

Procesos estocásticos

Sesión 6. Martingalas

Enrique Miranda

Universidad of Oviedo

Máster Universitario en Análisis de Datos
para la Inteligencia de Negocios



An old man, who had spent his life looking for a winning formula (martingale), spent the last days of his life putting it into practice, and his last pennies to see it fail. The martingale is as elusive as the soul.

A. Dumas padre, Mille et un fantômes, 1849.

Contenidos

1. Esperanza condicionada.
2. Definición y ejemplos.
3. Submartingalas y supermartingalas.
4. Tiempos de parada.
5. Ejemplos de aplicaciones.

Esperanza condicionada

Dado un subconjunto medible A de Ω , definimos su indicador $I_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ como la función que toma el valor 1 en A y 0 en A^c .

Definimos la **integral de X sobre A** como $E(X; A) = E(XI_A)$, y la esperanza condicionada de X dado A como $E(X|A) = E(X; A)/P(A)$.

La esperanza condicionada es la esperanza con respecto a la distribución de probabilidad condicionada, dada por

$$P(\cdot|A) = P(\cdot \cap A)/P(A).$$

Un poco de historia

- ▶ El origen de las martingalas se produjo en el siglo XVIII en Francia, en relación con apuestas y juegos de azar. Se intentó demostrar la inexistencia de una estrategia ganadora para un juego justo, en la regla del doblaje que luego veremos.
- ▶ Los principales resultados fueron establecidos por **Lévy**, **Ville** y **Doob**.



Martingalas: definición

Sea $\{X_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias. Constituyen una **martingala** cuando

1. $E(|X_n|) < \infty$ para todo n .
2. $E(X_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = x_n$ para todo $x_0, \dots, x_n$.

La segunda condición es equivalente a

$$E(X_{n+1} - X_n | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = 0$$

para todo $x_0, \dots, x_n$.

Supermartingalas y submartingalas

Decimos que una sucesión $\{X_n\}_{n \geq 0}$ de v.a. es una **supermartingala** cuando

$$E(X_{n+1} - X_n | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \leq 0$$

para todo $x_0, \dots, x_n$, y que es una **submartingala** cuando

$$E(X_{n+1} - X_n | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \geq 0$$

para todo $x_0, \dots, x_n$.

Si interpretamos X_n como nuestras ganancias en un instante n , en una martingala el juego sería justo; en una supermartingala el juego sería desfavorable (perdemos dinero según pasa el tiempo), y en una submartingala el juego sería favorable (esperamos ganar dinero según pasa el tiempo).

Ejemplo: caminos aleatorios de media 0

Sea $(\xi_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tal que $E(\xi_i) = 0$ para todo i . Definimos

$$X_n := X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n.$$

Entonces, $\{X_n\}_n$ constituye una martingala.

Por otro lado, si $E(\xi_i) \leq 0$ para todo i , $\{X_n\}_{n \geq 0}$ constituye una supermartingala, y si $E(\xi_i) \geq 0$ para todo i , $\{X_n\}_{n \geq 0}$ es una submartingala.

Ejemplo: procesos de ramificación

Consideremos una población en la que los individuos de la n -ésima generación tienen distribuciones independientes e idénticamente distribuidas ξ_n para el número de descendientes.

Sea $X_n :=$ 'número de individuos en la generación n ' y sea $\mu = E(\xi_n)$. Entonces,

$$E(X_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mu x_n,$$

luego $\{X_n\}_n$ es una supermartingala si $\mu < 1$, una martingala si $\mu = 1$ y una submartingala si $\mu > 1$.

Por otro lado, si definimos $M_n = \frac{X_n}{\mu^n}$, se cumple

$$E(M_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \frac{X_n}{\mu^n},$$

y por lo tanto $\{M_n\}_n$ es una martingala.

Ejemplo: precios de mercado

Sean $\zeta_i \geq 0$ variables independientes con $E(\zeta_i) < \infty$, y sea

$$X_n = X_0 \cdot \zeta_1 \cdot \dots \cdot \zeta_n.$$

- *Interpretación:* $\zeta_n - 1$ puede verse como la fluctuación en el valor de un producto en un período de tiempo fijado.

Se cumple

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) &= x_n E(\zeta_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \\ &= x_n E(\zeta_{n+1}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{X_n\}_n$ es una submartingala si $E(\zeta_i) > 1$, una martingala si $E(\zeta_i) = 1$ y una supermartingala si $E(\zeta_i) < 1$.

Ejemplo: la urna de Polya

Consideremos una urna con bolas rojas y verdes. En el instante $t = 0$ hay una bola de cada color. En el instante n extraemos una bola al azar. La devolvemos a la urna y añadimos otra de su color.

