

Procesos estocásticos

Sesión 4. Cadenas de Markov

Enrique Miranda

Universidad of Oviedo

Máster Universitario en Análisis de Datos
para la Inteligencia de Negocios

Contenidos

1. Probabilidades de retorno y tiempos de parada.
2. Estados transitorios y recurrentes.
3. Estados comunicantes e irreducibles.
4. Teorema de caracterización.

Cadenas de Markov

Recordemos que un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n\}_n$ es una **cadena de Markov** cuando la distribución de X_{n+1} condicionada a $(X_n, \dots, X_0)$ únicamente depende de X_n .

Es decir, el futuro sólo depende del pasado a través del presente.

En el caso de cadenas de Markov **homogéneas**, para las que la distribución de $X_{n+1}|X_n$ coincide con la de $X_1|X_0$ para todo n , la información probabilística viene determinada por la **matriz de transición**, que nos dice cuál es la probabilidad de pasar del estado i al estado j .

Probabilidades de retorno

Denotemos T_y el tiempo de primera pasada por el estado y , esto es,

$$T_y = \min\{n \geq 1 : X_n = y\}.$$

Sea g_y la probabilidad de volver en algún momento al estado y partiendo de este mismo estado, es decir,

$$g_y = P(T_y < \infty | X_0 = y).$$

↪ Con esta notación, ¿cuál será la probabilidad de de retornar a y al menos dos veces?

Tiempos de parada

Se dice que T es un **tiempo de parada** para la cadena de Markov X_n si la ocurrencia o no ocurrencia del suceso $T = n$ puede determinarse por los valores de la cadena hasta ese punto, $X_0, \dots, X_n$.

El tiempo de primera pasada por y , T_y , es un tiempo de parada, ya que

$$\{T_y = n\} = \{X_1 \neq y, X_2 \neq y, \dots, X_{n-1} \neq y, X_n = y\}.$$

Propiedad fuerte de Markov

Sea T un tiempo de parada para la cadena de Markov X_n .

Dados los sucesos $T = n$ y $X_T = y$, cualquier otra información sobre $X_0, \dots, X_T$ resulta irrelevante para predecir el futuro, y el proceso de X_{T+k} se comporta como la cadena de Markov con estado inicial y . Esto se conoce como la **propiedad fuerte de Markov**.

La idea es que la parada en el instante n depende sólo de los valores $X_0, \dots, X_n$, y en una cadena de Markov el futuro sólo depende del pasado a través del estado actual.

Probabilidades de n retornos

La propiedad fuerte de Markov aplicada al tiempo de retorno T_y implica que la probabilidad de retornar una vez más a y condicionada a que ya hemos vuelto a ese estado $n - 1$ veces es g_y .

Esto implica que la probabilidad de retornar dos veces a y es g_y^2 , la de retornar tres veces es $g_y^2 g_y = g_y^3$ y que, en general, la probabilidad de retornar n veces es g_y^n .

↪ ¿Cuántas veces esperamos retornar al estado y ?

Clasificación de estados

Acabamos de ver que la probabilidad de retornar n veces al estado y es g_y^n .

A partir de esto existen dos posibilidades:

- ▶ Si $g_y < 1$, entonces $g_y^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir, la probabilidad de retornar n veces al estado y tiende a 0. Esto supone que, en el largo plazo, la cadena no volverá a pasar por el estado y . En este caso se dice que **y es un estado transitorio**, ya que a partir de algún instante no reaparecerá en la cadena de Markov.
- ▶ Si $g_y = 1$, entonces $g_y^n = 1 \forall n$, y en consecuencia la cadena retornará a y infinitas veces. En este caso se dice que **y es un estado recurrente**, ya que reaparecerá continuamente en la cadena de Markov.

Ejemplo: el problema de la ruina del jugador

Consideremos de nuevo el problema de la ruina con $N = 4$:

	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0
3	0	0	0.6	0	0.4
4	0	0	0	0	1

Se cumple $p(0,0) = 1 \Rightarrow P(T_0 = 1|X_0 = 0) = 1 \Rightarrow g_0 = P(T_0 < \infty|X_0 = 0) = 1$. Por lo tanto, 0 es un estado recurrente.

Análogamente vemos que el estado 4 también lo es.

En este ejemplo, tanto 0 como 4 son **estados absorbentes**, puesto que una vez que se alcanzan, la cadena permanece para siempre en ellos.

Ejemplo (continuación)

Para el estado 1 se tiene que

$$\begin{aligned}P(T_1 = \infty | X_0 = 1) &\geq p(1, 0) = 0.6 > 0 \\ \Rightarrow g_1 &= P(T_1 < \infty | X_0 = 1) < 1.\end{aligned}$$

En consecuencia, 1 es un estado transitorio.

De manera similar,

$$P(T_2 = \infty | X_0 = 2) \geq p(2, 1)p(1, 0) = 0.36 > 0.$$

y

$$P(T_3 = \infty | X_0 = 3) \geq p(3, 4) = 0.4 > 0.$$

por lo que 2 y 3 son también estados transitorios
($g_2 < 1, g_3 < 1$).

