

La Transformada de Laplace

Apéndice A

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

Índice

- 1 Introducción
- 2 La Transformada de Laplace Directa
- 3 Relación con la Transformada de Fourier
- 4 Región de Convergencia - ROC
- 5 La Transformada de Laplace Inversa
- 6 Transformadas de Laplace racionales
- 7 Propiedades y pares transformados
- 8 Caracterización de SLI mediante la Transformada de Laplace
- 9 Apéndice: La Transformada de Laplace Unilateral
- 10 Apéndice: Teoremas del valor inicial y final
- 11 Apéndice: Descomposición en fracciones simples



Introducción

- La Transformada de Laplace se puede interpretar como una **extensión analítica** de la Transformada de Fourier (TF).

$$j\xi \rightarrow s = \sigma + j\xi$$

- Las **funciones base** vendrán dadas por

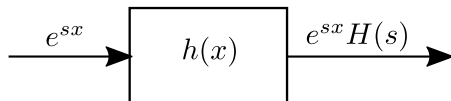
$$\varphi(x; s) = e^{sx}, s \in \mathbb{C}$$

puesto que una de las variables es compleja, ya no podremos utilizar el **álgebra de espacio** habitual.

- Por ello, este tipo de transformación no se ajusta a lo visto en la Teoría General de Transformadas.
- Nos permitirá calcular una transformada (y, por tanto, operar en el dominio transformado) incluso en casos en los que no existe TF.
 - Ej.: un sistema inestable no tendrá, en general, TF en términos de funciones convencionales pero en muchos casos de interés sí tendrá Transformada de Laplace.
- La TF de muchas señales puede obtenerse a partir de la Transformada de Laplace.
 - Aunque existen excepciones como por ejemplo cuando la TF viene expresada



Funciones base y sistemas lineales



- Las funciones base de tipo $\varphi(x; s) = e^{sx}$ son **autofunciones** de los SLI:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x; s) * h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(x-x')} h(x') dx' \\
 &= e^{sx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx'} h(x') dx' = \varphi(x; s) H(s)
 \end{aligned}$$

- Donde se ha definido el término

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x') e^{-sx'} dx'$$

esta transformación será la que de lugar a la **Transformada de Laplace**.



Definición y ROC

- La **Transformada de Laplace** de una señal $f(x)$ se define como:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-sx} dx$$

- Dicha integral puede no converger en todos los puntos del plano complejo.
- Se denomina **Región de Convergencia** (ROC) a la región del plano complejo:

$$\text{ROC} = \left\{ s = \sigma + j\xi \text{ tales que } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)e^{-\sigma x}| dx < \infty \right\}$$

- Es posible que la integral converja (convergencia condicional) incluso aunque no se cumpla la condición anterior.



Análisis de las funciones base I

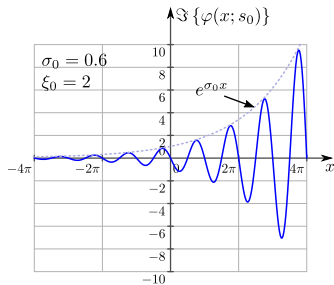
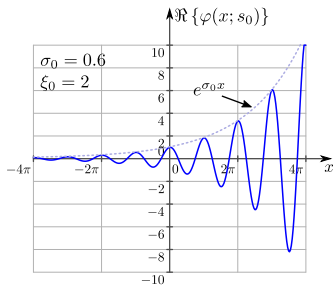
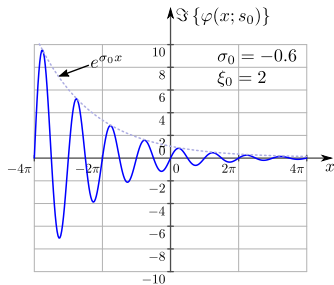
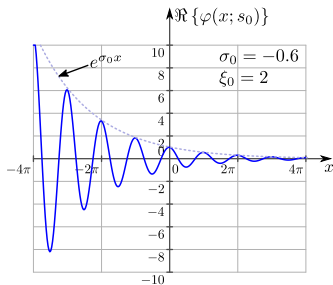
- Las funciones base pueden expresarse como:

$$\varphi(x; s) = e^{\sigma} e^{j\xi} = e^{\sigma} (\cos(j\xi) + j \sin(j\xi))$$

- Es directo observar las siguientes propiedades:
 - No son periódicas salvo en el caso $\sigma = 0$
 - No son cuadrado integrables.
 - Si $\Re(s) = \sigma > 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x; s) \rightarrow \infty$
 - Si $\Re(s) = \sigma > 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x; s) \rightarrow \infty$

