

La Transformada de Fourier de Señales de Variable Discreta

Tema 10

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

Índice

- 1 Introducción
- 2 Ecuaciones de análisis y síntesis
 - La transformada de Fourier a partir del desarrollo en serie
- 3 Criterios de convergencia
- 4 Propiedades
- 5 Pares transformados de algunas señales de variable discreta
- 6 Transformada de Fourier y los SLI de variable discreta
- 7 Transformada Discreta de Fourier (DFT)
 - Relación entre el DSF y la TF de señales de variable discreta
 - La Transformada de Fourier Discreta
 - La Transformada de Fourier Rápida (FFT)
- 8 Apéndices



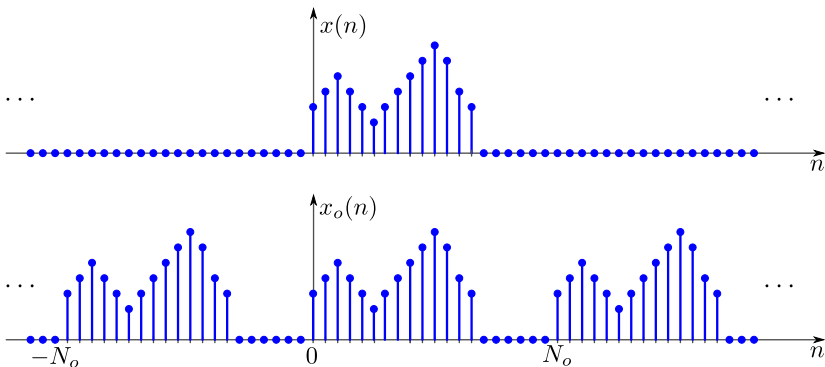
La transformada de Fourier de señales de variable discreta

- Al igual que se define una transformada de Fourier para **señales aperiódicas** de variable continua, se puede definir una **Transformada de Fourier para señales de variable discreta**
 - Nuevamente, con la ayuda de distribuciones, será posible aplicar dicha transformación a señales periódicas.
- Una notación habitual, y que no utilizaremos, es denominarla **DTFT** (*Discrete Time Fourier Transform*).
 - Puede resultar “confuso” pues no siempre se aplica en el dominio del tiempo.
- Se puede derivar de manera análoga al caso continuo (límite del DSF cuando el periodo tiende a infinito).



La TF de señales discretas como límite del DSF I

- Consideraremos el caso en el que una señal, *a priori* finita, la cual es “periodificada”.
- El desarrollo puede generalizarse con facilidad a señales infinitas.



La TF de señales discretas como límite del DSF II

- Particularizando las ecuaciones que gobiernan el DSF de señales discretas, tenemos:

$$x_0(n) = \sum_{m=0}^{N_0-1} a(m)e^{jm\Omega_0 n}, \quad a(m) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x_0(n)e^{-jm\Omega_0 n}, \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

- Puesto que la señal es finita, podemos extender los límites del sumatorio:

$$a(m) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jm\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0} X(m\Omega_0),$$

donde se ha definido la función de variable continua

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n},$$

es importante observar que esta señal tiene **periodo 2π** , es decir, $X(\Omega) \in P(2\pi)$.

$$X(\Omega + 2\pi) = X(\Omega)$$

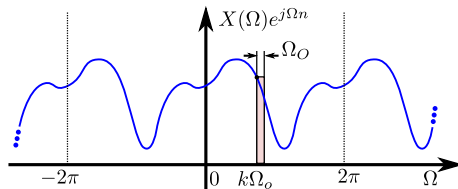


La TF de señales discretas como límite del DSF III

- Sustituyendo la nueva variable en la ecuación de síntesis del DSF

$$x_0(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{N_0-1} X(m\Omega_0) e^{jm\Omega_0 n} \Omega_0.$$

- Nuevamente, dicho sumatorio se puede interpretar como una integral de Riemann en el intervalo $(0, 2\pi)$.



- Finalmente, podemos tomar el límite

$$x(n) = \lim_{N_0 \rightarrow \infty} x_0(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$



Ecuaciones de análisis y síntesis

- El desarrollo anterior nos sugiere una nueva transformación para señales discretas aperiódicas.
- Este desarrollo será la Transformada de Fourier de señales de variable discreta.
- La **ecuación de síntesis** viene dada por

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega.$$

donde se ha tenido en cuenta que $X(\Omega)e^{j\Omega n}$ es una función periódica, con periodo 2π y, por tanto, la integral puede realizarse a lo largo de cualquier intervalo.

