

Procesos estocásticos

Sesión 8. Teoría de la renovación

Enrique Miranda

Universidad of Oviedo

Máster Universitario en Análisis de Datos
para la Inteligencia de Negocios

Contenidos

1. Procesos de renovación.
2. Procesos con recompensa.
3. Procesos alternantes.
4. Tiempos de vida y vida residual.

Introducción

En el caso de los procesos de Poisson, los tiempos entre llegadas consecutivas son variables independientes con distribución exponencial.

Los **procesos de renovación** son una generalización de este modelo en el que los tiempos entre llegadas, si bien independientes, no siguen necesariamente una distribución exponencial.

Ejemplos

Si el tiempo de vida de una máquina sigue una distribución X_i y el de reparación una distribución Y_i , el tiempo total del ciclo i -ésimo sería $X_i + Y_i$. En el proceso de renovación se asume que las variables $X_n + Y_n$ son independientes e idénticamente distribuidas, pero no necesariamente exponenciales.

Análogamente, las distancias entre los coches en el mismo carril de una autopista, y el tiempo entre el paso de dos coches consecutivos por el mismo punto, se suele modelizar a través de la teoría de la renovación.

Notación

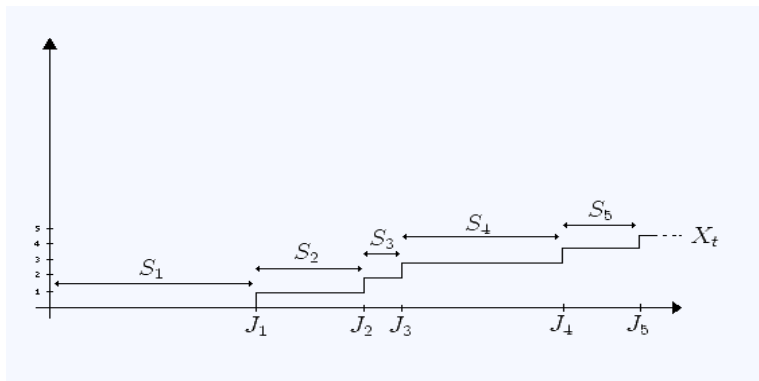
Denotemos t_i el tiempo de duración del i -ésimo proceso, $T_n = t_1 + \cdots + t_n$ el momento en el que se produce la n -ésima renovación, y N_t el número de renovaciones que se han producido en el momento t . Entonces, $\{N_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso a tiempo continuo, y se cumple

$$\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\},$$

de donde se deduce que el número esperado de renovaciones hasta el tiempo t es

$$E(N_t) = \sum_n P(T_n \leq t).$$

Ejemplo



En esta figura, S_t representa el tiempo de funcionamiento de la componente t -ésima y J_t el momento en el que se produce la j -ésima renovación.

Historia

El origen de la teoría de la renovación está en los estudios demográficos para las compañías de seguros, con los que se quería estimar los tiempos de vida de los asegurados (**R.L. Ellis**), si bien hay trabajos anteriores en este sentido de **Newton**.

La teoría matemática tal y como la conocemos fue desarrollada por **Feller** y **Smith**, fundamentalmente.

Tiempo medio de renovación

En el caso de los procesos de Poisson, $T_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ y se obtiene $E(N_t) = \lambda t$. Para procesos de renovación más generales, el cálculo de $E(N_t)$ es complejo.

Se tienen las siguientes cotas:

- ▶ $E(N_t) + 1 \geq \frac{t}{\mu},$
- ▶ $E(N_t + 1) \leq \frac{t+M}{\mu},$

siendo $\mu = E(t_i)$ y donde el segundo apartado es válido cuando t_i está acotado por arriba por M .

Comportamiento asintótico

Si bien el cálculo de $E(N_t)$ es complejo, existen resultados acerca del comportamiento de N_t cuando t tiende a infinito. Con probabilidad 1, se cumple:

$$\lim_t \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mu},$$

y como consecuencia $\lim_t \frac{E(N_t)}{t} = \frac{1}{\mu}$.