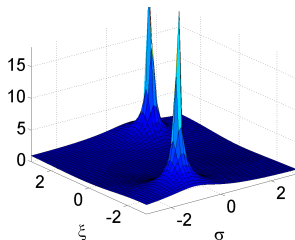


Análisis de las funciones base II

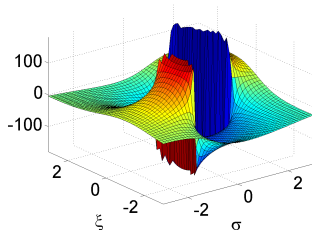


Visualización

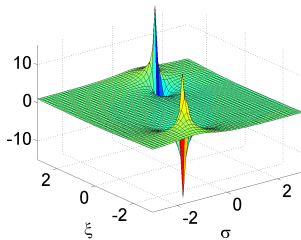
Módulo



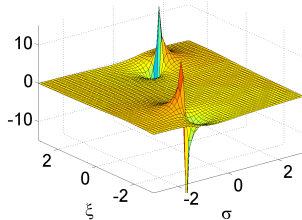
Fase



Parte real



Parte imaginaria



Relación con la Transformada de Fourier

- Si la recta $\sigma = 0$ pertenece a la ROC, entonces la transformada de Fourier se podrá calcular a partir de la TL.
 - Si bien esto es una condición suficiente para la existencia de TF, no es necesaria.
- Además, la TL se puede calcular a partir de una TF como:

$$\begin{aligned}\mathbf{TL}(f(x)) = F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-sx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\sigma x} e^{-j\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x, \sigma) e^{-j\xi x} dx = \mathbf{TF}(g(x, \sigma))\end{aligned}$$

- Por tanto:

$$F(s = \sigma + j\xi) = \mathbf{TL}(f(x)) = \mathbf{TF}(f(x)e^{-\sigma x})$$

- Por tanto, habrá convergencia de la TL si $f(x)e^{-\sigma x}$ es cuadrado integrable o absolutamente integrable
 - De aquí en adelante, asumiremos que las otras dos condiciones de Dirichlet se cumplen para las señales de interés práctico.



Regiones de convergencia

- Tomaremos como criterio de convergencia el que la función $f(x)e^{-\sigma x}$ sea absolutamente integrable pues es, en general, el más restrictivo.
 - Si la señal es de **duración finita**, y absolutamente integrable, la ROC será todo el Plano s .
 - Si una señal **infinita y a derechas** tiene TL en un punto $s_0 = \sigma_0 + j\xi_0$, entonces también existirá TL para cualquier recta $s = \sigma_1 + j\xi$ con $\sigma_1 \geq \sigma_0$.
 - Si una señal **infinita y a izquierdas** tiene TL en un punto $s_0 = \sigma_0 + j\xi_0$, entonces también existirá TL para cualquier recta $s = \sigma_1 + j\xi$ con $\sigma_1 \leq \sigma_0$.
 - Si la señal es de **duración infinita** y existe TL en una punto $s_0 = \sigma_0 + j\xi_0$, entonces la TL será una franja del Plano s que contenga a s_0 .