- Mientras que la **ecuación de análisis** viene dada por

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n}$$



Relación con la teoría general

- Las ecuaciones de análisis (o transformada de Fourier) y síntesis (o transformada inversa de Fourier) son idénticas a las de la transformada general si se escogen **funciones base** de tipo

$$\phi(n; \Omega) = e^{j\Omega n}$$

- Los espacios vectoriales, que definirán el correspondiente producto escalar y tipo de combinación lineal (continua), serán $D(\mathbb{Z})$ y $P(2\pi)$

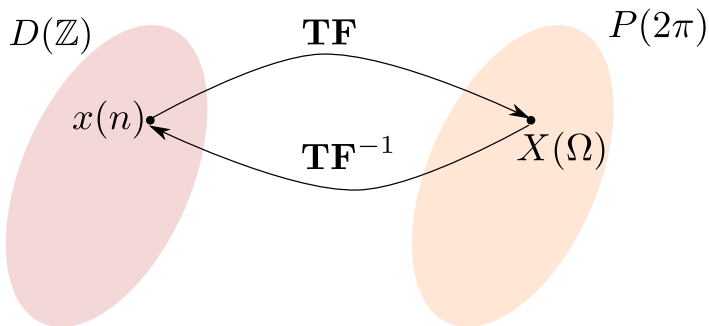
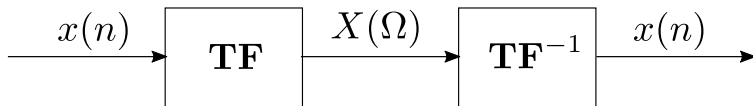
$$X(\Omega) = \langle x(n), \phi(n; \Omega) \rangle$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \text{CL} \{X(\Omega) \phi(n; \Omega)\}$$

- Aplazaremos el estudio de la **ortogonalidad y completitud** de la base para más adelante.



Espacios de señal



Dualidad: Interpretación como Desarrollo en Serie de Fourier

- Podemos interpretar la señal $X(\Omega)$ como una señal periódica de periodo $X_o = 2\pi$ y, por tanto, tendrá un DSF para señales continuas.
- Comparando las ecuaciones con las del DSF para señales continuas se obtiene:

$$\begin{aligned}f_0(x) &\longleftrightarrow a(m) \text{ DSF-VC} \\x(n) = a(-n) &\longleftrightarrow X(\Omega) = f_0(\Omega) \text{ TF-VD}\end{aligned}$$

- Esto nos permite reutilizar las propiedades y pares de transformación ya presentados para el **DSF de señales de variable continua**.



Criterios de convergencia

- La ecuación de análisis conlleva un sumatorio infinito, cuya convergencia debe ser analizada.
- En general, será suficiente la existencia de $X(\Omega)$ para garantizar la convergencia de la transformada inversa.

Criterios de convergencia

- Criterio 1: Secuencia cuadrado sumable

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \Rightarrow \exists X(\Omega) \text{ tal que } \lim_{N \rightarrow \infty} d(X(\Omega), X_N(\Omega)) \rightarrow 0$$

con $X_N(\Omega) = \mathbf{TF}_N(x(n)) = \sum_{n=-N}^N x(n)e^{-j\Omega n}$

- Criterio 2: Secuencia absolutamente sumable

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \Rightarrow |X(\Omega)| < \infty, \forall \Omega \text{ y } x(n) = \mathbf{TF}^{-1}(X(\Omega))$$

Esta demostración se encuentra en los apéndices. Es posible demostrar también que, en este caso, $X(\Omega)$ es una función continua.

SLI estables y Transformada de Fourier

- Recordemos que todo SLI estable si y sólo si es absolutamente sumable

Corolario

Todo SLI de variable discreta que sea estable tendrá una respuesta al impulso cuya Transformada de Fourier existirá (y será continua!).



