

Señales y sistemas de variable continua y discreta

Tema 11

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

- 1 Introducción
- 2 Muestreo y Recuperación de Señales
 - Conversión ideal de variable continua a variable discreta
 - Teorema de Nyquist-Shannon
 - Relación entre la DTFT y la TF de variable continua
 - Conversión de variable discreta a variable continua
 - Relación entre las frecuencias normalizadas y frecuencias reales
- 3 Modelado de un SLI de VC mediante un SLI de VD
- 4 Ejemplos



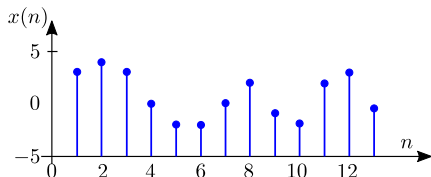
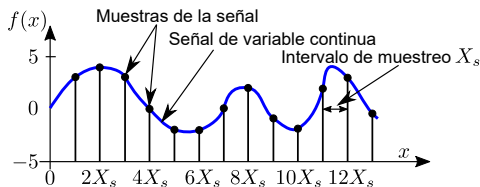
Introducción

- En este tema veremos que una **señal de variable continua**, que cumpla ciertas condiciones, puede ser representada de manera exacta a partir de una representación **muestreada** de la misma.
- Esto nos permitirá el **procesado digital** de señales de variable continua.
 - Implementación de sistemas de variable continua mediante sistemas de variable discreta
 - Análisis de señales de variable continua mediante técnicas de procesado digital.
- En la práctica, las señales muestreadas, son también cuantificadas pues se representan con un **número finito de bits**.
 - Las estrategias de **cuantificación** y el impacto en la señal será estudiada en otras asignaturas.



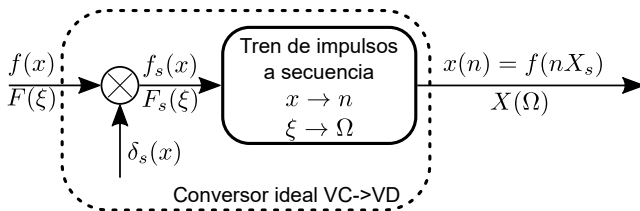
Introducción

- ¿Se pierde información al muestrear?
- ¿Qué paso debo usar para muestrear?
- ¿Qué relación hay entre $F(\xi)$ y $X(\Omega)$?



Muestreo: conversor ideal

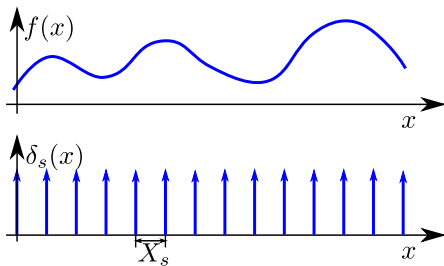
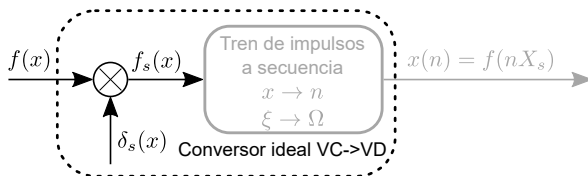
- El siguiente esquema muestra un **conversor de variable continua a variable discreta** ideal.
- Este conversor es un **modelo ideal** que nos ayudará a entender el proceso de muestreo.
 - No es representativo de una implementación real de un conversor analógico digital.



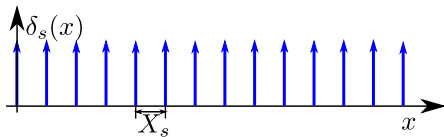
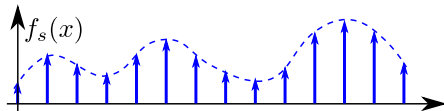
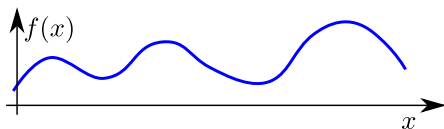
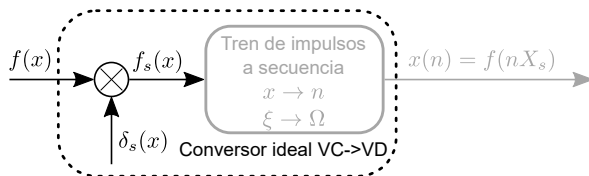
- Donde el $\delta_s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kX_s)$ es un tren periódico de deltas a la tasa de muestreo $1/X_s$.



