

Práctica de aula

Definiciones alternativas de producto escalar

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

Ejercicio 1: Bases no ortogonales

(basado en el ejercicio 3.66 del Oppenheim)

El teorema de la mejor aproximación es extremadamente importante pues nos muestra que los coeficientes α_m son independientes los unos de los otros. Por lo que si se agregan más términos a la aproximación, dichos coeficientes no cambian.

En contraste, considere otro tipo de expansión en serie, la serie polinomial de Taylor. Por ejemplo, para una exponencial tendremos:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

como veremos, cuando la serie polinomial es finita, los coeficientes de esta expansión difieren de los anteriores. En concreto se consideran tres funciones bases: $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$ y $e_2(x) = x^2$.

- Evalúe si estos $e_m(x)$ son ortogonales en el intervalo $0 \leq x \leq 1$.
- Considere una aproximación de $f(x)$ usando una única función base $e_0(x)$ tal que $\hat{f}(x) = \alpha_0 e_0(x)$. Determine el coeficiente, tal que la energía del error en dicho intervalo sea mínima $E = \|f(x) - \hat{f}(x)\|$.
- Considere ahora el mismo ejercicio pero para el caso de considerar dos funciones en la base $\hat{f}(x) = \alpha_0 e_0(x) + \alpha_1 e_1(x)$. Para ello, resuelva las ecuaciones simultáneas:

$$\frac{\partial E}{\partial \alpha_0} = 0 \quad y \quad \frac{\partial E}{\partial \alpha_1} = 0$$

Ejercicio 2: Definición de producto escalar alternativa

Considere la siguiente aplicación entre espacios de señal:

$$S(-1, 1) \times S(-1, 1) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(f(x), g(x)) \mapsto \langle f(x), g(x) \rangle_w = \int_{-1}^1 f(x) g^*(x) w(x) dx,$$

siendo $S(-1, 1)$ el espacio de señales complejas de variable real comprendida entre $-1 \leq x \leq 1$, y $w(x) = \sqrt{1-x^2}$ es una función peso.

- Evalúe si dicha aplicación es o no un producto escalar para $S([-1, 1])$.
- Evalúe si los polinomios si los *Polinomios de Chebyshev de segunda especie* definidos como:

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

y que satisfacen la siguiente propiedad:

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$$

son ortogonales bajo la definición previa.

Nota: se sugiere el siguiente cambio de variable $x = \cos \theta$.