

Procesos estocásticos

Sesión 5. Cadenas de Markov. Comportamiento asintótico

Enrique Miranda

Universidad of Oviedo

Máster Universitario en Análisis de Datos
para la Inteligencia de Negocios

Contenidos

1. Periodicidad.
2. Distribuciones estacionarias.
3. Teoremas de existencia e unicidad.
4. Condición de equilibrio minucioso.

Cadenas de Markov

Recordemos que un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n\}_n$ es una **cadena de Markov** cuando la distribución de X_{n+1} condicionada a $(X_n, \dots, X_0)$ únicamente depende de X_n .

Es decir, el futuro sólo depende del pasado a través del presente.

En el caso de cadenas de Markov **homogéneas**, para las que la distribución de $X_{n+1}|X_n$ coincide con la de $X_1|X_0$ para todo n , la información probabilística viene determinada por la **matriz de transición**, que nos dice cuál es la probabilidad de pasar del estado i al estado j .

Probabilidades límite para estados recurrentes y transitorios

Hemos visto que, cuando y es un **estado transitorio**, la cadena de Markov X_n sólo retorna a y una cantidad finita de veces.

Esto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = y) = 0,$$

cualquiera que sea el estado inicial $x \in \Omega$.

↪ ¿Qué ocurre cuando y es un **estado recurrente**?

Vamos a ver que en la mayoría de los casos, *pero no siempre*, $p^n(x, y)$ converge a un límite positivo.

Una circunstancia bajo la cual no hay convergencia es cuando la cadena de Markov es **periódica**.

Ejemplo: cadena de reparación

Una máquina cuenta con tres motores (1,2 y 3). La máquina funciona correctamente siempre que al menos dos de los motores estén funcionando.

La máquina está diseñada de tal manera que no puede fallar más de un motor en el mismo día.

Cuando dos de los motores están estropeados, son reemplazados por otros dos nuevos (cada uno de su tipo) y la máquina vuelve a funcionar con todos sus motores en buenas condiciones.

Tomemos como espacio de estados los motores que están estropeados, esto es

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 12, 13, 23\}.$$

Supongamos que cada día falla uno de los tres motores y que la elección del motor que falla es aleatoria.

Ejemplo (continuación)

La matriz de transición es, en este caso,

	0	1	2	3	12	13	23
0	0	1/3	1/3	1/3	0	0	0
1	0	0	0	0	1/2	1/2	0
2	0	0	0	0	1/2	0	1/2
3	0	0	0	0	0	1/2	1/2
12	1	0	0	0	0	0	0
13	1	0	0	0	0	0	0
23	1	0	0	0	0	0	0

Es evidente que, si n no es un múltiplo de 3, entonces $p^n(x, x) = 0$ para cualquier estado $x \in \Omega$.

Es fácil demostrar que, de manera análoga, si la máquina consta de N componentes, entonces $p^n(x, x) = 0$ para cualquier estado $x \in \Omega$ salvo que n sea múltiplo de N .

Definición de período

El **período** de un estado x es el mayor entero que divide a todos los n para los cuales se verifica $p^n(x, x) > 0$.

Para el ejemplo de la cadena de reparaciones con N componentes,

$$I_x = \{n \geq 1 : p^n(x, x) > 0\} = \{N, 2N, 4N, 6N, 8N, \dots\},$$

para todo estado $x \in \Omega$, y por tanto el período es **N** .

La periodicidad es una propiedad que no aparece con frecuencia en la práctica. En la mayoría de los casos las cadenas de Markov son **aperiódicas**, es decir, todos los estados tienen período 1.

Periodicidad y matriz de transición

Teorema Si $p(x, x) > 0$, entonces el estado x tiene período 1 (es decir, es aperiódico).

Por ejemplo, en el caso de la cadena del tiempo, que vimos en sesiones anteriores, se cumple que $p(x, x) > 0$ para todo $x \in \Omega$, luego todos los estados tienen período 1.

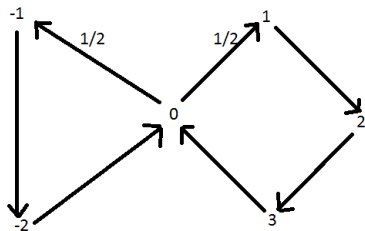
La condición $p(x, x) > 0$ es suficiente para que el estado x tenga período 1, pero *no es necesaria*.

Periodicidad y transición entre varias etapas

Teorema: Si el estado x tiene período 1, entonces existe algún número n_0 tal que, si $n \geq n_0$, entonces $n \in I_x$.

Es decir, I_x contiene todos los enteros a partir de algún valor n_0 .

Si consideramos la cadena de Markov asociada al grafo:



se puede comprobar como $n_0 = 6$ para el estado $x = 0$.

Periodicidad y estados comunicantes

Teorema: Si los estados x e y intercomunican el uno con el otro ($x \rightarrow y$ e $y \rightarrow x$), entonces x e y *tienen el mismo período*.

Consideremos el camino aleatorio con barreras reflectantes en los extremos: hay 5 estados y si llegamos a un extremo (0 ó 4) nos mantenemos ahí con probabilidad 0.5, y vamos en dirección contraria con probabilidad 0.5.

En este caso $p(0,0) > 0$, y puesto que todos los estados intercomunican entre sí, el resultado anterior implica que todos los estados tienen período 1.

Distribución límite de una cadena de Markov

Las cadenas periódicas constituyen un caso especial dentro de las cadenas de Markov, ya que su comportamiento a largo plazo no se estabiliza.

