

La Transformada de Z

Apéndice B

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

Índice

- 1 Introducción
- 2 Transformada Z directa
- 3 Región de convergencia
- 4 La Transformada Z inversa
- 5 Transformadas Z racionales
- 6 Propiedades y pares transformados
- 7 Caracterización de SLI mediante la TZ
- 8 Definición de sistemas discretos y su relación con la TZ



Introducción

- La Transformada de Z es, en cierta medida, el equivalente en variable discreta de la transformada de Laplace
- De este modo, se puede interpretar como una **extensión analítica** de la Transformada de Fourier de variable discreta.

$$e^{j\Omega} \rightarrow z = |z| e^{j\Omega} = z' + jz''$$

- Nuevamente, esta transformada no podrá verse como una proyección sobre ciertas funciones base ortogonales, como sucede en la Teoría General de Transformadas.
- Nos permitirá calcular una transformada (y, por tanto, operar en el dominio transformado) incluso en casos en los que no existe Transformada de Fourier.
 - Ej.: un sistema inestable no tendrá, en general, TF en términos de funciones convencionales pero en muchos casos de interés sí tendrá Transformada Z.
- La Transformada de Fourier de muchas señales, pero no todas, puede obtenerse particularizando la Transformada de Z.



Definición de la Transformada Z directa

- La Transformada Z de una secuencia $x(n)$ se define como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}.$$

- Una simple expansión en módulo y fase permite obtener la relación con la TF:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)|z|^{-n}e^{-j\Omega n} = \mathbf{TF}\left(x(n)|z|^{-n}\right).$$

- La relación previa nos permite intuir que la convergencia mejorará en muchos casos gracias al nuevo término $|z|^{-n}$.



Definición y ROC

- El sumatorio de la transformada directa puede no converger en todos los puntos del plano complejo.
 - La TZ convergerá si se cumple alguna de las condiciones habituales para la TF:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |z|^{-n} < \infty \quad \text{ó} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 |z|^{-2n} < \infty.$$

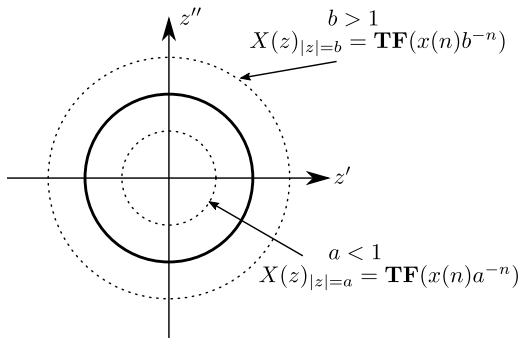
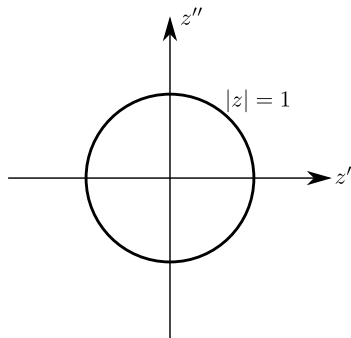
- Se denomina **Región de Convergencia** (ROC) a la región del plano complejo:

$$\text{ROC} = \{z = z' + jz'' \text{ tales que } |X(z)| < \infty\}.$$

- Como se puede intuir por la relación con la transformada de Fourier, la región de convergencia dependerá de $|z|$, por lo que resultará en **regiones de convergencia con forma de anillo**.
- La TF se puede recuperar a partir de la TZ, si el **círculo unidad** pertenece a la ROC.



Definición y ROC



Convergencia para secuencias causales y anticausales

- Para comprobar el hecho anterior, nos basaremos en los dos siguientes hechos.

Lema

Si la Transformada Z de una secuencia causal ($x(n) = 0$ para todo $n < 0$) converge (condicional o absolutamente) en un punto z_0 , entonces la Transformada Z de dicha secuencia convergerá absolutamente para todo z_1 tal que $|z_1| > |z_0|$.

Lema

Si la Transformada Z de una secuencia anticausal ($x(n) = 0$ para todo $n \geq 0$) converge (condicional o absolutamente) en un punto z_0 , entonces la Transformada Z de dicha secuencia convergerá absolutamente para todo z_1 tal que $|z_1| < |z_0|$.