Propiedades I

Periodicidad	$X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$	
Linealidad	$\alpha x(n) + \beta y(n)$	$\alpha X(\Omega) + \beta Y(\Omega)$
Desplazamiento	$x(n - n_o)$	$X(\Omega)e^{-j\Omega n_o}$
Producto por exp. imaginaria	$x(n)e^{j\Omega_o n}$	$X(\Omega - \Omega_o)$
Conjugado de la función	$x^*(n)$	$X^*(-\Omega)$
Reflexión	$x(-n)$	$X(-\Omega)$
Dualidad con DSF	$f_0(x) \longleftrightarrow a(m)$ DSF-VC $x(n) = a(-n) \longleftrightarrow X(\Omega) = f_0(\Omega)$ TF-VD ^{con $X_0 = 2\pi$}	
Escalado variable indep.	$x(n/p)$	$X(p\Omega)$
Convolución	$x(n) * y(n)$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
Modulación	$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi} X(\Omega) * Y(\Omega)$
Primera diferencia	$x(n) - x(n-1)$	$(1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$
Suma acumulativa	$\sum_{k=-\infty}^n x(k)$	$\frac{1}{(1 - e^{-j\Omega})} X(\Omega) + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
Producto por n	$nx(n)$	$j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Producto escalar	$\langle x(n), y(n) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle X(\Omega), Y(\Omega) \rangle$	
Señales reales	$x(n) = x^*(n)$	$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$
Señales pares	$x(n) = x(-n)$	$X(\Omega) = X(-\Omega)$
Señales impares	$x(n) = -x(-n)$	$X(\Omega) = -X(-\Omega)$



Propiedades II

- En el caso particular de la TF de variable discreta, es importante observar las siguientes propiedades particulares:
 - **Dualidad** con respecto al DSF de variable continua.
 - **Periodicidad** de la función en el dominio espectral $X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$
- Es también relevante observar que, como consecuencia de que la TF mantiene los productos escalares, se puede construir el correspondiente **teorema de Parseval-Plancherel**:

$$E[x(n)] = \frac{1}{2\pi} E_0[X(\Omega)]$$



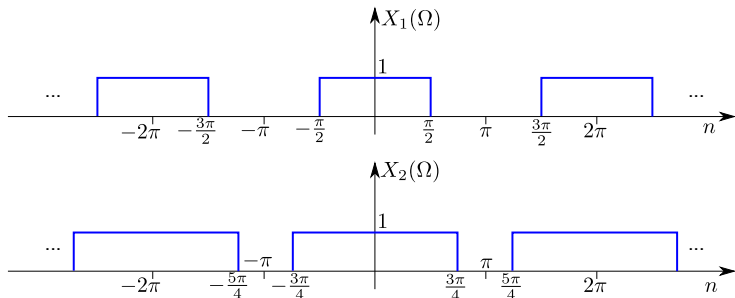
Ejemplo propiedades: Convolución periódica

- Como ejemplo de la convolución periódica, se muestra el espectro de la señal $x(n) = x_1(n)x_2(n)$ con $x_1(n) = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$ y $x_2(n) = \frac{\sin(3\pi n/4)}{\pi n}$



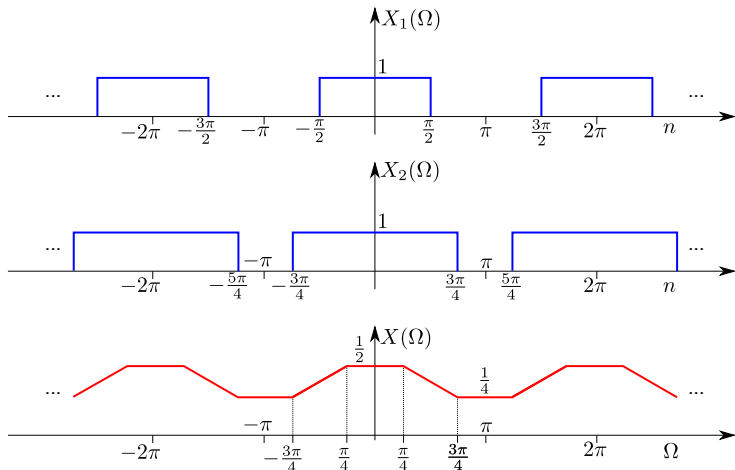
Ejemplo propiedades: Convolución periódica

- Como ejemplo de la convolución periódica, se muestra el espectro de la señal $x(n) = x_1(n)x_2(n)$ con $x_1(n) = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$ y $x_2(n) = \frac{\sin(3\pi n/4)}{\pi n}$



Ejemplo propiedades: Convolución periódica

- Como ejemplo de la convolución periódica, se muestra el espectro de la señal $x(n) = x_1(n)x_2(n)$ con $x_1(n) = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$ y $x_2(n) = \frac{\sin(3\pi n/4)}{\pi n}$



Ejemplos de pares transformados I

$$e^{j\Omega_o n} \leftrightarrow 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_o + 2\pi m) = 2\pi \delta_o(\Omega - \Omega_o)$$

