

Procesos estocásticos

Sesión 9. Cadenas de Markov a tiempo continuo

Enrique Miranda

Universidad of Oviedo

Máster Universitario en Análisis de Datos
para la Inteligencia de Negocios

Contenidos

1. Cadenas de Markov a tiempo continuo.
2. Tasas de transición y distribución estacionaria.
3. Cadenas irreducibles, homogéneas y reversibles.
4. Procesos de nacimiento y muerte.

Definición

Decimos que $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es una **cadena de Markov a tiempo continuo** (CMTCC) si para cualesquiera tiempos $0 \leq s_0 < s_1 < \dots < s_n < s$ y estados $i_0, \dots, i_n, i, j$, se cumple

$$P(X_{t+s} = j | X_s = i, X_{s_n} = i_n, \dots, X_{s_0} = i_0) = P(X_t = j | X_0 = i).$$

Ejemplo: Sea $\{N_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Poisson con parámetro λ y sea $\{Y_n\}_n$ una cadena de Markov a tiempo discreto. Entonces, el proceso $\{Y_{N_t}\}_{t \geq 0}$ es una cadena de Markov a tiempo continuo.

Ejemplo: el proceso de Yule

Representa una población cuyos individuos generan nuevos miembros pero no pueden morir. Se utiliza en modelos como el crecimiento de bacterias, la fisión de neutrones, y otros procesos de replicación.

Cada individuo se comporta de forma independiente y genera un nuevo individuo en tiempo exponencial con tasa λ .

Si X_t es el número de individuos en el instante t , $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es una cadena de Markov en tiempo continuo denominada **proceso de Yule**.

Relación con la distribución exponencial

Sea $\{X_t\}_{t \geq 0}$ una CMTC. Supongamos que está en el estado i , y sea τ_i la variable ‘tiempo hasta la próxima transición’. Por la propiedad de Markov, se tiene que

$$P(\tau_i > t + s | \tau_i > s) = P(\tau_i > t),$$

luego τ_i cumple la propiedad de **falta de memoria**, lo que implica que sigue una distribución exponencial.

Así, una CMTC está determinada por:

- ▶ Las tasas ν_i del tiempo en el estado i antes de transitar a otro estado;
- ▶ las probabilidades de pasar de un estado a otro.

Probabilidades de transición

En este caso, para todo tiempo t tenemos una probabilidad de transición

$$P_t(i, j) = P(X_t = j | X_0 = i).$$

En general, es difícil o imposible determinar la probabilidad de transición, aunque sí se puede en casos sencillos.

Ejemplo: En el caso de un proceso de Poisson con parámetro λ , la matriz de transición viene dada por

$$p_t(i, j) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}.$$

CMTC irreducibles y homogéneas

Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \geq 0}$ se dice **irreducible** cuando para todo par de estados x, y es posible pasar de x a y en una cantidad finita de saltos.

En ocasiones, se llaman cadenas de Markov en tiempo continuo a los procesos $\{X_t\}_{t \geq 0}$ para los que

$$P(X_{t+s} = j | X_s = i, X_{s_n} = i_n, \dots, X_{s_0} = i_0) = P(X_{t+s} = j | X_s = i),$$

y se les llama **homogéneas** cuando para cada $s \leq t$ y cada par de estados i, j , se cumple

$$P(X_t = j | X_s = i) = P(X_{t-s} = j | X_0 = i).$$

Este es el caso que consideramos nosotros.

CMTC homogéneas

Dado un proceso a tiempo continuo homogéneo $\{X_t\}_{t \geq 0}$, se tiene que es una Cadena de Markov en tiempo continuo si:

- ▶ Cuando entra en un estado i , el tiempo que permanece en él se distribuye según una exponencial de parámetro v_i .
- ▶ Cuando abandona el estado i entra en el estado j con probabilidad de transición $p_{i,j}$.