- Como consecuencia de estos dos lemas, puesto que toda secuencia se puede descomponer como suma de una señal causal y una anticausal, la región de convergencia, que será la intersección de las dos ROCs, será un **anillo**.



Demostración de la convergencia para secuencias causales

Demostración.

Consideremos la secuencia causal $x(n)$ tal que

$$X(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z_0^{-n} < \infty.$$

Si dicha secuencia converge, entonces la secuencia $x(n)z_0^{-n}$ está acotada:

$$|x(n)z_0^{-n}| = |x(n)| |z_0|^{-n} \leq M, \quad M < \infty$$

Por tanto:

$$|x(n)z_1^{-n}| = |x(n)z_0^{-n}| \left| \frac{z_1}{z_0} \right|^{-n} \leq M\rho^{-n}, \quad \rho = \frac{|z_1|}{|z_0|}$$

Puesto que $\rho^{-1} < 1$ la secuencia $\sum_{n=0}^{\infty} M\rho^{-n}$ converge y, por tanto, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)z_1^{-n}|$, de lo que se desprende, por definición, que $X(z_1)$ convergerá de manera absoluta. □

Regiones de convergencia I

- Se pueden enunciar las siguientes condiciones para las secuencias de interés.
 - Si la señal es de **duración finita**, con soporte $[N_1, N_2]$, la ROC será todo el Plano z , salvo tal vez $z = 0$? y $|z| \rightarrow \infty$?.
 - $|z| \rightarrow \infty \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_1 \geq 0$.
 - $z = 0 \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_2 \leq 0$.
 - Si una señal es **infinita y a derechas** y converge en un punto z_0 , entonces también convergerá (de manera absoluta) para cualquier punto z_1 , $|z_1| > |z_0|$, salvo tal vez $|z| \rightarrow \infty$?.
 - Si el soporte es $[N_1, \infty)$, entonces $|z| \rightarrow \infty \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_1 \geq 0$.
 - Si una señal es **infinita y a izquierdas** y converge en un punto z_0 , entonces también convergerá (de manera absoluta) para cualquier punto z_1 , $|z_1| < |z_0|$, salvo tal vez $z = 0$?.
 - Si el soporte es $(-\infty, N_2]$, entonces $z = 0 \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_2 \leq 0$.
 - Si la señal es de **duración infinita** y existe TZ en una punto z_0 , entonces la TZ será un anillo del plano z que contenga al punto z_0 .



Regiones de convergencia I

- Se pueden enunciar las siguientes condiciones para las secuencias de interés.
 - Si la señal es de **duración finita**, con soporte $[N_1, N_2]$, la ROC será todo el Plano z , salvo tal vez $z = 0$? y $|z| \rightarrow \infty$?.
 - $|z| \rightarrow \infty \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_1 \geq 0$.
 - $z = 0 \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_2 \leq 0$.
 - Si una señal es **infinita y a derechas** y converge en un punto z_0 , entonces también convergerá (de manera absoluta) para cualquier punto z_1 , $|z_1| > |z_0|$, salvo tal vez $|z| \rightarrow \infty$?.
 - Si el soporte es $[N_1, \infty)$, entonces $|z| \rightarrow \infty \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_1 \geq 0$.
 - Si una señal es **infinita y a izquierdas** y converge en un punto z_0 , entonces también convergerá (de manera absoluta) para cualquier punto z_1 , $|z_1| < |z_0|$, salvo tal vez $z = 0$?.
 - Si el soporte es $(-\infty, N_2]$, entonces $z = 0 \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_2 \leq 0$.
 - Si la señal es de **duración infinita** y existe TZ en un punto z_0 , entonces la TZ será un anillo del plano z que contenga al punto z_0 .