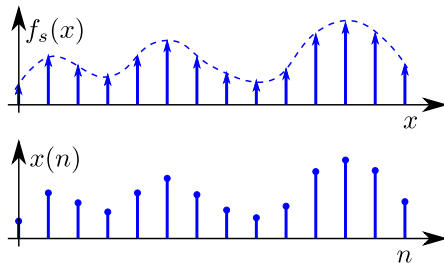
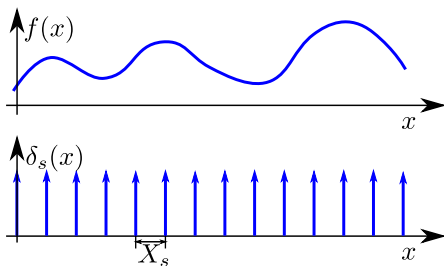
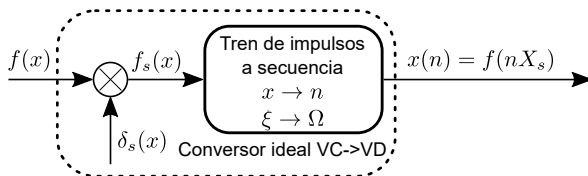
Muestreo: conversor ideal



Muestreo: conversor ideal



Muestreo: conversor ideal



Muestreo: espectro de la señal muestreada

- Veamos como es la señal $f_s(x)$:

$$f_s(x) = f(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kX_s)$$

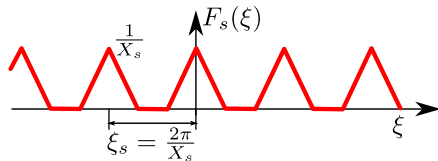
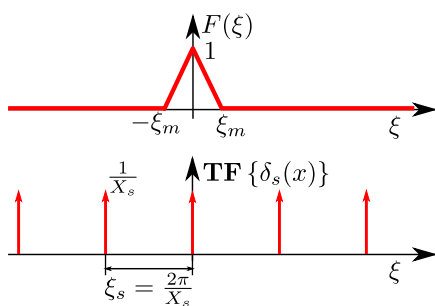
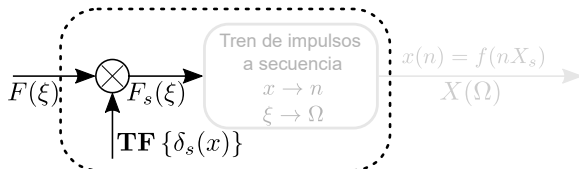
- Por tanto, su espectro será:

$$F_s(\xi) = F(\xi) * \left(\frac{1}{X_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - k\xi_s) \right) = \frac{1}{X_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\xi - k\xi_s)$$

donde se ha definido la frecuencia (angular) de muestreo como $\xi_s = \frac{2\pi}{X_s}$.



Muestreo: espectro de la señal muestreada



Teorema de muestreo de Nyquist-Shannon I

- A la vista del estudio anterior, parece claro que la señal muestreada $f_s(x)$ contiene toda la información de la señal original, la cual podría recuperarse con un filtro ideal, siempre y cuando la pulsación de muestreo ξ_s que el doble del **ancho de banda** de la señal ξ_m .

$$\xi_s > 2\xi_m$$

Teorema de Nyquist

Si una función $f(x)$ no contiene pulsaciones angulares mayores que ξ_m , entonces queda totalmente determinada por una serie ordenada de puntos equiespaciados $X_s < \frac{\pi}{\xi_m}$.