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

En este caso se cumple algo análogo al caso discreto:

$$\sum_k p_s(i, k) p_t(k, j) = p_{s+t}(i, j).$$

La idea es que para pasar del estado i al estado j en un tiempo $s + t$, debemos de pasar por algún estado intermedio k , y la propiedad Markoviana garantiza que los tránsitos de i a k y de k a j son independientes.

Tasas de salto

En el caso de cadenas de Markov en tiempo continuo, podemos calcular las probabilidades de transición a través de las llamadas **tasas de salto**. Se define la tasa de salto de i a j (donde $j \neq i$) como

$$q(i, j) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_h(i, j)}{h},$$

siempre que el límite exista.

En general el límite anterior no tiene por qué existir, y por lo tanto no siempre se pueden definir las tasas de transición; no obstante, sí existen en la mayoría de los casos de interés. En esos casos, se cumple $q(i, j) = \nu_i p(i, j)$.

A partir de las tasas de salto, es posible construir una cadena de Markov en tiempo continuo que las induzca. También es posible deducir las probabilidades de transición.

Distribuciones estacionarias

En el caso discreto, una distribución estacionaria π era una solución de la ecuación $\pi p = \pi$, donde p era la matriz de transición de la cadena de Markov. En el caso continuo, π será una **distribución estacionaria** cuando

$$\pi p_t = \pi \text{ para todo } t > 0.$$

Al igual que en el caso discreto, π hace el proceso estacionario: si la distribución inicial de X_0 fuera π , también lo sería la de X_t para todo t .

Caracterización de distribuciones estacionarias

Definimos la **matriz de tasas de transición** como

$$Q(i, j) = \begin{cases} q(i, j) & \text{si } j \neq i \\ -\lambda_i & \text{si } j = i, \end{cases}$$

siendo $\lambda_i = \sum_{j \neq i} q(i, j)$ la tasa total de saltos fuera de i .

► π es una distribución estacionaria $\Leftrightarrow \pi Q = 0$.

Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones de equilibrio** (global). La idea es que para una distribución estacionaria el flujo de llegada coincidirá con el flujo de salida.

Propiedades de la distribución estacionaria

La distribución estacionaria puede no existir, aunque existe en condiciones algo más generales que con las cadenas de Markov en tiempo discreto.

Si la cadena de Markov es irreducible y tiene distribución estacionaria π , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_t(i, j) = \pi(j).$$

Deducimos de aquí que si existe una distribución estacionaria, entonces es única.

En el caso del proceso de Poisson y del proceso de Yule, las ecuaciones de equilibrio no tienen solución.

Ecuaciones de equilibrio locales

Una forma de calcular la distribución estacionaria es a través de las ecuaciones de equilibrio **locales**,

$$\pi_i q_{i,j} = \pi_j q_{j,i} \quad \forall i \neq j.$$

- ▶ Estas ecuaciones expresan un equilibrio de flujo entre todo par de estados.
- ▶ Si π es una solución de las ecuaciones de equilibrio locales, entonces es la distribución estacionaria de la cadena de Markov.
- ▶ Sin embargo, existen cadenas de Markov cuya distribución estacionaria no satisface estas ecuaciones.

Cadenas de Markov reversibles

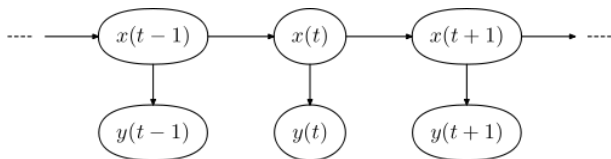
Se dice que una CMTC estacionaria $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es **reversible** (en el tiempo) si y sólo si existe una distribución estacionaria π que satisface las ecuaciones de equilibrio locales

$$\pi_i q_{i,j} = \pi_j q_{j,i}.$$

La idea es que la tasa con la que el sistema pasa directamente del estado i al estado j coincide con la tasa con la que pasa directamente del estado j al estado i .

