

Procesos estocásticos

Sesión 2. Conceptos básicos

Enrique Miranda

Universidad of Oviedo

Máster Universitario en Análisis de Datos
para la Inteligencia de Negocios

Contenidos

1. Definición de proceso estocástico.
2. Ejemplos.
3. Procesos a tiempo discreto y continuo.
4. Incrementos independientes y estacionarios.
5. Procesos estocacionarios.

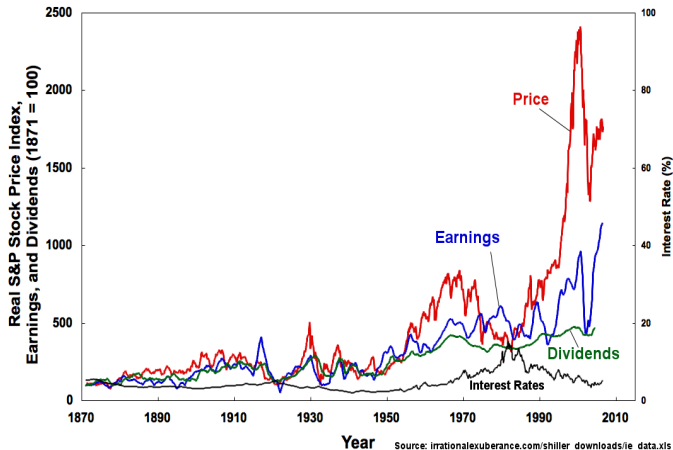
Definición de proceso estocástico

Un **proceso estocástico** $\underline{X} = \{X_t\}_{t \in T}$ es una colección de variables aleatorias definidas en un mismo espacio probabilístico $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Normalmente el conjunto de índices T se interpreta como el período de tiempo, de manera que X_t es el valor de proceso en el instante t .

Una evaluación $\underline{X}(\omega)$ del proceso estocástico se denomina **trayectoria**. Así, $\underline{X}$ se puede entender como una variable de T en $\mathbb{R}$.

Ejemplo: evolución del mercado de valores

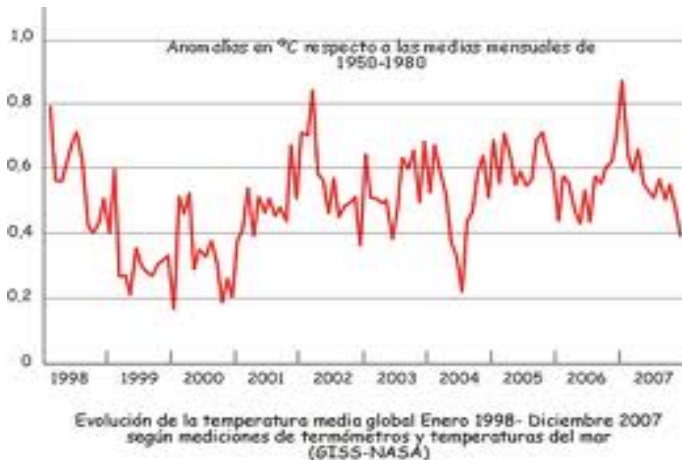


Campos de aplicación

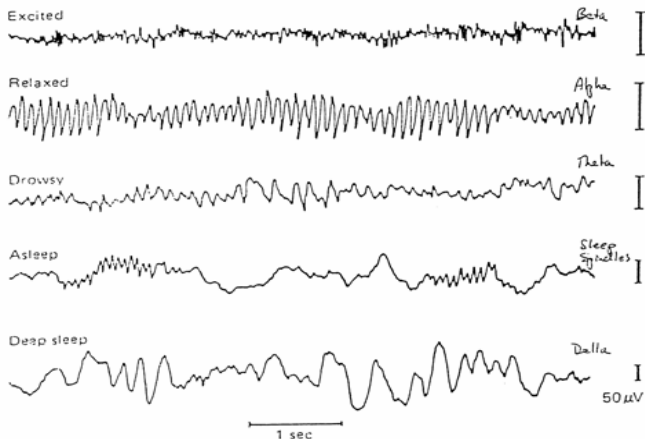
Los procesos estocásticos aparecen en multitud de campos:

- ▶ En economía, en la evolución de precios de acciones o de tasas de cambio;
- ▶ En ingeniería, para modelizar el habla dentro de teoría de la señal;
- ▶ En medicina, en las variaciones de parámetros como la temperatura o el electrocardiograma;
- ▶ En física, para describir movimientos de partículas.