- Se demuestra de manera sencilla por la dualidad con el DSF de tiempo continuo y la transformada de $\delta_o(x)$.
- Como consecuencia, si $\Omega_o = 0$:

$$1 \leftrightarrow 2\pi \delta_o(\Omega)$$

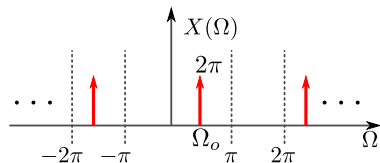
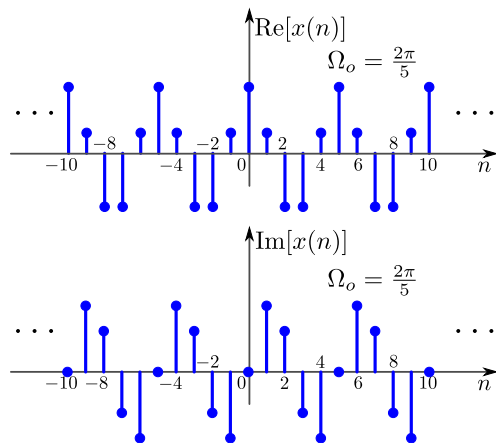
- Este par transformado, nos permite demostrar la **ortogonalidad de las funciones base**:

$$\langle \phi(n, \Omega'), \phi(n, \Omega) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega' n} e^{-j\Omega n} = \mathbf{TF}(e^{j\Omega' n}) = 2\pi \delta_o(\Omega - \Omega')$$

- Al igual que en la Transformada de Fourier de tiempo continuo, la base es ortogonal en el sentido de las **distribuciones**.



Ejemplos de pares transformados I (cont.)

Ejemplo para $\Omega_o = \frac{2\pi}{5}$ 

Ejemplos de pares transformados II

$$\frac{\Delta}{2\pi} \text{sinc}\left(n \frac{\Delta}{2}\right) \leftrightarrow \Pi_{0,\Delta}(\Omega)$$

Demostración

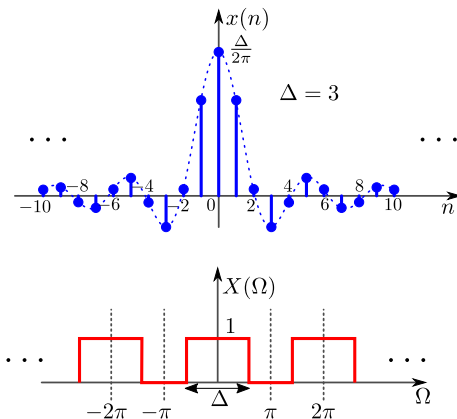
Se demuestra nuevamente por la dualidad con el DSF de tiempo continuo.

- ❶ Conocemos el par $\Pi_{0,\Delta}(x) \leftrightarrow \frac{\Delta}{X_0} \text{sinc}\left(\pi m \frac{\Delta}{X_0}\right)$
- ❷ Haciendo el cambio de variable $X_0 = 2\pi$ y $m = -n$, y aplicando la propiedad de dualidad se obtiene el resultado deseado.

Ejercicio: Ortogonalidad de funciones

Demuestre la ortogonalidad de las siguientes señales $x(n) = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(n \frac{\pi}{2}\right)$ e $y(n) = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(n \frac{\pi}{2}\right) (-1)^n$

Ejemplos de pares transformados II (cont.)



Ejercicio

Estudie el caso para $\Delta > 2\pi$

Ejemplos de pares transformados III

$$\Pi_{2N+1}(n) \leftrightarrow \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \Omega \right]}{\sin \left(\frac{\Omega}{2} \right)}$$

- Esta función es, salvo constantes, una *sinc periódica o función de Dirichlet*.

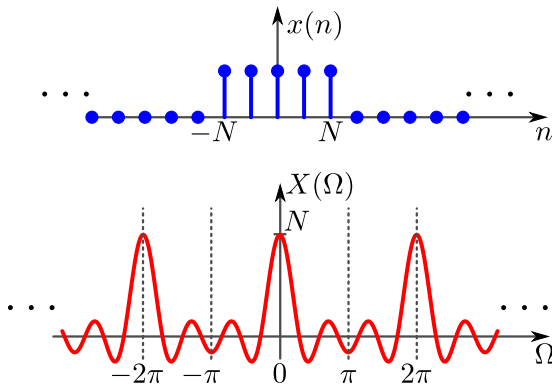
$$D_N(\Omega) = \begin{cases} \frac{\sin(N\Omega/2)}{N\sin(\Omega/2)} & \Omega \neq 2\pi k \\ (-1)^{k(N-1)} & \Omega = 2\pi k \end{cases}$$

- Juega un papel similar a la sinc convencional y es clave para la interpolación de señales periódicas.
- Se puede demostrar que esta función es el resultado de sumar infinitas sincs equiespaciadas por un paso de 2π .



