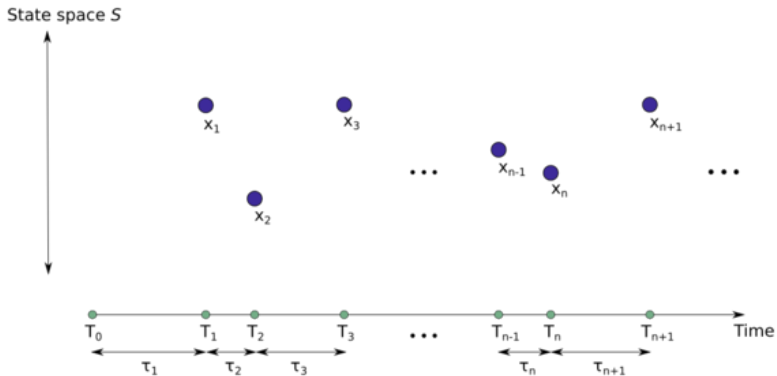
$$\begin{aligned} P(\tau_{n+1} \leq t, X_{n+1} = j | (X_0, T_0), (X_1, T_1), \dots, (X_n = i, T_n)) = \\ P(\tau_{n+1} \leq t, X_{n+1} = j | X_n = i) \quad \forall n \geq 1, t \geq 0, i, j \in S, \end{aligned}$$

siendo S el espacio de estados y $\tau_n = T_n - T_{n-1}$.

T_n representa el instante de la transición n -ésima y X_n el estado al que entramos.

Los MRP fueron desarrollados fundamentalmente por **Pyke**.

Ejemplo



Casos particulares

- ▶ El proceso a tiempo continuo $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ donde $Y_t = X_n$ para $t \in [T_n, T_{n+1})$ se denomina **cadena semi-markoviana**. NO es una CMTC, sino que se comporta así únicamente en los instantes de salto.
- ▶ Cuando los tiempos entre llegadas siguen una distribución exponencial, entonces $\{Y_t\}_{t \geq 0}$ sí es una CMTC.
- ▶ El proceso $\{X_n\}_{n \geq 0}$ es una cadena de Markov a tiempo discreto.
- ▶ Si las variables $\{\tau_n\}_n$ son independientes e idénticamente distribuidas y su distribución no depende del valor de X_n , obtenemos un proceso de renovación.

Aplicaciones en teoría de colas

Los MRP permiten modelizar como casos particulares los modelos de colas $M/G/1$ (es decir, con distribución arbitraria de servicio) (**Anderson**). En particular, permiten estudiar modelos más complejos, como:

- ▶ llegadas en masa (**Neuts**);
- ▶ tiempos de servicio dependientes de la cola (**Harris**).

También permiten modelizar colas de tipo $G/M/1$, y modelos en los que los tiempos de llegada cumplen la propiedad semi-markoviana (**Cinlar**).

Otras aplicaciones

- ▶ Fiabilidad de sistemas (Cinlar).
- ▶ Medicina (Weiss,Zelen).
- ▶ Seguros (Janssen).
- ▶ Movimientos de partículas (Cinlar).

Procesos regenerativos

Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ con espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\}$ se dice **proceso regenerativo** cuando existen una serie de momentos en los que el proceso se reinicia de acuerdo con ciertas probabilidades.

Matemáticamente, $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso regenerativo cuando existen tiempos $0 \leq T_0 < T_1 < T_2 < \dots$ tales que:

- ▶ El proceso $\{X_{T_k+t}\}_{t \geq 0}$ tiene la misma distribución que $\{X_{T_0+t}\}_{t \geq 0}$ y
- ▶ es independiente del proceso $\{X_t\}_{t \in [0, T_k]}$

para todo $k \geq 1$.

Es decir, el proceso se puede descomponer en ciclos i.i.d. Los procesos regenerativos fueron desarrollados por **Walter Smith**.

Casos particulares

Un proceso regenerativo con $T_0 > 0$ se dice **retrasado**, y si $T_0 = 0$ se dice **no retrasado**.

- ▶ Los procesos de renovación son un caso particular, con T_1 representando el instante de la primera renovación.
- ▶ Las cadenas de Markov **recurrentes** y los movimientos brownianos **reflejados** son también casos particulares de procesos regenerativos.

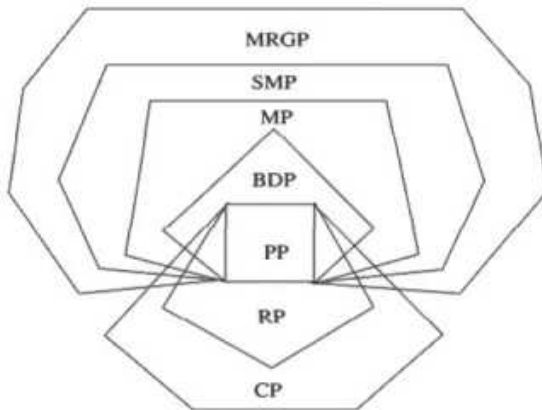
Estos procesos han sido estudiados por **Sigman** y **Wolff**, entre otros. Su principal ventaja es que poseen distribución estacionaria bajo condiciones bastante generales.

Aplicaciones

Los procesos regenerativos se han aplicado en los siguientes campos:

- ▶ Modelos de inventario (**Hurter, Kaminsky**).
- ▶ Fiabilidad de sistemas (**Birolini**).
- ▶ Teoría de colas, cuando los tiempos de llegada se ajustan a un proceso de renovación.
- ▶ Las **redes de Petri estocásticas** (**Natkin, Molloy**).