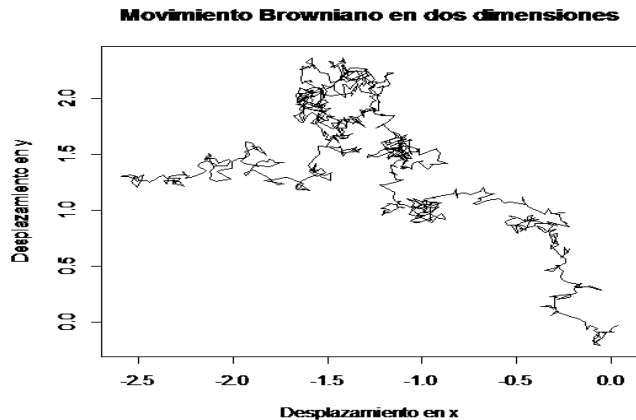
Ejemplo: variación de la temperatura del mar



Ejemplo: electroencefalogramas (EEG)



Ejemplo: movimientos de partículas



Historia

La teoría de los procesos estocásticos surgió fundamentalmente como respuesta al estudio de dos problemas:

- ▶ La evolución del mercado de valores: **Bachelier**.
- ▶ La descripción de los movimientos de partículas: **Thiele**, **Einstein**, **Smoluchowski**.

Otras contribuciones importantes se debieron a **Ville**, **Doob**, **Bernstein**, **Îto**, y **Kolmogorov**, entre otros.

Información probabilística

Bajo ciertas condiciones de regularidad, un proceso estocástico viene determinado por el conjunto de distribuciones de probabilidad finito-dimensionales (**fidis**), las distribuciones de los vectores aleatorios n -dimensionales

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$$

para $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$ y $n \in \mathbb{N}$.

La construcción matemática que garantiza esto se basa en la extensión de probabilidades a espacios más generales, y se conoce como la **extensión de Kolmogorov**.

Dos procesos $\underline{X}, \underline{Y}$ se dicen **equivalentes** cuando tienen las mismas fidis.

Clasificación de procesos estocásticos

- ▶ Procesos **a tiempo discreto**: el conjunto de índices T es numerable.
- ▶ Procesos **a tiempo continuo**: el conjunto de índices T es no numerable.

El conjunto de valores $E \subseteq \mathbb{R}$ que pueden tomar las variables aleatorias X_t se denomina **espacio de estados**. Se distingue también entre procesos con espacios de estados discretos y continuos, en función de que E sea numerable o no numerable.

Ejemplos

Supongamos que jugamos a la ruleta, y llamamos X_n a la ganancia acumulada tras la n -ésima partida. Entonces, el proceso $\{X_n\}_{n \geq 1}$ sería un proceso a tiempo discreto y con un conjunto de estados discreto.

Por otro lado, si X_t es la presión atmosférica en el instante t , el proceso $\{X_t\}_t$ sería a tiempo continuo y con un conjunto de estados también continuo.

Finalmente, si X_n es el precio de unas acciones al cierre del mercado el día n , el proceso $\{X_n\}_n$ sería a tiempo discreto y con un conjunto de estados continuo.

Algunos tipos de procesos estocásticos

Procesos a tiempo discreto:

- ▶ Cadenas de Markov a tiempo discreto.
- ▶ Martingalas a tiempo discreto.

Procesos a tiempo continuo:

- ▶ Procesos de Poisson.
- ▶ Procesos de renovación.
- ▶ Cadenas de Markov a tiempo continuo.
- ▶ Procesos de nacimiento y muerte.
- ▶ Modelos de colas.
- ▶ El movimiento Browniano.

Clasificación en función de los incrementos

Sea $\{X_t\}_{t \in T}$ un proceso a tiempo continuo.

- ▶ Se dice un proceso de **incrementos independientes** si para todos $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ en T , las variables

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

son independientes.