Regiones de convergencia - Ejemplo

Ejercicio

Calcule las Transformadas de Laplace de $f_1(x) = e^{-ax} u(x)$ y $f_2(x) = -e^{-ax} u(-x)$ indicando sus correspondientes ROCs



Regiones de convergencia - Ejemplo

Ejercicio

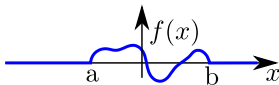
Calcule las Transformadas de Laplace de $f_1(x) = e^{-ax} u(x)$ y $f_2(x) = -e^{-ax} u(-x)$ indicando sus correspondientes ROCs

Solución

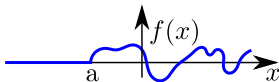
$$F_1(s) = \frac{1}{s+a} \text{ con } \Re\{s\} > -\Re\{a\} \text{ y } F_2(s) = \frac{1}{s+a} \text{ con } \Re\{s\} < -\Re\{a\}$$



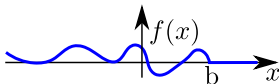
Regiones de convergencia



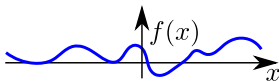
Plano s	ξ
ROC	σ



Plano s s_0	ξ Pertenece a la ROC
σ_0	σ



Plano s s_0	ξ
Pertenece a la ROC σ_0	σ



Plano s s_0	ξ
Possible ROC	σ



La Transformada de Laplace inversa

- Como hemos visto, la TL puede calcularse para cualquier recta $s = \sigma_0 + j\xi$ dentro de la ROC como:

$$F(s = \sigma_0 + j\xi) = \mathbf{TF} \{ f(x) e^{-\sigma_0 x} \}.$$

- Aplicando una TF inversa a la expresión anterior:

$$f(x) e^{-\sigma_0 x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma_0 + j\xi) e^{j\xi x} d\xi,$$

y, por tanto,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma_0 + j\xi) e^{(\sigma_0 + j\xi)x} d\xi.$$

- La expresión anterior se expresa habitualmente como una integral de variable compleja mediante el cambio $s = \sigma_0 + j\xi$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{sx} ds.$$



Transformadas de Laplace racionales

- Es muy habitual encontrarse con **TL racionales**, es decir, descritas por cocientes de polinomios en s :

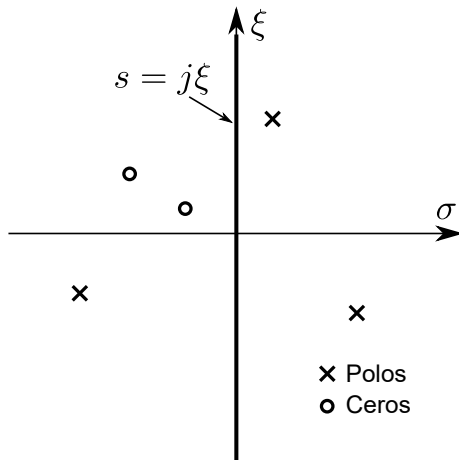
$$F(s) = \frac{\beta_M s^M + \beta_{M-1} s^{M-1} + \dots + \beta_0}{\alpha_N s^N + \alpha_{N-1} s^{N-1} + \dots + \alpha_0} = K \frac{\prod_{k=1}^M (s - s_{z_k})}{\prod_{k=1}^N (s - s_{p_k})}$$

- Es importante reseñar que un polinomio puede tener raíces repetidas.
 - Al número de veces que se repite una raíz se le denomina **multiplicidad**.
- A las raíces del numerador se las denomina **ceros**.
- A las raíces del denominador se las denomina **polos**.
- Esta situación se da en los siguientes casos:
 - Sistemas descritos por **ecuaciones diferenciales**
 - Señales de tipo exponencial.



Diagramas de polos y ceros

- Es una representación muy habitual de una transformada de Laplace
 - Son de especial relevancia en TL de tipo racional pues, junto con la ROC y la multiplicidad de las raíces, definen completamente el sistema.



ROC para Transformadas de Laplace racionales

ROC Transformada de Laplace racional

Si la transformada de Laplace es racional, entonces su ROC está limitada por los polos o se extiende al infinito. Además, ningún polo está contenido en la ROC.

Señal a derechas con TL racional

Si la transformada de Laplace es racional, entonces si la señal es a derechas, la ROC será la región en el plano s que se encuentre a la derecha del polo localizado más hacia la derecha.