Teorema de muestreo de Nyquist-Shannon II

- Habitualmente se definen:
 - **Frecuencia de Nyquist:** $f_{sN} = \frac{\xi_m}{2\pi}$ es la frecuencia mínima a la que se puede muestrear una señal sin perder información.
 - **Periodo de Nyquist:** $X_{sN} = \frac{1}{f_{sN}}$ es el paso máximo al que se puede muestrear una señal sin perder información.
- Se pueden establecer condiciones equivalentes en frecuencia en lugar de en pulsación angular

$$f_s > 2B$$

siendo B el ancho de banda de la señal (medido en frecuencia y no en pulsación).



Relación entre la DTFT y la TF de variable continua

- Si se comparan los espectros de la señal muestreada por el tren de deltas y la señal de variable discreta:

$$f_s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nX_s)\delta(x - nX_s) \leftrightarrow F_s(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nX_s)e^{-jnX_s\xi}$$

$$x(n) \leftrightarrow X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

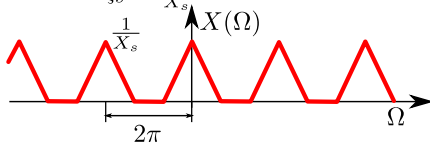
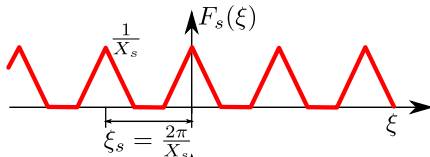
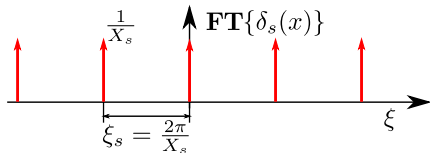
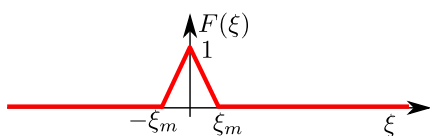
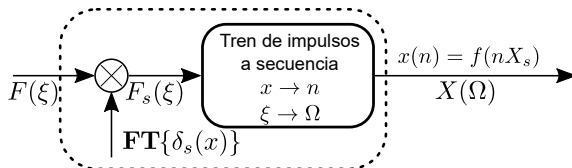
resulta claro que los espectros son iguales sin más que **escalar el eje de pulsación angular por un factor X_s** . Es decir:

$$\Omega = X_s \xi$$

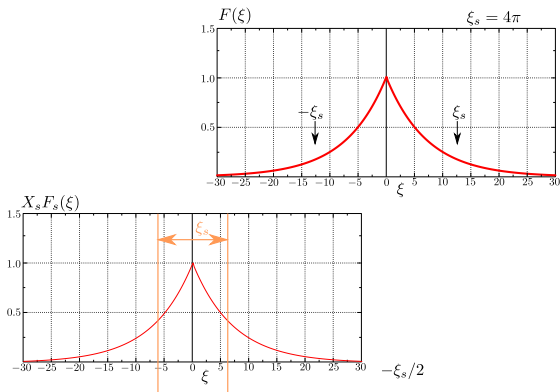
$$X(\Omega) = F_s(\xi = \frac{\Omega}{X_s})$$



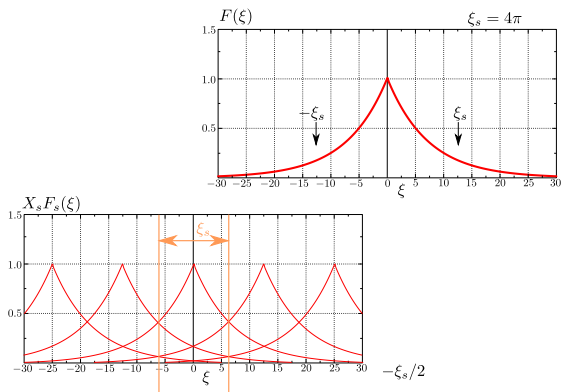
Relación entre la DTFT y la TF de variable continua