Procesos de renovación con recompensa

Supongamos ahora que el el momento de la n -ésima renovación recibimos una recompensa r_n , y que las v.a. bidimensionales $\{(r_n, t_n)\}_n$ son independientes e idénticamente distribuidas. Consideramos el proceso a tiempo continuo

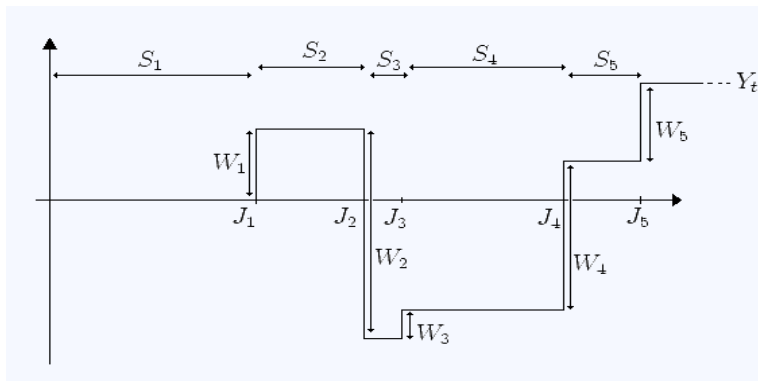
$$R_t = \sum_{i=1}^{N_t} r_i$$

de las **recompensas** recibidas hasta el tiempo t . Se cumple entonces que, con probabilidad 1,

$$\lim_t \frac{R_t}{t} = \frac{E(r_n)}{E(t_n)}.$$

Esta idea generaliza los procesos de Poisson compuestos.

Ejemplo



Ejemplo

La vida de una máquina sigue distribución exponencial con media 4 años. Una máquina se cambia en cuanto se estropea o al llegar a 5 años. El precio de una máquina nueva es de 10000 euros, y los costes asociados a una avería antes de 5 años son de 1500 euros. El coste medio por año sería entonces

$$\begin{aligned}\frac{E(r_n)}{E(t_n)} &= \frac{10 + 1.5 \int_0^5 0.25e^{-0.25t} dt}{\int_0^5 t \cdot 0.25e^{-0.25t} dt + \int_5^\infty 5 \cdot 0.25e^{-0.25t} dt} \\ &= \frac{11.070}{2.584} = 3.879,\end{aligned}$$

es decir, 3879 euros por año.

Procesos de renovación alternantes

Otra generalización son los **procesos de renovación alternantes**, en los que cada renovación pasa por dos estados:

- ▶ El tiempo en el estado 1 es una variable aleatoria s_n , y $\{s_n\}_n$ son i.i.d. con distribución X ;
- ▶ El tiempo en el estado 2 es una variable aleatoria t_n , y $\{t_n\}_n$ son i.i.d. con distribución Y .

Se deduce de los resultados anteriores que el tiempo que el sistema pasa en el estado 1 converge a

$$\frac{E(X)}{E(X) + E(Y)}.$$

Ejemplo

El tiempo de vida de una sistema sigue una distribución X . El controlador realiza controles de acuerdo con un proceso de Poisson con tasa λ , y reemplaza el sistema cuando no está funcionando. Queremos determinar:

- (a) La tasa con que se reemplaza el sistema.
- (b) El porcentaje de tiempo que el sistema está funcionando.
- (c) La probabilidad de que en un control dado el sistema no esté funcionando.

Ejemplo (continuación)

Podemos ver esto como un proceso de renovación alternante, donde el estado 1 es 'sistema funcionando' y el estado 2 'espera hasta el próximo control'.