Sea X_n la proporción de bolas rojas en el instante n . Se cumple

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) \\ = x_n \cdot \frac{(n+2)x_n + 1}{n+3} + (1 - x_n) \cdot \frac{(n+2)x_n}{n+3} = x_n. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\{X_n\}_n$ constituye una martingala.

Propiedades (I): esperanza

A continuación formalizamos la interpretación de martingalas en función de juegos favorables y desfavorables:

- ▶ Si $\{X_n\}_n$ es una supermartingala, entonces $E(X_m) \geq E(X_n)$ para todo $0 \leq m < n$.
- ▶ Si $\{X_n\}_n$ es una submartingala, entonces $E(X_m) \leq E(X_n)$ para todo $0 \leq m < n$.
- ▶ Si $\{X_n\}_n$ es una martingala y $0 \leq m < n$ entonces $E(X_m) = E(X_n)$.

Propiedades (II): transformaciones

- ▶ Sea $\{X_n\}_n$ una martingala y sea ψ una función convexa. Entonces, $\{\psi(X_n)\}_n$ es una martingala.
- ▶ Sea $\{X_n\}_n$ una submartingala y sea ψ una función convexa no decreciente. Entonces, $\{\psi(X_n)\}_n$ es también una submartingala.

Martingalas respecto a una sucesión

Sea $\{X_n\}_n$ una cadena de Markov con matriz de transición p y sea $h(x, n)$ una función del estado x y el tiempo n tal que

$$h(x, n) = \sum_y p(x, y)h(y, n+1).$$

Dado $M_n = h(X_n, n)$, se cumple que $(M_n)_n$ es una martingala.

Decimos que $\{M_n\}_{n \geq 0}$ es una **martingala con respecto a $\{X_n\}_{n \geq 0}$** cuando $E(|M_n|) < \infty$ para todo n y

$$E(M_{n+1} - M_n | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = 0$$

para todo $x_0, \dots, x_n$.

Martingala de varianzas y el problema de la ruina

1. Sea $\{\xi_n\}_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes con $E(\xi_i) = 0$ y $E(\xi_i^2) = \sigma_i^2$. Definimos $S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, donde S_0 es una constante, y sea

$$v_n = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

la varianza de S_n . Entonces, $\{M_n\}_n := \{S_n^2 - v_n\}_n$ es una martingala respecto a S_n .

2. Sean $\{\xi_n\}_n$ variables aleatorias independientes con

$$P(\xi_i = 1) = p, \quad P(\xi_i = -1) = q = (1 - p).$$

Sea $S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $g(x) = ((1 - p)/p)^x$. Entonces, $\{M_n\}_n = \{g(S_n)\}_n$ constituye una martingala respecto a S_n .

Ejemplo: caminos aleatorios hacia atrás

Sean $\{\xi_n\}_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media finita, y sea $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Fijamos n , y definimos $M_m = S_{n-m}/(n-m)$, $0 \leq m < n$, es decir,

$$(M_0, \dots, M_{n-1}) = \frac{S_n}{n}, \frac{S_{n-1}}{n-1}, \dots, \frac{S_1}{1}.$$

Entonces, $\{M_0, \dots, M_{n-1}\}$ constituye una martingala (con respecto a sí misma).

La estrategia del doblaje

Consideremos un juego en el que ganamos o perdemos 1 euro en cada jugada. Si ganamos apostamos 1 euro en la próxima jugada, y si perdemos apostamos el doble de la jugada anterior.

- ▶ Cada vez que ganamos nuestra ganancia neta es de 1 euro desde la anterior ganancia.
- ▶ Sin embargo, si aplicamos este sistema a una supermartingala hasta un tiempo n y denotamos por W_n nuestras ganancias netas en ese momento, se cumple $E(W_n) \leq 0$.

Tiempos de parada

Sea $\{Y_n\}_n$ una supermartingala con respecto a $\{X_n\}_n$, y sea H_n una función de $(X_0, \dots, X_n)$ que cumple $0 \leq H_n \leq c_n$. Entonces,

$$W_n = W_0 + \sum_{m=1}^n H_m(Y_m - Y_{m-1})$$

es una supermartingala.

La interpretación de esto es que si un juego es desfavorable, seguirá siéndolo independientemente de cómo apostemos en cada momento.

Decimos que T es un **tiempo de parada** respecto a X_n cuando la ocurrencia (o no) del suceso “paramos en el instante n ” ($T=n$) se puede determinar a partir de los valores de $X_0, \dots, X_n$.

Propiedades

Denotemos $T \wedge n$ el mínimo de T y n .