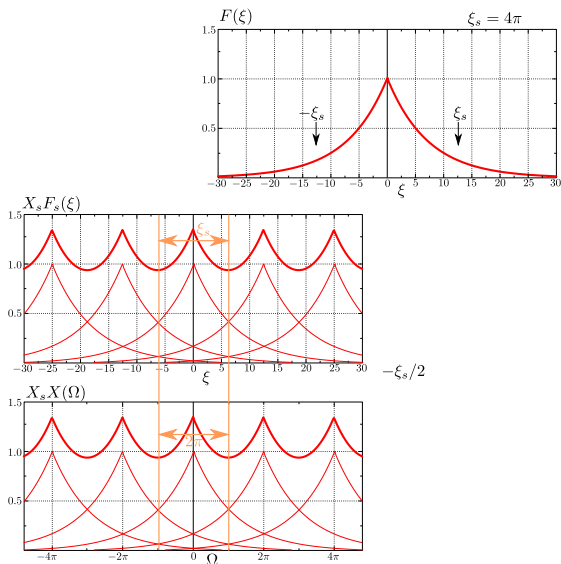
Señal de ancho de banda ilimitado



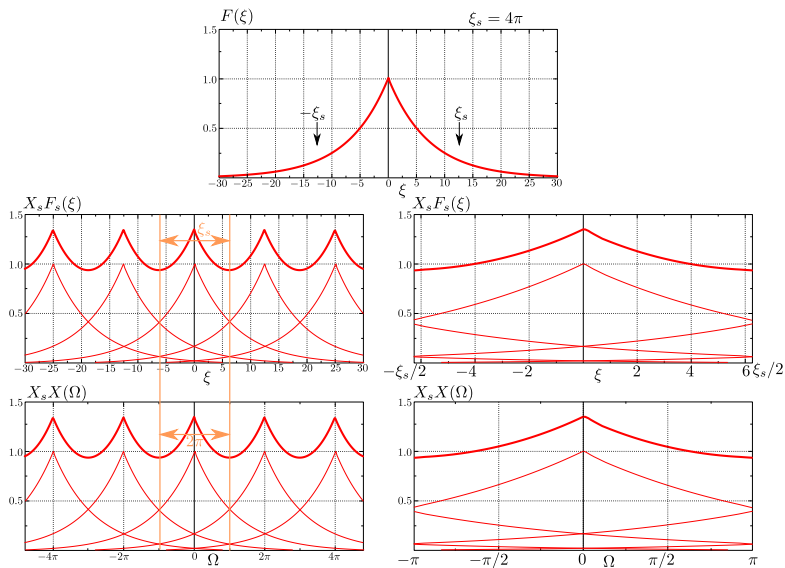
Señal de ancho de banda ilimitado



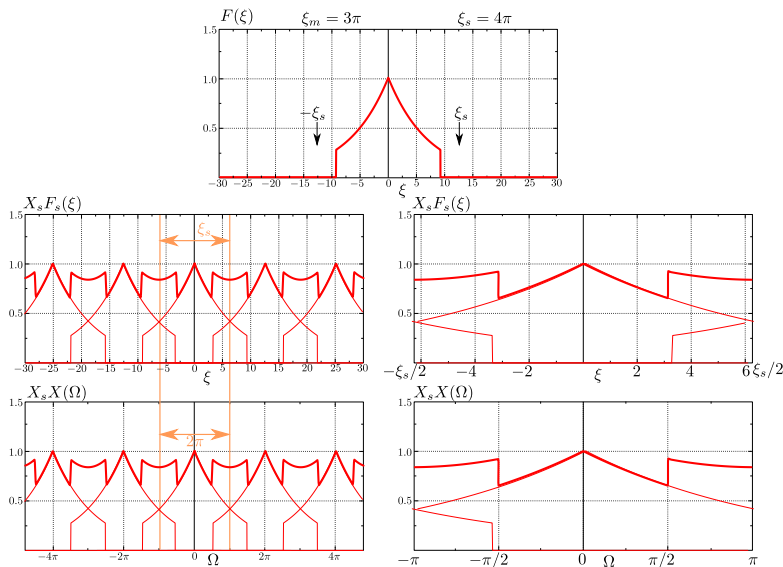
Señal de ancho de banda ilimitado



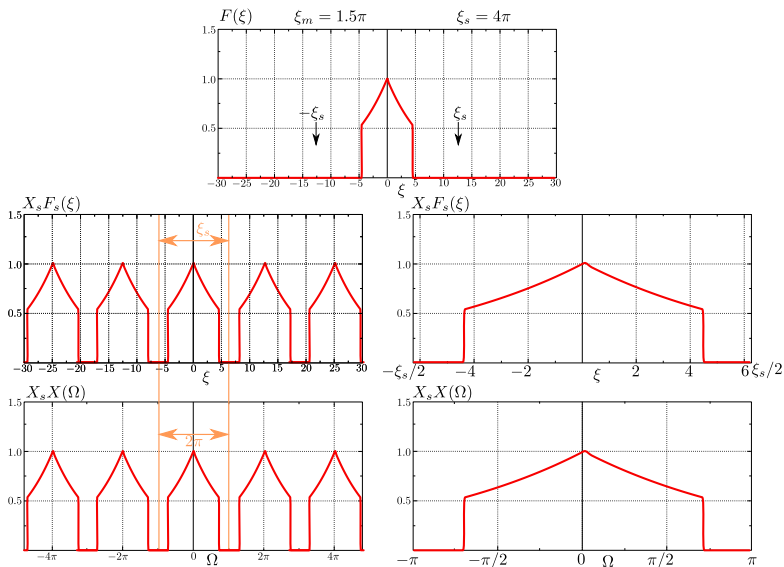
Señal de ancho de banda ilimitado



Señal de ancho de banda limitado - Aliasing

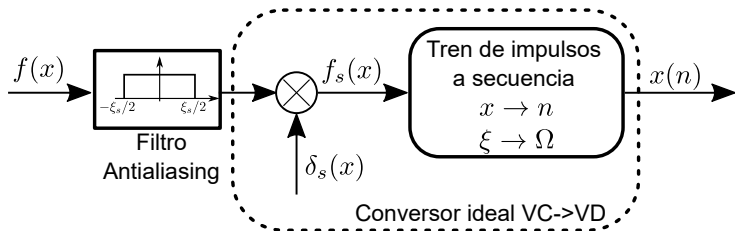


Señal de ancho de banda limitado - Sin aliasing



Filtro antialiasing

- En ocasiones, se coloca un **filtro antialiasing** que limita el ancho de banda de la señal de entrada
- Será un filtro paso bajo de ancho de banda $\xi_s/2$, es decir $H(\xi) = \Pi\left(\frac{\xi}{\xi_s}\right)$.
- Aunque **distorsiona la señal de entrada**, evita problemas de solapamiento.
 - Dependiendo de la aplicación será o no conveniente utilizarlo.



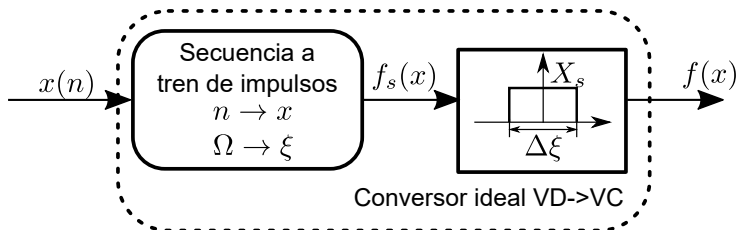
Conversor de variable discreta a variable continua I

- La recuperación será ideal si la señal ha sido muestreada a una frecuencia igual o superior a la de Nyquist, pues en ese caso:

$$F(\xi) = F_s(\xi) X_s \Pi\left(\frac{\xi}{\Delta\xi}\right)$$

con $\Delta\xi = \xi_s$

- Por tanto, el proceso de recuperación de la señal se realiza un procedimiento inverso al anterior (conversión a tren de deltas) junto con un **filtro de recuperación**.