- (a) Por la propiedad de falta de memoria de la exponencial, el tiempo de vida medio del ciclo es $E(X) + \frac{1}{\lambda}$, y si N_t es el número de reemplazamientos hasta el instante t , se cumple $\lim_t \frac{N_t}{t} = \frac{1}{E(X) + \frac{1}{\lambda}}$.
- (b) Sería $\frac{E(X)}{E(X) + \frac{1}{\lambda}}$.
- (c) Si V_t es el número de visitas hasta el instante t , se cumple que $\lim_t \frac{V_t}{t} = \lambda$, y el porcentaje de visitas en las que el sistema es reemplazado sería

$$\frac{N_t}{V_t} \rightarrow \frac{1/(E(X) + 1/\lambda)}{\lambda} = \frac{1/\lambda}{E(X) + 1/\lambda}.$$

Edad y vida residual

Consideremos un proceso de renovación con $T_n = t_1 + \cdots + t_n$, $N_t = \max\{n : T_n \leq t\}$. Definimos:

- ▶ $A_t := t - T_{N_t}$: la **edad** del sistema en uso en el instante t (el tiempo desde la última renovación).
- ▶ $Z_t := T_{N_{t+1}} - t$: el tiempo de **vida residual** del sistema en uso en el instante t (el tiempo hasta la próxima renovación).

Estamos interesados en el comportamiento límite de los procesos $\{A_t\}_{t \geq 0}$ y $\{Z_t\}_{t \geq 0}$.

Límite de la esperanza de la vida residual

Teniendo en cuenta que $Z_s = T_i - s$ cuando $s \in (T_{i-1}, T_i)$, se obtiene que $\int_{T_{i-1}}^{T_i} Z_s ds = \frac{t_i^2}{2}$, de donde

$$\int_0^t Z_s ds \approx \sum_{i=1}^{N_t} \frac{t_i^2}{2}.$$

El segundo miembro es un proceso de renovación con recompensa $r_i = \frac{t_i^2}{2}$, de donde se deduce que

$$\lim_t \frac{1}{t} \int_0^t Z_s ds = \frac{E(t_i^2)/2}{E(t_i)}.$$

Ejemplos

Supongamos que los tiempos de vida siguen una distribución uniforme en $(0, b)$. El resultado anterior implica que el tiempo de vida residual converge a

$$\frac{b^2/6}{b/2} = \frac{b}{3}.$$

Por otro lado, si siguen una exponencial con parámetro λ , el tiempo de vida residual converge a

$$\frac{1/\lambda^2}{1/\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

como era de esperar debido a la propiedad de falta de memoria de la exponencial.

Límite de la esperanza de la edad

Mediante un razonamiento análogo, se obtiene que

$$\int_0^t A_s ds \approx \sum_{i=1}^{N_t} \frac{t_i^2}{2}.$$

El segundo miembro es un proceso de renovación con recompensa $r_i = \frac{t_i^2}{2}$, de donde se deduce que

$$\lim_t \frac{1}{t} \int_0^t Z_s ds = \frac{E(t_i^2)/2}{E(t_i)}.$$

La paradoja de la inspección

Si definimos $L_t = A_t + Z_t$ el tiempo de vida del ítem en uso en el instante t , obtendríamos que la media de vida de los ítems usados hasta el instante t sería

$$\frac{1}{t} \int_0^t L_s ds \rightarrow \frac{E(t_i^2)}{E(t_i)}.$$

Pero esto no parece tener sentido: el límite es mayor que $E(t_i)$, que sería la media de los tiempos de vida de los primeros n ítems utilizados, y esto para cualquier n que consideremos.

En realidad la paradoja no es tal, porque no todos los tiempos de vida influyen lo mismo en el tiempo total.

Si por ejemplo el tiempo de vida es una v.a. discreta con valores $l_1 < l_2 < \dots < l_k$ y probabilidades respectivas $p_1, \dots, p_k$, entonces, usando un proceso de renovación con recompensa 1 cuando $t_i = l_j$ y 0 en otro caso, vemos que el número de ítems con tiempo de vida l_j hasta el instante t es aproximadamente $p_j N_t$, y el tiempo de vida que representan en total sería $l_j p_j N_t$. Así, la proporción del tiempo que estamos con tiempos de vida l_j sería

$$\frac{l_j p_j N_t}{t} \rightarrow \frac{l_j p_j}{E(t_i)},$$

y la esperanza de esta distribución sería entonces

$$\sum_j l_j \frac{l_j p_j}{E(t_i)} = \frac{E(t_i^2)}{E(t_i)}.$$