Regiones de convergencia I

- Se pueden enunciar las siguientes condiciones para las secuencias de interés.
 - Si la señal es de **duración finita**, con soporte $[N_1, N_2]$, la ROC será todo el Plano z , salvo tal vez $z = 0$? y $|z| \rightarrow \infty$?.
 - $|z| \rightarrow \infty \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_1 \geq 0$.
 - $z = 0 \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_2 \leq 0$.
 - Si una señal es **infinita y a derechas** y converge en un punto z_0 , entonces también convergerá (de manera absoluta) para cualquier punto z_1 , $|z_1| > |z_0|$, salvo tal vez $|z| \rightarrow \infty$?.
 - Si el soporte es $[N_1, \infty)$, entonces $|z| \rightarrow \infty \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_1 \geq 0$.
 - Si una señal es **infinita y a izquierdas** y converge en un punto z_0 , entonces también convergerá (de manera absoluta) para cualquier punto z_1 , $|z_1| < |z_0|$, salvo tal vez $z = 0$?.
 - Si el soporte es $(-\infty, N_2]$, entonces $z = 0 \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_2 \leq 0$.
 - Si la señal es de **duración infinita** y existe TZ en una punto z_0 , entonces la TZ será un anillo del plano z que contenga al punto z_0 .

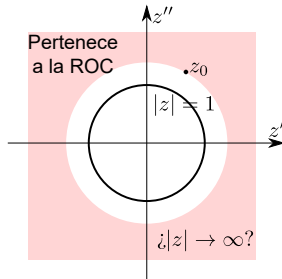
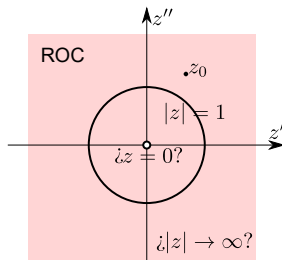
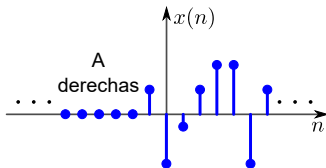
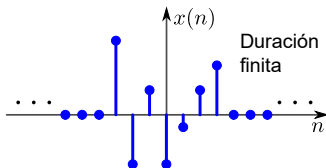


Regiones de convergencia I

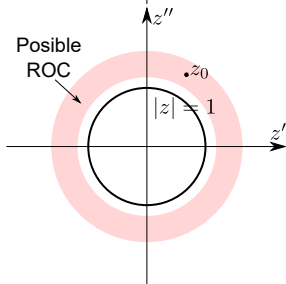
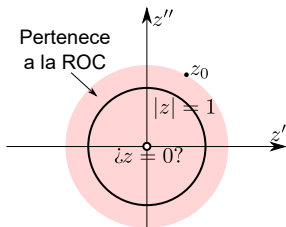
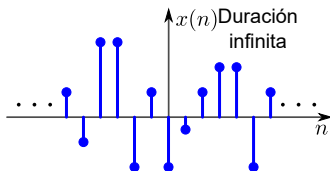
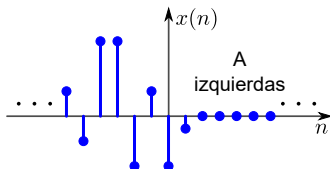
- Se pueden enunciar las siguientes condiciones para las secuencias de interés.
 - Si la señal es de **duración finita**, con soporte $[N_1, N_2]$, la ROC será todo el Plano z , salvo tal vez $z = 0$? y $|z| \rightarrow \infty$?.
 - $|z| \rightarrow \infty \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_1 \geq 0$.
 - $z = 0 \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_2 \leq 0$.
 - Si una señal es **infinita y a derechas** y converge en un punto z_0 , entonces también convergerá (de manera absoluta) para cualquier punto z_1 , $|z_1| > |z_0|$, salvo tal vez $|z| \rightarrow \infty$?.
 - Si el soporte es $[N_1, \infty)$, entonces $|z| \rightarrow \infty \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_1 \geq 0$.
 - Si una señal es **infinita y a izquierdas** y converge en un punto z_0 , entonces también convergerá (de manera absoluta) para cualquier punto z_1 , $|z_1| < |z_0|$, salvo tal vez $z = 0$?.
 - Si el soporte es $(-\infty, N_2]$, entonces $z = 0 \in \text{ROC}$ si y sólo si $N_2 \leq 0$.
 - Si la señal es de **duración infinita** y existe TZ en un punto z_0 , entonces la TZ será un anillo del plano z que contenga al punto z_0 .



