

Práctica de aula

Definiciones de distancia y norma

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

Ejercicio 1: Definición de distancia

(Basado en el ejercicio 4.1 del libro de Emilio Gago Vol. ST-II)

- a) Analice gráficamente y analíticamente las siguientes aplicaciones bivariables:

$$d_1 : \mathcal{V}_K \times \mathcal{V}_K \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f(x), g(x)) \mapsto d_1(f(x), g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| dx$$

$$d_2 : \mathcal{V}_K \times \mathcal{V}_K \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f(x), g(x)) \mapsto d_2(f(x), g(x)) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

$$d_3 : \mathcal{V}_K \times \mathcal{V}_K \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f(x), g(x)) \mapsto d_3(f(x), g(x)) = \sup [|f(x) - g(x)|]$$

- b) Encuentre para que definiciones se cumplen los criterios de (pseudo)distancia así como $d(f(x), g(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.
- c) ¿Para que tipo de funciones la distancia será cero?

Ejercicio 1: Definiciones de norma

d) Evalúe si las siguientes definiciones dan lugar a normas válidas:

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{V}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \mapsto \|f(x)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

$$\|\cdot\|_2 : \mathcal{V}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \mapsto \|f(x)\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

$$\|\cdot\|_{\infty} : \mathcal{V}_{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \mapsto \|f(x)\|_{\infty} = \sup [|f(x)|]$$

Nota: la desigualdad de Minkowski establece que:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) + g(x)|^p dx \right]^{1/p} \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right]^{1/p} + \left[\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^p dx \right]^{1/p}$$