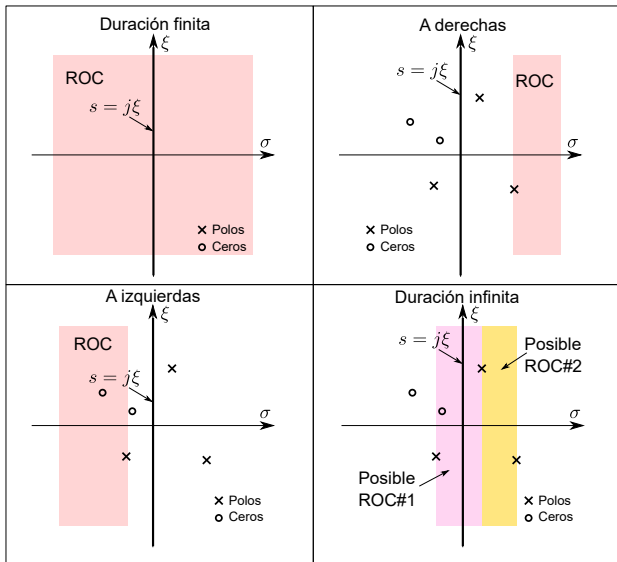
Señal a izquierdas con TL racional

Si la transformada de Laplace es racional, entonces si la señal es a izquierdas, la ROC será la región en el plano s que se encuentre a la izquierda del polo localizado más hacia la izquierda.

Señal de duración infinita con TL racional

Si la transformada de Laplace es racional, entonces si la señal es de duración infinita, la ROC será una franja vertical del plano s delimitada por dos polos adyacentes.

ROC para Transformadas de Laplace racionales



Propiedades de la Transformada de Laplace

Linealidad	$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha F(s) + \beta G(s)$	Al menos $R_F \cap R_G$
Desplazamiento	$f(x - x_0)$	$F(s)e^{-sx_0}$	R_F
Producto por exp.	$f(x)e^{s_0 x}$	$F(s - s_0)$	R_F desplazada
Conjugado	$f^*(x)$	$F^*(s^*)$	R_F
Reflexión	$f(-x)$	$F(-s)$	R_F reflejada
Escalado variable indep.	$f(ax)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{s}{a}\right)$	R_F escalada
Convolución	$f(x) * g(x)$	$F(s)G(s)$	Al menos $R_F \cap R_G$
Primera derivada	$\frac{df(x)}{dx}$	$sF(s)$	Al menos R_F
Derivada n -ésima	$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$	$s^n F(s)$	Al menos R_F
Integración	$\int_{-\infty}^x f(y) dy$	$\frac{1}{s} F(s)$	Al menos $R_F \cap \Re\{s\} > 0$
Producto por x	$-xf(x)$	$\frac{dF(s)}{ds}$	R_F

Las propiedades resaltadas cambian en caso de considerar la transformada de Laplace unilateral (ver apéndice).



Pares de Transformadas de Laplace

Delta	$\delta(x)$	1	$\forall s$
Delta desplazada	$\delta(x - x_0)$	e^{-sx_0}	$\forall s$
Derivadas delta	$\delta^{(n)}(x)$	s^n	$\forall s$
Heaviside	$\pm u(\pm x)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} \geq 0$
	$xu(x)$	$\frac{1}{s^2}$	$\Re\{s\} > 0$
	$\pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} u(\pm x)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re\{s\} \geq 0$
Exponenciales, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\pm e^{-\alpha x} u(\pm x)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re\{s\} \geq -\alpha$
	$\pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x} u(\pm x)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re\{s\} \geq -\alpha$
Coseno a derechas	$\cos(\xi_0 x) u(x)$	$\frac{s}{s^2 + \xi_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
Seno a derechas	$\sin(\xi_0 x) u(x)$	$\frac{\xi_0}{s^2 + \xi_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
Prod. coseno y exp. a derechas	$e^{-\alpha x} \cos(\xi_0 x) u(x)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \xi_0^2}$	$\Re\{s\} > -\alpha$
Prod. seno y exp. a derechas	$e^{-\alpha x} \sin(\xi_0 x) u(x)$	$\frac{\xi_0}{(s+\alpha)^2 + \xi_0^2}$	$\Re\{s\} > -\alpha$



Caracterización de SLI mediante la TL - Estabilidad

- Recordemos que un **SLI es estable** si y sólo si su respuesta al impulso absolutamente integrable.
- La condición previa, y asumiendo que, en la práctica se cumplen las dos otras condiciones de Dirichlet, implica que existirá la TF de un sistema estable.