Ahora vamos a analizar el comportamiento límite de las cadenas de Markov **aperiódicas**, es decir, vamos a centrarnos en estudiar como son los límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n(x, y) = \pi(y)$$

para cada estado $y \in \Omega$ en cadenas aperiódicas. Veremos que esta notación tiene sentido, ya que *la distribución límite no depende del estado inicial x .*

Distribuciones estacionarias

Se dice que una distribución π es una **distribución estacionaria** para una cadena de Markov X_n con matriz de transición p si verifica

$$\pi p = \pi$$

y

$$\sum_{y \in \Omega} \pi(y) = 1.$$

Equivalentemente,

$$\sum_{x \in \Omega} \pi(x) p(x, y) = \pi(y) \text{ para todo } y \in \Omega.$$

La terminología se debe a que si X_0 sigue la distribución estacionaria π , es decir, si $P(X_0 = y) = \pi(y)$ para todo $y \in \Omega$, entonces $P(X_n = y) = \pi(y)$ para todo $n \geq 1$ y todo $y \in \Omega$.

Convergencia de cadenas de Markov

Recordemos que una cadena de Markov es **irreducible** cuando su conjunto de estados es cerrado, es decir, cuando es posible pasar de cualquier estado i a otro estado j en una cantidad finita de pasos.

Sea $\{X_n\}_{n \geq 0}$ una cadena de Markov con matriz de transición p irreducible, aperiódica y con distribución estacionaria π .

Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n(x, y) = \pi(y)$$

para todos los estados $x, y \in \Omega$.

Existencia y unicidad de distribuciones estacionarias

El teorema de convergencia de cadenas de Markov lleva de manera natural a plantearse las siguientes preguntas:

- ↪ ¿En qué casos una cadena de Markov con matriz de transición p tiene una distribución estacionaria?
- ↪ ¿Puede una cadena de Markov con matriz de transición p tener más de una distribución estacionaria?

Unicidad: Si X_n es una cadena de Markov con matriz de transición p irreducible, entonces tiene, a lo sumo, una distribución estacionaria.

Existencia de distribuciones estacionarias

Si $\{X_n\}_n$ es una cadena de Markov con espacio de estados Ω finito, entonces tiene al menos una distribución estacionaria.

Así, si la matriz de transición p es irreducible y el espacio de estados es finito, existe una y sólo una distribución estacionaria.

Proporción de estancia a largo plazo en cada estado

La distribución estacionaria proporciona la fracción de tiempo que la cadena de Markov pasa, a largo plazo, en cada estado.

Denotemos $N_n(y)$ el número de veces que la cadena de Markov visita el estado y en las n primeras etapas.

Ley fuerte para cadenas de Markov: Sea X_n una cadena de Markov con matriz de transición p irreducible y distribución estacionaria π . Entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n(y)}{n} = \pi(y) \quad \forall y \in \Omega.$$

Ejemplo

Consideremos de nuevo la cadena de reparación, pero suponiendo que las probabilidades de fallo de las máquinas 1,2 y 3 son 0.01, 0.02 y 0.04, respectivamente. Se obtiene la siguiente matriz de transición:

	0	1	2	3	12	13	23
0	0.93	0.01	0.02	0.04	0	0	0
1	0	0.94	0	0	0.02	0.04	0
2	0	0	0.95	0	0.01	0	0.04
3	0	0	0	0.97	0	0.02	0.04
12	1	0	0	0	0	0	0
13	1	0	0	0	0	0	0
23	1	0	0	0	0	0	0

Ejemplo (continuación)

Esta matriz es irreducible y aperiódica. La distribución estacionaria es:

$$\begin{aligned}\pi(0) &= \frac{3000}{8910} & \pi(1) &= \frac{500}{8910} & \pi(2) &= \frac{1200}{8910} \\ \pi(3) &= \frac{4000}{8910} & \pi(12) &= \frac{22}{8910} \\ \pi(13) &= \frac{60}{8910} & \pi(23) &= \frac{128}{8910}\end{aligned}$$

Matrices doblemente estocásticas

Se dice que una matriz de transición p es **doblemente estocástica** si sus columnas suman 1, es decir, si

$$\sum_{y \in \Omega} p(x, y) = 1 \quad \forall x \in \Omega.$$

- ▶ Si p es una matriz doblemente estocástica de una cadena de Markov con N estados, entonces la distribución

$$\pi(x) = \frac{1}{N} \quad \text{para todo } x \in \Omega$$

es una distribución estacionaria.

Condición de equilibrio minucioso

Algunas cadenas de Markov cumplen la llamada **condición de equilibrio minucioso**

$$\pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x).$$

Esta condición es *más fuerte* que la condición de estacionaridad $\pi p = \pi$, ya que, si sumamos en todos los estados, la condición de equilibrio minucioso implica que

$$\sum_{x \in \Omega} \pi(x)p(x, y) = \pi(y) \sum_{x \in \Omega} p(y, x) = \pi(y).$$

Un ejemplo de cadena de Markov que cumple esta condición son los **procesos de nacimiento y muerte** que veremos más adelante.

Ejemplos

En el caso de la cadena del tiempo, la matriz de transición era

	L	N	S
L	0.4	0.6	0
N	0.2	0.5	0.3
S	0.1	0.7	0.2

Esta cadena no verifica la condición de equilibrio minucioso.

En general, una cadena de Markov para la cual $p(x, y) > 0$ no implique $p(y, x) > 0$, **no** puede satisfacer la condición de equilibrio minucioso.

Por otro lado, en el caso de la cadena de Ehrenfest, que veremos más adelante, la distribución estacionaria es binomial $B(n, 0.5)$, la cual verifica la condición de equilibrio minucioso:

$$\pi(x)p(x, x+1) = \pi(x+1)p(x+1, x), \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$