Conversor de variable discreta a variable continua II

- El hecho anterior, expresado en el dominio real

$$f_r(x) = X_s \frac{\Delta\xi}{2\pi} f_s(x) * \text{sinc}\left(\frac{\Delta\xi}{2}x\right)$$

donde la señal recuperada $f_r(x)$ será igual a la señal original $f(x)$ si se cumplen las condición de muestreo de Nyquist y $\xi_m < \frac{\Delta\xi}{2} < \xi_s - \xi_m$.

Fórmula de interpolación de Whittaker–Shannon

Una señal $f(x)$, con pulsación máxima ξ_m , muestreada a una tasa $\xi_s > 2\xi_m$ puede recuperarse de manera ideal a partir de sus muestras mediante la siguiente fórmula de interpolación:

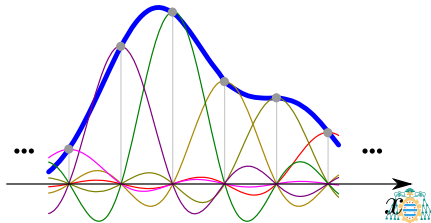
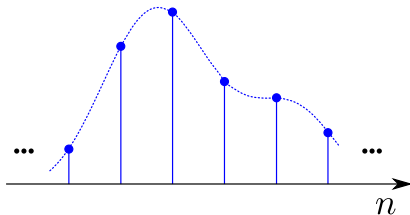
$$f(x) = X_s \frac{\Delta\xi}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nX_s) \text{sinc}\left(\frac{\Delta\xi(x - nX_s)}{2}\right)$$

Conversor de variable discreta a variable continua III

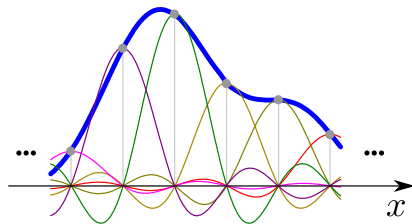
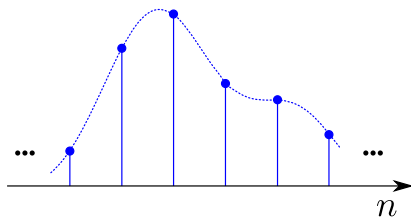
- Habitualmente se escoge el tamaño mínimo del filtro, $\Delta\xi = \xi_s = \frac{2\pi}{X_s}$, pues permite eliminar todo el posible contenido frecuencia no deseado.
- En este último caso:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nX_s) \operatorname{sinc}\left(\pi \frac{(x - nX_s)}{X_s}\right)$$

- Es interesante ver que los **máximos** de cada sinc coinciden con los **nulos** del resto de sinc y, por tanto, se respeta el valor en el punto.



Conversor de variable discreta a variable continua IV



- Observe como, al interpolar con sincs, somos capaces de reconstruir la señal original.
 - Se dice que es un **filtro interpolador ideal**.
 - En la práctica, no es posible utilizar sincs, y se opta por **soluciones subóptimas** (retenedor de orden cero, interpolador lineal, sincs truncadas, etc.)