Ejemplos de pares transformados III (cont.)

$$\Pi_{2N+1}(n) \leftrightarrow \frac{\sin \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) \Omega \right]}{\sin \left(\frac{\Omega}{2} \right)}$$



Ejemplos de pares transformados IV

$$a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}, |a| < 1$$

Demostración

Aplicando la fórmula general:

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}},$$

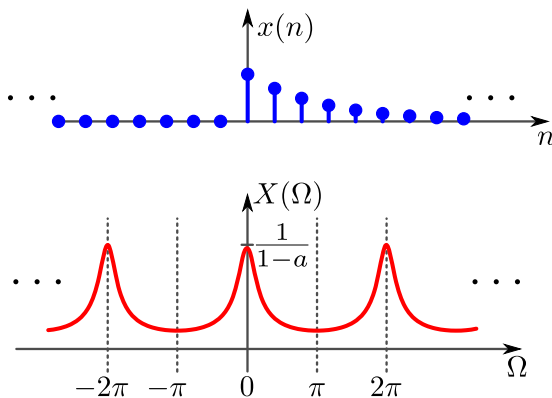
donde se ha tenido en cuenta la fórmula de la suma para series geométricas.

Ejercicio: Espectro exponencial

Realice la representación y calcule la posición de los máximos y mínimos para $a = 0,7$, $a = -0,7$ y $a = 0,7j$

Ejemplos de pares transformados IV

Representación para $a = 0,7$.



Ejercicio de pares transformados

Ejercicio

Calcule la transformada de Fourier de la secuencia $x(n) = a^{|n|}$ con $|a| < 1$

Solución

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} + \frac{ae^{j\Omega}}{1 - ae^{j\Omega}} = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\Omega + a^2}$$



Ejemplos de pares transformados V

$$u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$$

Demostración

La demostración es sencilla teniendo en cuenta la relación con la $\delta(n)$:

$$u(n) - u(n-1) = \delta(n) \Rightarrow \mathbf{TF}(u(n)) (1 - e^{-j\Omega}) = 1$$

por ello, con las propiedades ya conocidas de las distribuciones, y teniendo en cuenta que $(1 - e^{-j\Omega})$ es cero para $\Omega = 2\pi k$:

$$\mathbf{TF}(u(n)) = \frac{1}{(1 - e^{-j\Omega})} + C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k),$$

siendo C una constante a determinar. (continúa)

Ejemplos de pares transformados V

Demostración (continuación)

La constante C se puede obtener observando la TF de una señal impar construida a partir de $u(n)$, por ejemplo:

$$x(n) = u(n) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\delta(n)$$

cuya TF es:

$$X(\Omega) = \frac{1}{(1 - e^{-j\Omega})} + C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) - \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k) - \frac{1}{2}$$

puesto que su TF debe ser impar, y el término $\frac{1}{(1 - e^{-j\Omega})} - \frac{1}{2} = \frac{1 + e^{-j\Omega}}{2(1 - e^{-j\Omega})}$ ya es impar, tenemos que las deltas deben anularse, luego:

$$C - \pi = 0 \Rightarrow C = \pi$$



Ejemplos de pares transformados VI

- Señal periódica:

$$x_o(n) = \sum_{m=0}^{N_o-1} a(m)e^{jm\Omega_o n} \leftrightarrow 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)\delta(\Omega - m\Omega_o),$$

es importante observar que los **límites del sumatorio** se han extendido y se ha aprovechado la periodicidad de los coeficientes $a(m)$.

Demostración

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{N_o-1} a(m)e^{jm\Omega_o n} &\leftrightarrow 2\pi \sum_{m=0}^{N_o-1} a(m) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - m\Omega_o + 2\pi k) = \\ 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N_o-1} a(m)\delta(\Omega - m\Omega_o + 2\pi k) &= 2\pi \left(\sum_{m=0}^{N_o-1} a(m)\delta(\Omega - m\Omega_o) \right) * \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + 2\pi k) \right) \end{aligned}$$

(continúa en página siguiente)

Ejemplos de pares transformados VI (cont.)