SLI estable

Un SLI es estable si y sólo la ROC de su transformada de Laplace incluye al eje imaginario $s = j\xi$



Caracterización de SLI mediante la TL - Causalidad

- Por otro lado, un *SLI causal* siempre tendrá una función de transferencia $H(s)$ cuya ROC que será un semiplano hacia la derecha pues su respuesta al impulso es a derechas.
 - Esta es una condición necesaria para que un sistema sea causal pero no suficiente.
 - Sin embargo, es posible demostrar, que para sistemas con $H(s)$ racional esta condición es necesaria y suficiente.

SLI causal y con $H(s)$ racional

Todo SLI con TL *racional* $H(s)$ será causal si y sólo si la correspondiente ROC está compuesta por el semiplano a la derecha del polo con mayor parte real .



Regiones de convergencia - Ejemplo

Ejercicio

Si una señal $f(x)$ pasa por un sistema con respuesta al impulso

$h(x) = -e^{-ax}u(-x) + e^{-ax}u(x)$ ¿Es posible calcular la salida mediante la Transformada de Laplace?



Regiones de convergencia - Ejemplo

Ejercicio

Si una señal $f(x)$ pasa por un sistema con respuesta al impulso $h(x) = -e^{-ax}u(-x) + e^{-ax}u(x)$ ¿Es posible calcular la salida mediante la Transformada de Laplace?

Solución

Sí pero no.

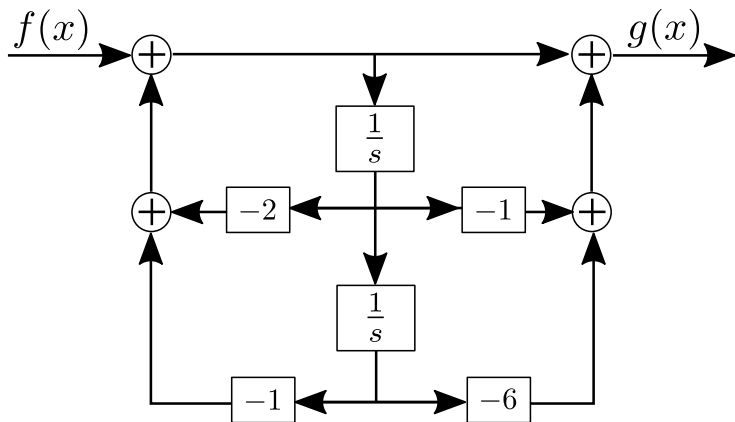
No se puede calcular directamente porque no existe $H(s)$ ya que las ROCs no se solapan.

Sin embargo, se puede calcular descomponiendo el sistema como

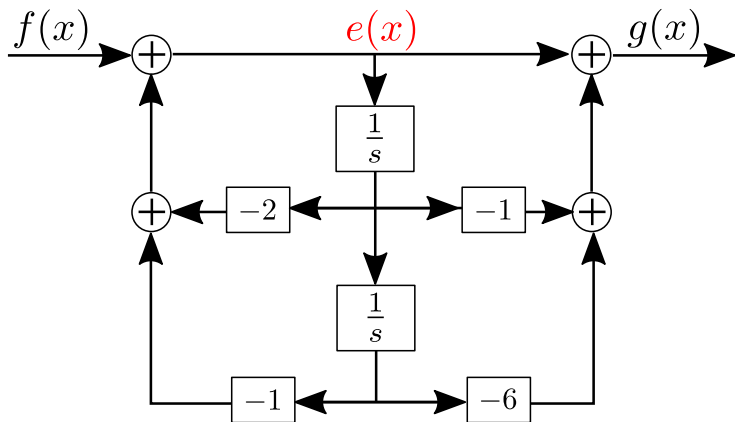
$h(x) = h_1(x) + h_2(x)$ y calculando la salida como

$g(x) = f(x) * h_1(x) + f(x) * h_2(x)$ y analizando cada convolución por separado.