Estados que comunican con otros

En lo que sigue denotaremos $P_x(A)$ la probabilidad de que ocurra el suceso A partiendo desde el estado x , esto es,

$$P_x(A) = P(A|X_0 = x),$$

y llamaremos $\rho_{x,y}$ a la probabilidad de que, partiendo del estado x , la cadena alcance en algún momento el estado y , es decir,

$$\rho_{x,y} = P_x(T_y < \infty) = P(T_y < \infty | X_0 = x).$$

Se dice que el estado x **comunica** con y si la probabilidad de alcanzar y partiendo de x es positiva, es decir, si $\rho_{x,y} > 0$. Lo denotaremos $x \rightarrow y$.

$\rho_{x,y}$ incluye no sólo la posibilidad de que saltar de x a y en una etapa, sino también la de ir desde x a y visitando por el camino otros estados.

Estados comunicantes y transitorios

Teorema: Si x comunica con y pero y no comunica con x entonces x es un estado transitorio.

Justificación intuitiva: si partiendo de x es posible alcanzar el estado y con probabilidad positiva, y cuando esto ocurre la cadena nunca vuelve a pasar por x , el estado x no puede ser visitado infinitas veces.

Este resultado permite identificar todos los estados transitorios cuando el espacio de estados es finito.

Ejemplo: la cadena del tiempo

Retomemos la cadena

	L	N	S
L	0.4	0.6	0
N	0.2	0.5	0.3
S	0.1	0.7	0.2

En este caso, los tres estados son recurrentes: observemos que $p(x, L) \geq 0.1$ para todo $x \in \Omega$. Por consiguiente, $P_L(T_L > n) \leq 0.9^n$. Puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0.9^n = 0,$$

se tiene que $P_L(T_L < \infty) = 1$, es decir, que partiendo de un día lluvioso la cadena volverá a alcanzar otro día lluvioso con probabilidad 1.

Puesto que $p(x, N) \geq 0.5$ para todo $x \in \Omega$, utilizando el mismo argumento se obtiene que N es también un estado recurrente.

Ejemplo (continuación)

Si bien para S no podemos usar el mismo razonamiento ($p(L, S) = 0$), S es también un estado recurrente. Para comprobarlo recordemos que la matriz de probabilidad de transición es dos etapas es

$$p^2 = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.54 & 0.18 \\ 0.21 & 0.58 & 0.21 \\ 0.20 & 0.55 & 0.25 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, $P(X_{n+2} = S | X_0 = x) \geq 0.18$ para todo $x \in \Omega$, lo cual implica que $P_S(T_S > 2n) \leq 0.82^n$. Puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.82^n = 0$, se tiene que $P_S(T_S < \infty) = 1$, y por tanto el estado S es también recurrente.

En el análisis de la recurrencia de los tres estados de esta cadena de Markov hemos usado implícitamente un resultado que se conoce como **lema del peatón**.

Lema del peatón

Si $P_x(T_y \leq k) \geq \alpha > 0$ para todo $x \in \Omega$, entonces

$$P_x(T_y > nk) \leq (1 - \alpha)^n.$$

Justificación intuitiva: Consideremos un peatón que, cada vez que cruza la calle, tiene probabilidad de al menos α de morir. En ese caso, la probabilidad de que sobreviva a n cruces es, como mucho, $(1 - \alpha)^n$.

Ejemplo

Consideremos $\Omega = \{1, 2, \dots, 7\}$ y la cadena de Markov con matriz de transición

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.3	0	0	0	0.7	0	0
2	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0	0
3	0	0	0.2	0.5	0.3	0	0
4	0	0	0	0	0	0.5	0.5
5	0.5	0	0	0	0.5	0	0
6	0	0	0	0.4	0	0.2	0.4
7	0	0	0	1	0	0	0

Los estados 2 y 3 son transitorios.

El resto de estados se divide en dos grupos de estados que intercomunican entre sí: $\{1, 5\}$ y $\{4, 6, 7\}$.

Conjuntos de estados cerrados e irreducibles

Se dice que un conjunto de estados $A \subset \Omega$ es **cerrado** si una vez que la cadena de Markov ha entrado en él nunca vuelve a salir, es decir, si $i \in A$ y $j \notin A$ implican que $p(i, j) = 0$.

Para el ejemplo anterior son conjuntos cerrados $\{1, 5\}$, $\{4, 6, 7\}$, $\{1, 5, 4, 6, 7\}$ y $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Se dice que un conjunto de estados $B \subset \Omega$ es **irreducible** si todos los estados $i, j \in B$ comunican entre sí.

Para el ejemplo anterior los conjuntos cerrados e irreducibles son $\{1, 5\}$ y $\{4, 6, 7\}$.

Solidaridad entre estados que comunican

Si x es un estado recurrente y comunica con y ($x \rightarrow y$) entonces y también es recurrente.

Justificación intuitiva: cada vez que la cadena pasa por el estado x tiene una probabilidad positiva de alcanzar y antes de volver a x .