Demostración (continuación)

- A partir del razonamiento anterior obtenemos la siguiente representación, cuya inspección, junto con la periodicidad de los $a(m)$, valida el par transformado.

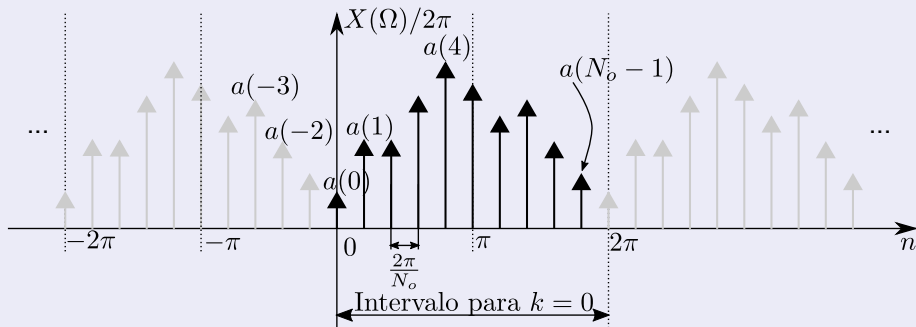


Tabla de funciones aperiódicas

Delta	$\delta(n)$	1
Delta desplazada	$\delta(n - n_o)$	$e^{-j\Omega n_o}$
Heaviside	$u(n)$	$\frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi m)$
Exponencial imaginaria	$e^{j\Omega_o n}$, con $\Omega_o/2\pi$ irracional	$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_o - 2\pi m)$
Pulso unidad de ancho $2N+1$	$\Pi_{2N+1}(n)$	$\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})\Omega]}{\sin(\frac{\Omega}{2})}$
Exponenciales	$a^n u(n)$, $ a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
	$(n+1)a^n u(n)$, $ a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^2}$
	$\frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!} a^n u(n)$, $ a < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\Omega})^p}$



Tabla de funciones periódicas

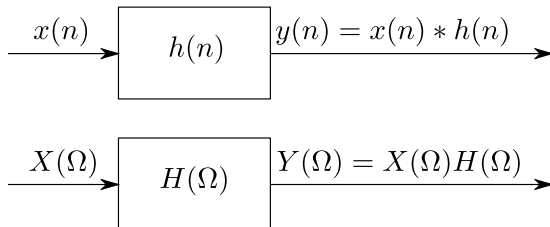
Exponencial imaginaria	$e^{jk\Omega_o n}$	$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_o + 2\pi m)$
Coseno	$\cos(k\Omega_o n)$	$\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_o + 2\pi m) + \pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + k\Omega_o + 2\pi m)$
Seno	$\sin(k\Omega_o n)$	$\frac{\pi}{j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_o + 2\pi m) - \frac{\pi}{j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega + k\Omega_o + 2\pi m)$
Constante	K	$2\pi K \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi m)$
DSF	$\sum_{m=\langle N_o \rangle} a(m) e^{jm\Omega_o n}$	$2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\Omega - m\Omega_o)$
Tren de deltas	$\delta_o(n)$	$\frac{2\pi}{N_o} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - m\Omega_o)$
Tren de pulsos	$\Pi_{o,2N+1}(n)$	DSF con $a(m) = \frac{1}{N_o} \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})m\Omega_o]}{\sin(\frac{m\Omega_o}{2})}$



Transformada de Fourier y los SLI de variable discreta

- Al igual que en el caso continuo, la propiedad de convolución nos permite calcular el **espectro de la señal de salida** con un simple **producto en el dominio espectral**

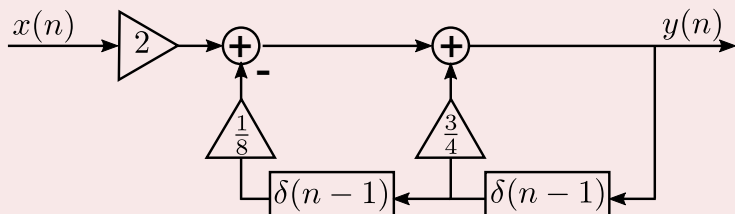
$$x(n) * h(n) \leftrightarrow X(\Omega)H(\Omega)$$



SLI y Transformada de Fourier

Ejercicio

Dado el siguiente sistema:



- 1 Calcule la ecuación en diferencias que lo modela.
- 2 Calcule la respuesta al impulso en el dominio espectral.
- 3 Calcule la respuesta al impulso en el dominio real.
- 4 Calcule la respuesta a una entrada $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$.