Los modelos de Markov ocultos (HMM)

Una generalización de los modelos de Markov son los llamados modelos de Markov ocultos ([Hidden Markov Models](#)). Consisten en una cadena de Markov en la que, en lugar de observar el estado de las variables X_t , se observa el estado de variables [latentes](#), a partir de las cuales se pueden realizar estimaciones de las observaciones.



Son un ejemplo de [redes Bayesianas dinámicas](#), y tienen aplicación en reconocimiento de patrones temporal, criptoanálisis, series temporales, etc. Se pueden formular tanto a tiempo discreto como a tiempo continuo.

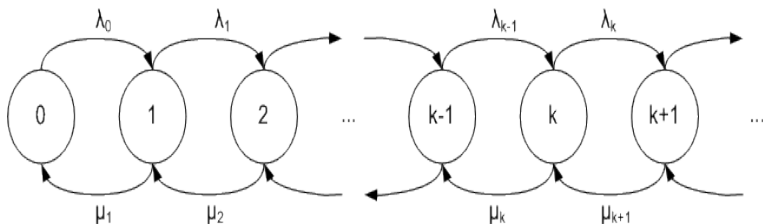
Procesos de nacimiento y muerte

Los procesos de nacimiento y muerte representan sistemas cuyo estado en cada instante representa el número de individuos en el mismo. Si éste es n , se producen llegadas con tasa exponencial λ_n , y salidas con tasa exponencial μ_n , de forma independiente.

Un **proceso de nacimiento y muerte** es una CMTC con espacio de estados $\{0, 1, 2, \dots\}$, tasas de permanencia $v_0 = \lambda_0$, $v_i = \lambda_i + \mu_i$, $i > 0$, y probabilidades de transición

$$p_{i,i+1} = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}, \quad p_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}, \quad p_{01} = 1$$
$$p_{i,j} = 0 \text{ para cualesquiera otros } i, j.$$

Representación gráfica



Los procesos de nacimiento y muerte se enmarcan dentro de la **teoría de colas**.

Ejemplos

- ▶ Un proceso de Poisson es un proceso de nacimiento y muerte con tasas $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = 0$ para todo n .
- ▶ Un proceso de Yule es un proceso de nacimiento y muerte con tasas $\lambda_n = n\lambda$, $\mu_n = 0$ para todo n .

En general, un proceso se dice de **nacimiento puro** cuando $\mu_n = 0$ para todo $n \geq 1$.

La idea se puede generalizar a los procesos de nacimiento y muerte **a tiempo discreto**. Veremos un ejemplo en prácticas.

Ecuaciones de equilibrio

En el caso de un proceso de nacimiento y muerte estacionario, las ecuaciones de equilibrio son

$$\begin{aligned}(\lambda_n + \mu_n)\pi_n &= \lambda_{n-1}\pi_{n-1} + \mu_{n+1}\pi_{n+1} \quad \forall n \geq 1 \\ \lambda_0\pi_0 &= \mu_1\pi_1.\end{aligned}$$

La primera ecuación iguala la probabilidad de salir del estado n cuando estamos en él con la de llegar a ese estado cuando no estamos en él; la segunda se corresponde con el caso particular de $n = 0$, en cuyo caso sólo podemos salir con un nacimiento y llegar con una muerte.

Tasas de salto y distribución estacionaria

Las tasas de salto son $q_{01} = \lambda_0$, $q_{i,i+1} = \lambda_i$, $q_{i,i-1} = \mu_i$ y $q_{i,j} = 0$ para cualquier otro par i, j .

La distribución estacionaria es

$$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1 \left(1 + \sum_n \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1}\right)},$$

y existe **si y sólo si** $\sum_n \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1} < \infty$.

Si T_i denota el tiempo que tarda el sistema en pasar del estado i al estado $i + 1$, se cumple

$$E(T_i) = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i} E(T_{i-1}).$$