- ▶ Se dice un proceso de **incrementos estacionarios** cuando la distribución de $X_{t+s} - X_t$ es la misma para todo t .

Un proceso de incrementos independientes y estacionarios son los **procesos de Lévy**, que incluyen como casos particulares a dos modelos que veremos más adelante: los procesos de Poisson y el movimiento browniano.

Ejemplo de incrementos independientes y estacionarios

Sea X_t el número de mensajes de spam que llegan a un servidor en el instante t . El proceso $\{X_t\}_t$ sería:

- ▶ A tiempo continuo;
- ▶ Con un conjunto de estados discreto;
- ▶ De incrementos independientes: se supone que la llegada de más o menos mensajes en un período de tiempo no afecta a lo que ocurre en otros intervalos de tiempo;
- ▶ De incrementos estacionarios: se supone que el número de mensajes de spam que llegan en un intervalo de tiempo depende de la longitud de dicho intervalo.

Ejemplo de incrementos no independientes ni estacionarios

Sea X_t el número de votantes que llegan a una mesa electoral en el instante t . Entonces el proceso $\{X_t\}_t$:

- ▶ NO es de incrementos estacionarios: la distribución del número de votantes no es uniforme a lo largo del día;
- ▶ NO es de incrementos independientes: si llegan muchos votantes por la mañana es más probable que lleguen menos por la tarde.

De procesos de este tipo se ocupa la [teoría de colas](#).

Elementos de un proceso estocástico

La **función de medias** de un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ es la aplicación $m : T \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $m(t) = E(X_t)$.

La **función de autocovarianzas** $c : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ viene dada por $c(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = E[(X_s - m(s))(X_t - m(t))]$.

El proceso se dice **débilmente estacionario** cuando:

- ▶ La función de medias es constante.
- ▶ Existe una función $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $c(s, t) = \gamma(t - s) \forall s, t \in T$.

Ejemplo de proceso estacionario

Sea X_n la variable aleatoria ‘temperatura media en Oviedo el día 1 de Enero del año $2016+n$ ’. Entonces $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sería un proceso estocástico:

- ▶ A tiempo discreto;
- ▶ Con un conjunto de estados continuo;
- ▶ Débilmente estacionario: el vector de medias sería constante y la varianza de la temperatura entre los años $2016 + n$ y $2016 + n + n'$ dependería del intervalo de tiempo n' entre ellos.

Ejemplo de proceso no estacionario

Sea X_t la variable aleatoria 'precio de las acciones de la compañía Gamesa en el instante t '. El proceso estocástico $\{X_t\}_t$ sería:

- ▶ A tiempo continuo;
- ▶ Con un conjunto de estados continuo;
- ▶ No estacionario: no podemos suponer que el precio medio de las acciones se mantenga constante a lo largo del tiempo, y además se pueden producir fluctuaciones de tipo estacional.

Procesos fuertemente estacionarios

Un proceso $\{X_t\}_{t \in T}$ se dice **(fuertemente) estacionario** si para todo n y todos $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ en T y todo valor real h tal que $t_i + h \in T \forall i = 1, \dots, n$, las variables

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$$

y

$$(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

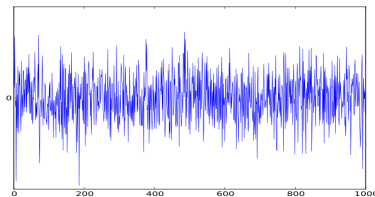
son idénticamente distribuidas.

Un proceso fuertemente estacionario es débilmente estacionario, pero el recíproco no es cierto.

La hipótesis de estacionariedad se usa habitualmente en series temporales, y se realizan transformaciones de datos no estacionarios para hacerlos estacionarios.

Ejemplo en teoría de la señal

Un ejemplo de proceso fuertemente estacionario es el **ruido blanco**: de hecho, se define como un proceso en el que las variables son independientes, de media 0 y varianza finita.



Cuando además la distribución de las fdis es una normal multidimensional se dice que es un ruido blanco **gaussiano**.

El ruido blanco es uno de los procesos más importantes en las **series temporales**.