Puesto que el número de estados es finito, la cadena no puede retornar infinitas veces a x sin pasar por y alguna de ellas.

Existencia de estados recurrentes

Si $C \subset \Omega$ es un conjunto de cerrado de estados tiene que contener algún estado recurrente.

Justificación intuitiva: Puesto que el conjunto C es cerrado, si la cadena entra en él pasará una cantidad infinita de tiempo en C .

Puesto el número de estados de C es finito, esto no podría ocurrir si la cadena pasase sólo una cantidad finita de tiempo en cada estado de C .

Recurrencia en conjuntos cerrados e irreducibles

Si el conjunto de estados $C \subset \Omega$ es cerrado e irreducible, entonces *todos los sucesos incluidos en C son recurrentes*

Justificación intuitiva: puesto que C es cerrado e irreducible, contiene algún estado recurrente y además todos los estados de C comunican entre sí.

Aplicando los dos resultados anteriores se deduce que todos los sucesos incluidos en C son recurrentes.

Ejemplo: Para la cadena de Markov del ejemplo, en la que los conjuntos cerrados e irreducibles eran $\{1, 5\}$ y $\{4, 6, 7\}$, el teorema anterior asegura que 1,4,5,6 y 7 son estados recurrentes.

Como vimos anteriormente, los otros dos estados (2 y 3) son transitorios.

Clasificación de estados para Ω finito

Si el espacio de estados Ω es finito, entonces Ω puede escribirse como una unión disjunta,

$$\Omega = T \cup R_1 \cup \dots \cup R_k$$

donde T es el conjunto de estados transitorios y $R_1, \dots, R_k$ son conjuntos cerrados e irreducibles de estados recurrentes.

Ejemplo: Para la cadena de Markov del ejemplo tenemos (con $k = 2$) que

$$\Omega = T \cup R_1 \cup R_2$$

donde $T = \{2, 3\}$, $R_1 = \{1, 5\}$ y $R_2 = \{4, 6, 7\}$.

Probabilidad de visitar k veces un estado

Denotemos por T_y^k el tiempo de la k -ésima visita al estado y , es decir,

$$T_y^k = \min\{n > T_y^{k-1} : X_n = y\},$$

con $T_y^0 = 0$. Nótese que $T_y = T_y^1$.

Para $k \geq 1$, se cumple

$$P_x(T_y^k < \infty) = \rho_{xy} \rho_{yy}^{k-1}.$$

Demostración: Para visitar k veces el estado y partiendo de x , primero tenemos que ir desde x hasta y y después retornar $k - 1$ veces desde y hasta y . Por la propiedad fuerte de Markov, cada parte del recorrido es independiente de las anteriores.

Resultados auxiliares

Denotemos por $N(y)$ el número de veces que la cadena de Markov visita el estado $y \in \Omega$.

Los dos resultados siguientes indican el número esperado de visitas al estado y cuando se parte de x .

- ▶ $E_x N(y) = \frac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{yy}}.$
- ▶ $E_x N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} P_x(X_n = y).$

Teorema de caracterización de estados recurrentes

Un estado y es recurrente si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_y(X_n = y) = E_y N(y) = \infty.$$

Este resultado es consecuencia de los dos lemas auxiliares de la transparencia anterior.

Interpretación: si un estado $y \in \Omega$ es recurrente y comenzamos desde y , entonces ocurrirá $N(y) = \infty$ con probabilidad 1, mientras que, si y es transitorio entonces $N(y) < \infty$ con probabilidad 1 y el valor esperado de $N(y)$ será finito.

Ejemplo

Multiplicando sucesivamente la matriz de transición, se puede comprobar como $p^N(i, i)$ va convergiendo al vector

$$[0.416, 0, 0, 0.421, 0.583, 0.263, 0.315],$$

de donde se deduce por el teorema que los estados recurrentes son 1,4,5,6,7.

El límite anterior es un ejemplo de lo que se conoce como **distribución estacionaria** de la cadena de Markov, como veremos en la próxima sesión.

Cadenas de Markov ergódicas

Un estado recurrente y se dice **nulo** cuando el tiempo medio hasta su siguiente aparición es infinito, es decir,

$$\sum_n nP(T_y = n | X_0 = y) = \infty,$$

y se dice **no nulo** en caso contrario.

Un estado y es **periódico** con período T cuando $p^n(y, y) = 0$ excepto para $n = kT$ con $k \geq 1$.

Un estado recurrente, no nulo, y aperiódico se dice **ergódico**.

Una cadena de Markov en la que todos sus estados son ergódicos se llama **ergódica**.

Caracterización

- ▶ Un estado y es recurrente y nulo si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_y(X_n = y) = \infty \text{ y } \lim_n P_y(X_n = y) = 0$$

- ▶ En una cadena de Markov irreducible, todos los estados son del mismo tipo: transitorios, recurrentes nulos o recurrentes no nulos. Además, todos los estados son o bien aperiódicos o bien periódicos con el mismo período T .