Relación entre el DSF y la TF de señales de VD

- Recordemos que hemos definido los coeficientes del DSF de una señal periódica discreta $x_o(n)$ como:

$$a(m) = \frac{1}{N_o} \sum_{n=0}^{N_o-1} x_o(n) e^{-jm\Omega_o n}$$

- Si denotamos por $x(n)$ a la señal acotada en un periodo una señal

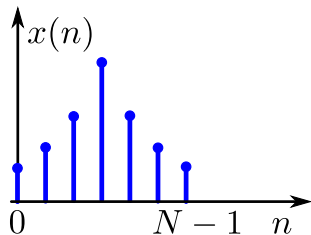
$$a(m) = \frac{1}{N_o} \sum_{n=0}^{N_o-1} x(n) e^{-jm\Omega_o n} = \frac{1}{N_o} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jm\Omega_o n}$$

- Comparando con la definición de TF, podemos concluir que:

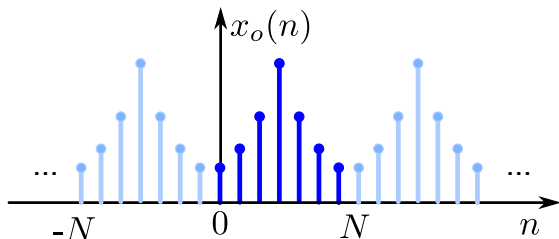
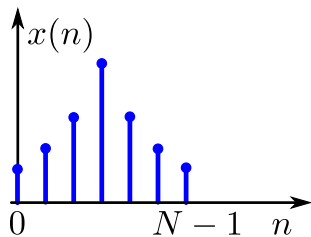
$$a(m) = \frac{1}{N_o} X(m\Omega_o)$$



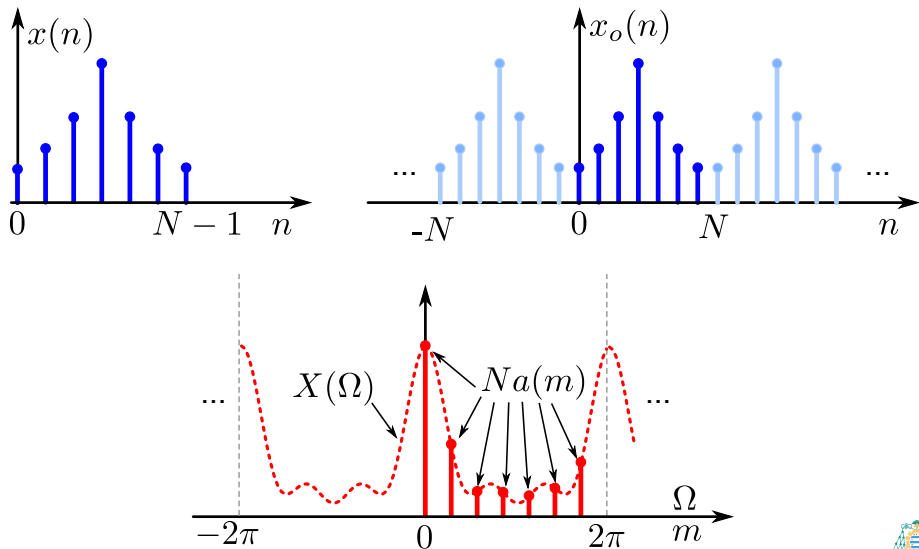
Relación entre el DSF y la TF de señales de VD



Relación entre el DSF y la TF de señales de VD



Relación entre el DSF y la TF de señales de VD



Relación entre el DSF y la TF de señales de VD

Muestreo del espectro de la TF

Una señal de longitud N puede caracterizarse con tan sólo N muestras (equiespaciadas) de su espectro.

- Este hecho es la base para el **cálculo numérico** de Transformadas de Fourier.
 - En el procesamiento numérico (ordenadores, microcontroladores, etc.) no se puede manejar un continuo de valores
 - La estrategia habitual es utilizar muestras de una señal o de su espectro
 - Por eso es de especial interés tener una herramienta que nos permita obtener muestras (representativas) del espectro de una señal.
- En este contexto se define la **Transformada de Fourier Discreta** (Discrete Fourier Transform DFT)
- A nivel operacional (que no conceptual) es **completamente equivalente al DSF de señales de variable discreta**.
- Siempre opera sobre **señales de longitud finita**.