Sistemas definidos por bloques



Sistemas definidos por bloques



Ejemplo - Ec. diferencial

Ejercicio

Dado un sistema causal descrito por la siguiente ecuación diferencial

$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{df(x)}{dx} - 6f(x) = \frac{d^2 g(x)}{dx^2} - g(x)$, calcule $H(s)$. ¿será un sistema estable?
Calcule la respuesta al impulso.

Ejercicio

Dada la función de transferencia $H(s) = \frac{s^2 - s - 6}{s^2 - 1}$, asumiendo que el sistema es estable, calcule la respuesta al impulso $h(x)$.



Ejemplo - Ec. diferencial

Ejercicio

Dado un sistema causal descrito por la siguiente ecuación diferencial

$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{df(x)}{dx} - 6f(x) = \frac{d^2 g(x)}{dx^2} - g(x)$, calcule $H(s)$. ¿será un sistema estable?
Calcule la respuesta al impulso.

Ejercicio

Dada la función de transferencia $H(s) = \frac{s^2-s-6}{s^2-1}$, asumiendo que el sistema es estable, calcule la respuesta al impulso $h(x)$.

Solución

El sistema será $H(s) = \frac{s^2-s-6}{s^2-1} = \frac{(s-3)(s+2)}{(s+1)(s-1)}$. Existen tres posibles ROCs, pero la única que da lugar a un sistema estable es $-1 < \Re\{s\} < 1$. La descomposición en fracciones simples, previa división de los polinomios, sería

$$H(s) = \frac{(s-3)(s+2)}{(s^2-1)} = 1 - \frac{5+s}{(s-1)(s+1)} = 1 - \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s+1} \text{ luego}$$

$$h(x) = \delta(x) + 3e^x u(-x) + 2e^{-x} u(x).$$

Ejemplos división de polinomios

$$\begin{array}{r|l}
 - & s^2 - s - 6 \\
 & s^2 \quad \quad - 1 \\
 \hline
 & -s - 5
 \end{array}$$

$$(s^2 - 1)(+1) + (-s - 5) = s^2 - s - 6$$

$$\begin{array}{r|l}
 - & 6s^3 - 2s^2 + s + 3 \\
 & 6s^3 - 6s^2 + 6s \\
 \hline
 & 4s^2 - 5s + 3 \\
 - & 4s^2 - 4s + 4 \\
 \hline
 & -s - 1
 \end{array}$$

$$(s^2 - s + 1)(6s + 4) + (-s - 1) = 6s^3 - 2s^2 + s + 3$$



Apéndice:
La Transformada de Laplace
Unilateral

La Transformada de Laplace Unilateral

- Como hemos visto, la transformada de Laplace se aplica típicamente a señales a derechas.
- Por este motivo, es muy habitual utilizar una definición alternativa, conocida como **Transformada de Laplace Unilateral** o, según el texto, simplemente como Transformada de Laplace:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx$$

- La mayor parte de las propiedades y pares transformados (de señales a derechas) se mantienen, con la notable excepción de las **derivadas**:

$$f'(x) \leftrightarrow sF(s) - f(0)$$

$$f''(x) \leftrightarrow s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$



Apéndice:

Teoremas del valor inicial y final

Teoremas del valor inicial y final

- Unos teoremas de especial utilidad en la práctica son el teorema del valor inicial y el valor final.
- Si $f(x)$ es tal que $f(x) = 0 \forall x < 0$ y no contiene impulsos en el origen ni singularidades de orden superior, entonces:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

- Estos teoremas nos permiten conocer valores importantes de la función, de manera muy rápida ya que se evita tener que realizar la transformada inversa (p.ej., mediante descomposición en fracciones).



Apéndice:

Descomposición en fracciones
simples

Descomposición en fracciones simples

- Cuando la TL es racional, existe una forma sistemática de calcular su transformada inversa.