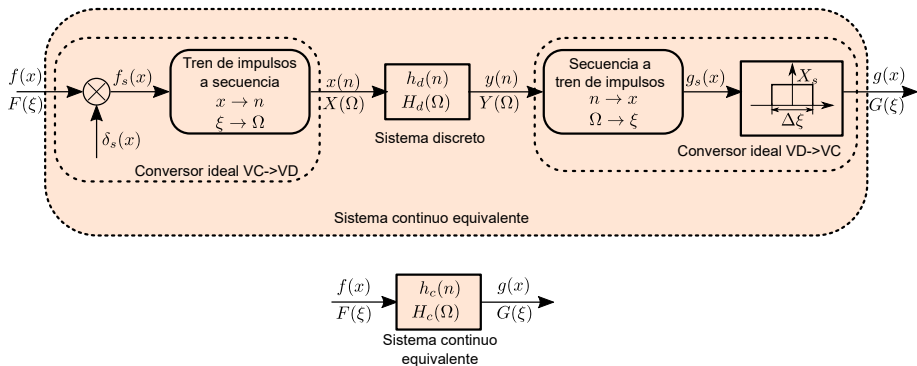
Frecuencias equivalentes tras una FFT

- Cuando se muestrea una señal $f(x)$, es posible estimar su espectro, posiblemente contaminado por aliasing, de forma eficiente mediante una FFT.
- Si se han tomado N muestras de una señal, a una tasa X_s , cuando se aplica una FFT, se obtendrán muestras en las siguientes pulsaciones espectrales:

$$\xi_m = m \frac{2\pi}{N} \frac{1}{X_s}$$



Modelado de un SLI de VC mediante un SLI de VD



- Si se cumplen las condiciones de Nyquist para la señal de entrada, el sistema de VD es equivalente al siguiente sistema de VC:

$$H_c(\xi) = H_d(\xi X_s) \Pi\left(\frac{\xi}{\xi_s}\right) = \begin{cases} H_d(\xi X_s) & |\xi| < \xi_s/2 \\ 0 & |\xi| > \xi_s/2 \end{cases}$$



Modelado de un SLI de VC mediante un SLI de VD

Ejercicio

Hemos estudiado que un sistema que consiste en el producto de una señal con otra señal $p(x)$, no es, en general, invariante. Estudie si el sistema continuo equivalente es invariante o no y, en caso afirmativo, analice bajo que condiciones.



Modelado de un SLI de VC mediante un SLI de VD

Ejercicio

Dada una señal con espectro $F(\xi) = e^{-a|\xi|}$:

- Calcule el espectro $F_s(\xi)$ para una tasa de muestreo arbitraria ξ_s
- Calcule la señal $f(x)$ en el dominio real.
- Calcule la señal reconstruida $f_r(x)$ en el dominio real.
- Repita el ejercicio para una señal de ancho de banda limitado $F(\xi) = e^{-a|\xi|} \Pi\left(\frac{\xi}{2\xi_m}\right)$

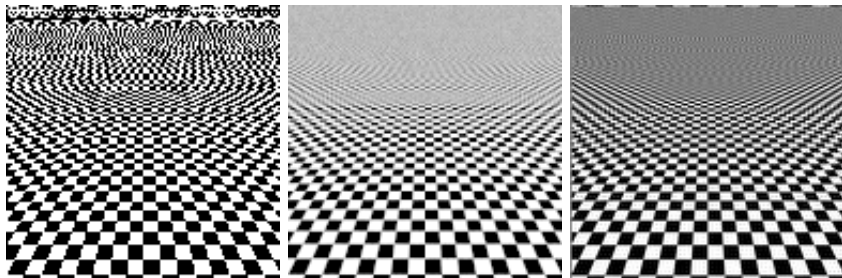
Solución

Solución en los apuntes del campus virtual.



Ejemplo: antialiasing en imágenes

Aquellas imágenes con variaciones rápidas pueden verse afectadas por aliasing cuando se representan en pantallas con muestras discretas (i.e., píxeles).



La imagen de la izquierda muestra la imagen sin filtrar mientras que la imagen central muestra la imagen tras aplicar un filtro de media móvil (ie., un pulso en el dominio real). La imagen de la derecha se corresponden con el resultado de un filtro ideal (una sinc en el dominio real).



Ejemplo: agua con luz estroboscópica

Disponible en <https://www.youtube.com/watch?v=OtxlQTmx1LE>

Click!



Ejemplo: agua con luz estroboscópica

Disponible en <https://youtu.be/D1LnySRbO5U?t=5>

Click!



Ejemplo: video de ruedas de un coche

Disponible en https://youtu.be/B8EMI3_0TO0

Click!