Regiones de convergencia II



Regiones de convergencia III



La Transformada de Z inversa

- Como hemos visto, la TZ puede calcularse para cualquier círculo $z = |z|e^{j\Omega}$ dentro de la ROC como:

$$X(z) = \mathbf{TF} \{x(n)|z|^{-n}\}.$$

- Aplicando una TF inversa a la expresión anterior:

$$x(n)|z|^{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(z)e^{j\Omega n} d\Omega,$$

y, por tanto,

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(z)|z|^n e^{j\Omega n} d\Omega.$$

- La expresión anterior se expresa habitualmente como una integral de variable compleja mediante el cambio $z = |z|e^{j\Omega}$, $\frac{dz}{d\Omega} = j|z|e^{j\Omega} = jz$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|} X(z)z^{n-1} dz.$$



Transformadas Z racionales

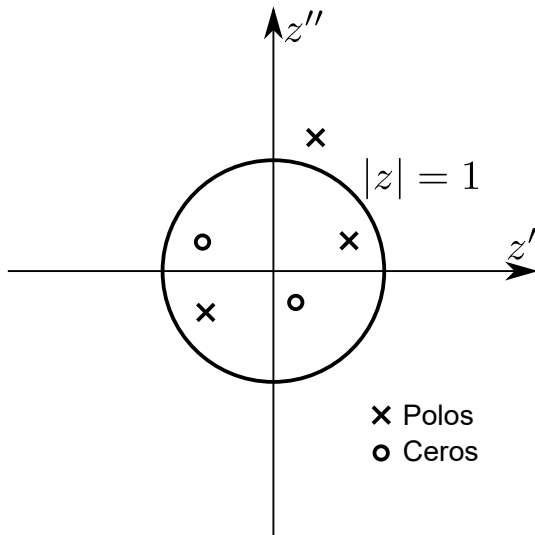
- Es muy habitual encontrarse con **TZ racionales**, es decir, descritas por cocientes de polinomios en z (o z^{-1}):

$$X(z) = \frac{\beta_M z^M + \beta_{M-1} z^{M-1} + \dots + \beta_0}{\alpha_N z^N + \alpha_{N-1} z^{N-1} + \dots + \alpha_0}$$

- Es importante reseñar que un polinomio puede tener raíces repetidas.
 - Al número de veces que se repite una raíz se le denomina **multiplicidad**.
- Nuevamente podremos caracterizar estas transformadas mediante un **diagrama de polos y ceros**.
- Esta situación se da en los siguientes casos:
 - Sistemas descritos por **ecuaciones en diferencias**
 - Señales descritas por exponenciales.



Diagramas de polos y ceros



Transformadas Z racionales - Propiedades

ROC TZ racional

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, entonces su ROC está limitada por polos o se extiende al infinito.

ROC $x(n)$ a derechas

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es a derechas, entonces la ROC es la región en el plano z fuera del polo más alejado del origen. Además, si $x(n)$ es causal, entonces la ROC también incluye a $|z| \rightarrow \infty$.

ROC $x(n)$ a izquierdas

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es a izquierdas, entonces la ROC es el círculo en el plano z limitado por el polo más cercano al origen, salvo tal vez origen $z = 0$. Además, si $x(n)$ es anticausal, entonces la ROC también incluye a $z = 0$.

ROC $x(n)$ duración infinita

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es de duración infinita, entonces la ROC es un anillo entre dos polos consecutivos. *A priori* puede haber varias opciones.

Transformadas Z racionales - Propiedades

ROC TZ racional

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, entonces su ROC está limitada por polos o se extiende al infinito.

ROC $x(n)$ a derechas

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es a derechas, entonces la ROC es la región en el plano z fuera del polo más alejado del origen. Además, si $x(n)$ es causal, entonces la ROC también incluye a $|z| \rightarrow \infty$.

ROC $x(n)$ a izquierdas

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es a izquierdas, entonces la ROC es el círculo en el plano z limitado por el polo más cercano al origen, salvo tal vez origen $z = 0$. Además, si $x(n)$ es anticausal, entonces la ROC también incluye a $z = 0$.

ROC $x(n)$ duración infinita

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es de duración infinita, entonces la ROC es un anillo entre dos polos consecutivos. *A priori* puede haber varias opciones.

Transformadas Z racionales - Propiedades

ROC TZ racional

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, entonces su ROC está limitada por polos o se extiende al infinito.