Relación entre los modelos



MRGP – Markov Regenerative Process

SMP – Semi – Markov Process

MP – Markov Process

BDP – Birth & Death Process

PP – Poisson Process

RP – Renewal Process

CP – Counting Process

Modelos MCMC

Las **Cadenas de Markov Montecarlo** (MCMC) son un método de estimación muy utilizado en estadística Bayesiana para realizar estimaciones con modelos complejos.

Permiten generar, de manera iterativa, observaciones de distribuciones multivariantes que difícilmente podrían simularse utilizando métodos directos.

La idea básica consiste en construir una cadena de Markov que sea fácil de simular y cuya distribución de equilibrio corresponda a la distribución final que nos interesa.

Dentro de los métodos MCMC, uno de los más utilizados por su sencillez es el llamado **muestreo de Gibbs** (Gibbs sampler).

El método de Montecarlo

Los **métodos de Monte Carlo** son una clase de algoritmos computacionales que se basan en el muestreo aleatorio para obtener sus resultados. Son útiles en situaciones en las que no es factible obtener una solución determinística, y se utilizan en muchas ocasiones como complemento de resultados teóricos.

El procedimiento básico es el siguiente:

1. Definimos el espacio de posibles valores.
2. Generamos puntos en ese espacio de acuerdo con cierta distribución de probabilidad.
3. Realizamos cierta operación en los puntos generados.
4. Agregamos los resultados.

Ejemplo

Veamos cómo usar un método de Montecarlo para estimar el valor de π . Para ello, teniendo en cuenta que el área del círculo es πr^2 , hacemos lo siguiente:

1. Generamos puntos al azar en el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$.
2. Miramos cuántos de esos puntos están dentro del círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1.
3. La proporción de dichos puntos debería ser la relación entre el área del círculo (π) y el área total (4).
4. Así, nuestra estimación de π será 4 veces dicha proporción.

Modelos MCMC

Una alternativa eficiente a los métodos numéricos son los métodos MCMC. Se basan en la combinación de dos técnicas:

1. Usamos cadenas de Markov para simular muestras de distribuciones de probabilidad multivariante, en las que resulta más sencillo trabajar con distribuciones de probabilidad condicionadas que con la conjunta.
2. Una vez obtenidas las muestras, las usamos para realizar estimaciones de acuerdo con métodos Montecarlo.

La distribución 'objetivo' se corresponde con la distribución estacionaria de la cadena de Markov.

Muestro de Gibbs

El problema principal es cómo diseñar una cadena de Markov que tenga la distribución estacionaria que nos interesa. Para ello, se usa el algoritmo [Metropolis-Hastings](#), que en su versión más sencilla se convierte en el [muestreo de Gibbs](#).

Es aplicable cuando:

1. $\pi(\theta_1, \dots, \theta_n | x)$ no tiene una expresión analítica sencilla.
2. Para todo $i = 1, \dots, n$, sí que existe una expresión sencilla de la distribución

$$\pi(\theta_i | \theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n, x) := \pi(\theta_i | \theta_{-i}, x),$$

donde denotamos $\theta_{-i} := (\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$.

Muestreo de Gibbs: esquema

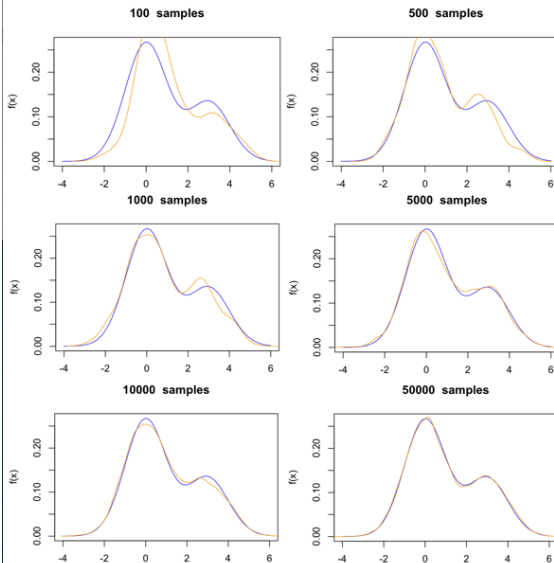
1. Comenzamos con un vector inicial $\theta^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_n^0)$.
2. Para obtener el vector $\theta^1 = (\theta_1^1, \dots, \theta_n^1)$:
 - ▶ Muestreamos θ_1^1 de $\pi(\theta_1 | \theta_2^0, \dots, \theta_n^0, x)$.
 - ▶ Muestreamos θ_2^1 de $\pi(\theta_2 | \theta_1^1, \theta_3^0, \dots, \theta_n^0, x)$.
 - ▶
 - ▶ Muestreamos θ_n^1 de $\pi(\theta_n | \theta_1^1, \dots, \theta_{n-1}^1, x)$.

De esta forma, una vez que tenemos N realizaciones, $\theta^1, \dots, \theta^N$, se puede demostrar que $\theta^k : k = 1, \dots, N$ forma una cadena de Markov cuyas probabilidades de transición son

$$p(\theta^{k+1} | \theta^k) = \prod_{i=1}^n \pi(\theta_i^{k+1} | \{\theta_j^{k+1}\}_{j < i}, \{\theta_j^k\}_{j > i}, x),$$

y la distribución estacionaria de esta cadena de Markov es $\pi(\theta | x)$.

Ejemplo de convergencia



Aplicaciones

Los modelos MCMC se han aplicado en los siguientes campos:

- ▶ Ingeniería (**Walgama, Thang, Dwight**).
- ▶ Física computacional.
- ▶ Biología computacional (**Drummond, Rambaut**).
- ▶ Criptografía (**Diaconis**).

En el campo de las finanzas, los modelos MCMC han sido desarrollados por **Johannes** y **Polson**, en un modelo relacionado también con el movimiento browniano antes mencionado.