Paso#1 Normalización del sistema, dividiendo numerador y denominador por α_M

$$H(s) = \frac{\beta_N s^M + \beta_1 s + \dots + \beta_0}{\alpha_M s^N + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} \Rightarrow H(s) = \frac{u_N s^M + \dots + u_1 s + u_0}{a_M s^N + \dots + a_1 s + 1}$$

Paso#2 Reducción del orden del numerador si $M \geq N$

$$H(s) = \frac{u_N s^M + \dots + u_1 s + u_0}{a_M s^N + \dots + a_1 s + 1} = c_{M-N} s^{M-N} + c_{M-N-1} s^{M-N-1} + \dots + c_1 s + c_0 + \frac{b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_M s^N + \dots + a_1 s + 1}$$

nótese que $a_M = 1$.



Descomposición en fracciones simples

los coeficientes b_k y c_k se pueden recuperar igualando términos en la siguiente ecuación:

$$u_N s^M + \dots + u_1 s + u_0 = \left(c_{M-N} s^{M-N} + c_{M-N-1} s^{M-N-1} + \dots + c_1 s^1 \right) \\ \left(a_M s^N + \dots + a_1 s + 1 \right) + b_{N-1} s^{N-1} + \dots + b_1 s + b_0$$

También es posible calcular estos coeficientes mediante una división de polinomios.



Descomposición en fracciones simples

Paso#3 Descomponer la función racional reducida en fracciones de la forma

$$H_{red}(s) = \frac{b_{N-1}s^{N-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_Ms^N + \dots + a_1s + 1} = \frac{A_{11}}{s - \rho_1} + \frac{A_{12}}{(s - \rho_1)^2} + \dots + \frac{A_{1l_1}}{(s - \rho_1)^{l_1}} +$$

$$+ \frac{A_{21}}{s - \rho_2} + \frac{A_{22}}{(s - \rho_2)^2} + \dots + \frac{A_{2l_2}}{(s - \rho_2)^{l_2}} +$$

$$+ \dots + \frac{A_{R1}}{s - \rho_R} + \frac{A_{R2}}{(s - \rho_R)^2} + \dots + \frac{A_{Rl_R}}{(s - \rho_R)^{l_R}} = \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^{l_i} \frac{A_{ik}}{(s - \rho_i)^{l_i}}$$

donde ρ_r son las R raíces diferentes del denominador y l_k es la multiplicidad de la k -ésima raíz del polinomio del denominador

Esta descomposición también es válida siempre que el orden del numerador sea inferior al del denominador.

Los coeficientes se pueden calcular como:

$$A_{ik} = \frac{1}{(l_i - k)!} \left. \frac{d^{l_i - k}}{ds^{l_i - k}} \left[(s - \rho_i)^{l_i} H_{red}(s) \right] \right|_{s=\rho_i}$$



Descomposición en fracciones simples - Ejemplo

Como ejemplo, se analiza el siguiente sistema caracterizado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2g(x)}{dx^2} + 4\frac{dg(x)}{dx} + 3g(x) = \frac{df(x)}{dx} + 2f(x),$$

cuya ecuación de transferencia será:

$$H(s) = \frac{G(s)}{F(s)} = \frac{s+2}{s^2+4s+3}.$$

La cual se puede descomponer como:

$$H(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$$

Si el sistema es estable, ¿Cuál será la ROC? ¿Cuál es su respuesta al impulso?



Descomposición en fracciones simples - Ejemplo

Si se introduce una entrada de tipo $f(x) = e^{-x}u(x)$, tendremos que la TL de la salida será:

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)}$$

Su descomposición en fracciones será:

$$\frac{s+2}{(s+1)^2(s+3)} = \frac{A_{11}}{(s+1)} + \frac{A_{12}}{(s+1)^2} + \frac{A_{21}}{(s+3)}$$

Los coeficientes valen

$$A_{11} = \left. \frac{d}{ds} G(s)(s+1)^2 \right|_{s=-1} = \frac{1}{4} \quad A_{12} = \left. G(s)(s+1)^2 \right|_{s=-1} = \frac{1}{2} \quad A_{21} = G(s)(s+3)|_s$$

con lo que

$$g(x) = \left[\frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{4}e^{-3x} \right] u(x)$$