ROC $x(n)$ a derechas

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es a derechas, entonces la ROC es la región en el plano z fuera del polo más alejado del origen. Además, si $x(n)$ es causal, entonces la ROC también incluye a $|z| \rightarrow \infty$.

ROC $x(n)$ a izquierdas

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es a izquierdas, entonces la ROC es el círculo en el plano z limitado por el polo más cercano al origen, salvo tal vez origen $z = 0$. Además, si $x(n)$ es anticausal, entonces la ROC también incluye a $z = 0$.

ROC $x(n)$ duración infinita

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es de duración infinita, entonces la ROC es un anillo entre dos polos consecutivos. *A priori* puede haber varias opciones.

Transformadas Z racionales - Propiedades

ROC TZ racional

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, entonces su ROC está limitada por polos o se extiende al infinito.

ROC $x(n)$ a derechas

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es a derechas, entonces la ROC es la región en el plano z fuera del polo más alejado del origen. Además, si $x(n)$ es causal, entonces la ROC también incluye a $|z| \rightarrow \infty$.

ROC $x(n)$ a izquierdas

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es a izquierdas, entonces la ROC es el círculo en el plano z limitado por el polo más cercano al origen, salvo tal vez origen $z = 0$. Además, si $x(n)$ es anticausal, entonces la ROC también incluye a $z = 0$.

ROC $x(n)$ duración infinita

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es de duración infinita, entonces la ROC es un anillo entre dos polos consecutivos. *A priori* puede haber varias opciones.

Transformadas Z racionales - Propiedades

ROC TZ racional

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, entonces su ROC está limitada por polos o se extiende al infinito.

ROC $x(n)$ a derechas

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es a derechas, entonces la ROC es la región en el plano z fuera del polo más alejado del origen. Además, si $x(n)$ es causal, entonces la ROC también incluye a $|z| \rightarrow \infty$.

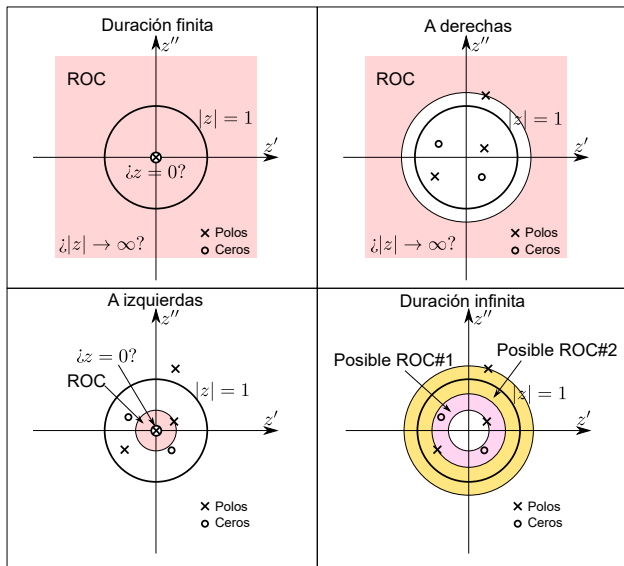
ROC $x(n)$ a izquierdas

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es a izquierdas, entonces la ROC es el círculo en el plano z limitado por el polo más cercano al origen, salvo tal vez origen $z = 0$. Además, si $x(n)$ es anticausal, entonces la ROC también incluye a $z = 0$.

ROC $x(n)$ duración infinita

Si la TZ $X(z)$ de $x(n)$ es racional, y $x(n)$ es de duración infinita, entonces la ROC es un anillo entre dos polos consecutivos. *A priori* puede haber varias opciones.