Si $\{Y_n\}_n$ es una supermartingala (resp., submartingala, martingala) con respecto a $\{X_n\}_n$ y T es un tiempo de parada con respecto a $\{X_n\}_n$, entonces el proceso (truncado) $Y_{T \wedge n}$ es una supermartingala (resp., submartingala, martingala) con respecto a X_n .

Teorema de parada para martingalas acotadas

Sea $\{M_n\}_n$ una martingala con respecto a $\{X_n\}_n$, y sea T un tiempo de parada con respecto a $\{X_n\}_n$, con $P(T < \infty) = 1$. Si existe una constante K de manera que $|M_{T \wedge n}| \leq K$ para todo n , entonces

$$E(M_T) = E(M_0).$$

La idea bajo la condición $|M_{T \wedge n}| \leq K$ para algún K es que la cantidad de dinero disponible es limitada. En caso contrario, podrían darse situaciones en las que aplicando un criterio de parada tengamos siempre una ganancia.

Ejemplo: camino aleatorio simple

Sea $S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, donde $\{\xi_n\}_n$ son independientes e idénticamente distribuidas con $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = 1/2$.

Ya hemos visto que $\{S_n\}_n$ es una martingala. Sea

$$T = \min\{n : S_n \notin (a, b)\}.$$

- ▶ T es un tiempo de parada.
- ▶ $P(T < \infty) = 1$.
- ▶ Si $S_0 = x$, se cumple $x = a + (b - a)P(S_T = b)$.
- ▶ Si definimos $V_y = \min\{n \geq 0 : S_n = y\}$, se cumple

$$P_x(V_b < V_a) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Ejemplo: la ruina del jugador

Sea $S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, donde $\{\xi_n\}_n$ son i.i.d. con $P(\xi_i = 1) = p$ y $P(\xi_i = -1) = q := 1 - p$. Ya hemos visto que $g(S_n)_n$ es una martingala para $g(x) = (q/p)^x$. Sea $T = \min\{n : S_n \notin (a, b)\}$.

- ▶ T es un tiempo de parada.
- ▶ $P(T < \infty) = 1$.
- ▶ Si $S_0 = x$, se cumple $(q/p)^x = (q/p)^a + ((q/p)^b - (q/p)^a)P(S_T = b)$.
- ▶ Si definimos $V_y = \min\{n \geq 0 : S_n = y\}$, se cumple

$$P_x(V_b < V_a) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^a}{(q/p)^b - (q/p)^a}.$$

Ecuación de Wald

Consideremos ahora un camino aleatorio

$S_n = S_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, donde $\{\xi_n\}_n$ son variables i.i.d.

Supongamos que $\mu = E(\xi_i) < \infty$. Entonces $M_n = S_n - n\mu$ es una martingala respecto a S_n .

- ▶ Si T es un tiempo de parada con $E(T) < \infty$, entonces $E(S_T - S_0) = \mu E(T)$.

Teniendo esto en cuenta, si consideramos un juego con ganancia 1 con probabilidad p y -1 con probabilidad $1 - p > p$, y comenzamos con x euros, el tiempo medio en perderlo todo ($E_x V_0$) sería $\frac{x}{1-2p}$.

Duración de juegos equilibrados

Consideremos un camino aleatorio simple y simétrico $\{S_n\}_n$ con $S_0 = 0$ y sea $\tau = \min\{n : S_n \notin (a, b)\}$, con $a < 0 < b$.

Podemos interpretar esto como que un jugador dispone de a euros y decide jugar hasta arruinarse o llegar a ganar b euros.

Se cumple $E_0(\tau) = -ab$.

Ejemplo: elecciones

Supongamos que en unas elecciones Alberto gana a María por a votos a b . Entonces, la probabilidad de que Alberto siempre vaya por delante en el recuento es de $(a - b)/n$.

Para comprobarlo, definimos $\{\xi_n\}_n$ independientes e idénticamente distribuidas con $P(\xi_n = 2) = \frac{1}{2} = P(\xi_n = 0)$. Estamos interesados entonces en el suceso $G = \{S_j < j \forall j\}$, suponiendo que $S_n = 2b$.

Consideramos la martingala $M_m = S_{n-m}/(n - m)$, $0 \leq m < n$, $M_0 = 2b/n < 1$. Sea $T = \min\{m : M_m = 1 \text{ or } m = n - 1\}$. Entonces, $M_T = 1$ en G^c y $M_T = 0$ en G . Deducimos que

$$\frac{2b}{n} = E(M_0) = E(M_T) = P(G^c),$$

y por lo tanto $P(G) = \frac{a-b}{a+b}$.