Transformadas Z racionales - ROC



Propiedades de la Transformada Z

Linealidad	$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(z) + \beta Y(z)$	Al menos $R_X \cap R_Y$
Desplazamiento	$x(n - n_0)$	$X(z)z^{-n_0}$	R_X (¿origen?)
Producto por exp.: $e^{j\Omega_0 n}$	$x(n)e^{j\Omega_0 n}$	$X(ze^{-j\Omega_0})$	R_X
Producto por exp.: z_0^n	$x(n)z_0^n$	$X(\frac{z}{z_0})$	$ z_0 R_X$
Producto por exp.: a^n	$x(n)a^n$	$X(\frac{z}{a})$	$ a R_X$
Conjugación	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R_X
Reflexión	$x(-n)$	$X(1/z)$	$1/R_X$
Escalado variable indep.	$x(n/p)$	$X(z^p)$	$[R_X]^{\frac{1}{p}}$
Convolución	$x(n) * y(n)$	$X(z)Y(z)$	Al menos $R_X \cap R_Y$
Primera diferencia	$x(n) - x(n-1)$	$(1 - z^{-1})X(z)$	Al menos R_X
Suma acumulativa	$\sum_{p=-\infty}^n x(p)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	Al menos $R_X \cap z > 1$
Producto por n	$nx(n)$	$-\frac{dX(z)}{dz}$	R_X

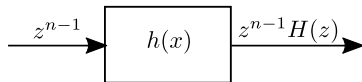


Pares de Transformadas Z

Delta	$\delta(n)$	1	$\forall z$
Delta desplazada	$\delta(n - n_o)$	z^{-n_o}	$\forall z$
Heaviside	$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
	$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z < 1$
Exponenciales	$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
	$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
	$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
	$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
Coseno a derechas	$\cos(\Omega_0 n) u(n)$	$\frac{1-z^{-1} \cos \Omega_0}{z^{-2}-2z^{-1} \cos \Omega_0+1}$	$ z > 1$
Seno a derechas	$\sin(\Omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1} \sin \Omega_0}{z^{-2}-2z^{-1} \cos \Omega_0+1}$	$ z > 1$
Prod. coseno y exp. a derechas	$a^n \cos(\Omega_0 n) u(n)$	$\frac{1-z^{-1} a \cos \Omega_0}{a^2 z^{-2}-2az^{-1} \cos \Omega_0+1}$	$ z > a $
Prod. seno y exp. a derechas	$a^n \sin(\Omega_0 n) u(n)$	$\frac{z^{-1} a \sin \Omega_0}{a^2 z^{-2}-2az^{-1} \cos \Omega_0+1}$	$ z > a $



Caracterización de SLI mediante la TZ



- Las funciones de tipo z^{n-1} son también autofunciones de los SLI:

$$z^{n-1} * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{n-k-1} h(k) = z^{n-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k} h(k) = z^{n-1} H(z)$$

- Por tanto, la respuesta de un SLI a una entrada $x(n)$ será:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|} X(z) (z^{n-1} * h(n)) dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|} X(z) H(z) z^{n-1} dz$$

- De lo que se concluye que la función $H(z)$ ejerce las veces de función de transferencia y relaciona la entrada y la salida:

$$Y(z) = X(z)H(z)$$



Caracterización de SLI mediante la TZ - Estabilidad

- Recordemos que un **SLI es estable** si y sólo si su respuesta al impulso absolutamente sumable.
- La condición previa implica que existirá la TF de un sistema estable.
- Este hecho, unido a que existe convergencia absoluta en toda la ROC, salvo tal vez en la frontera, nos permite enunciar que:

SLI estable

Un SLI será estable si y sólo si la ROC de su transformada Z incluye el círculo unidad $|z| = 1$ y no es un anillo vacío.



Caracterización de SLI mediante la TZ - Causalidad

- Por otro lado, un *SLI causal* siempre tendrá una función de transferencia $H(z)$ cuya ROC será el exterior de un círculo, *incluyendo* $|z| \rightarrow \infty$.

SLI causal y con $H(z)$ racional

Todo SLI con TZ *racional* $H(z)$ será causal si y sólo si la correspondiente ROC está compuesta por el exterior del círculo del polo más alejado del origen y el orden del numerador, *expresado como polinomios en z* , no es mayor que el orden del denominador.

- Por ejemplo $H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}}$ no es causal, independientemente de su ROC, ya que el denominador es de orden superior al denominador.
- Si la TZ es racional y el sistema es causal y estable, entonces todos los polos deben estar dentro del círculo unidad.



Sistemas definidos por ecuaciones en diferencias

Ejemplo

Analice la estabilidad del siguiente sistema, el cual se sabe que es causal, definido por la ecuación en diferencias:

$$y(n) + \frac{1}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) = x(n).$$

Solución

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

El sistema es estable.



Sistemas definidos por bloques

Ejemplo

Obtenga la función de transferencia de los siguientes sistemas.