Relación entre el DSF y la TF de señales de VD

Ecuaciones de análisis y síntesis de la DFT

$$X_d(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jm\Omega_o n}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X_d(m) e^{jm\Omega_o n}$$

con $\Omega_o = \frac{2\pi}{N}$.

- Nótese que, con respecto al DSF, se ha movido el factor $1/N$ de la ecuación de análisis a la ecuación de síntesis para que así las muestras de la DFT coincidan con el valor del espectro de la DTFT

$$X_d(m) = X(m\Omega_o)$$



Notación DFT

- En cualquier caso, **no existe homogenización respecto a la notación** de la DFT (y las transformadas de Fourier en general):
 - El libro *Numerical Recipes* intercambia el signo de las exponenciales.
 - La librería *FFTW* no realiza la normalización con $1/N$.
 - Matlab usa la *FFTW*... pero sí incluye la normalización (en la transformada inversa).
 - Los libros “Señales y Sistemas” y “Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto”, ambos del Prof. Alan Oppenheim, definen de manera diferente el DSF de variable discreta (que luego da pie a la DFT).



Interpolación del espectro de la TF

- En ocasiones, puede ser de interés recuperar muestras del espectro a partir de un conjunto más pequeño de muestras.
- Si la longitud de la señal es impar $N = 2M + 1$, la señal en un periodo puede expresarse como:

$$x(n) = x_o(n) \Pi_{2M+1}(n - M)$$

- Por tanto, el espectro vendrá dado por la siguiente convolución *periódica*:

$$X(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m\Omega_o) \delta(\Omega - m\Omega_o) \right) * \left(\frac{\sin \left[\frac{N}{2} \Omega \right]}{\sin \left(\frac{\Omega}{2} \right)} e^{-j\Omega \frac{N-1}{2}} \right)$$

- Por tanto, es posible recuperar, de manera perfecta, el espectro de la señal a partir de sus muestras como:

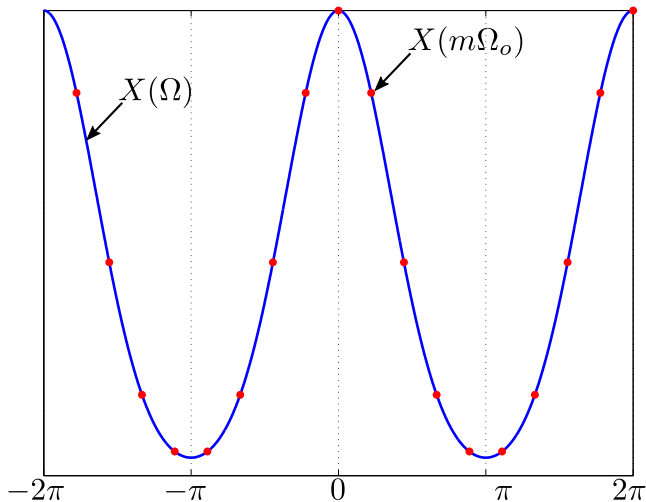
$$X(\Omega) = \sum_{m=\langle N \rangle} X(m\Omega_o) D_N(\Omega - m\Omega_o) e^{-j(\Omega - m\Omega_o) \frac{N-1}{2}}$$

siendo $D_N(\Omega)$ la función de Dirichlet o sinc periódica.

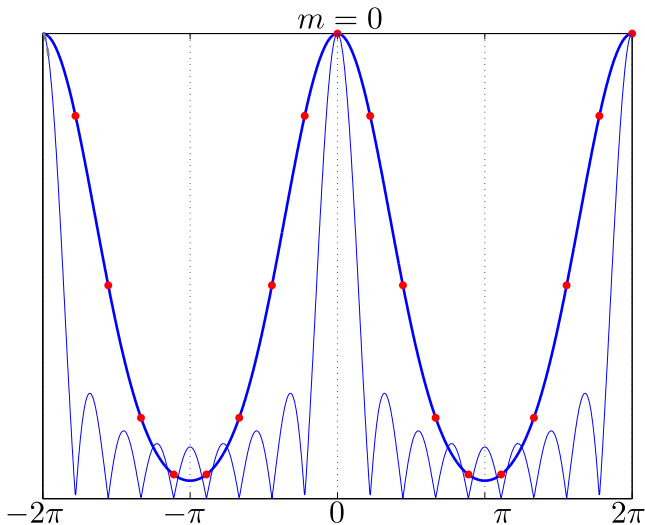
- Un razonamiento similar puede realizarse para señales de longitud par.



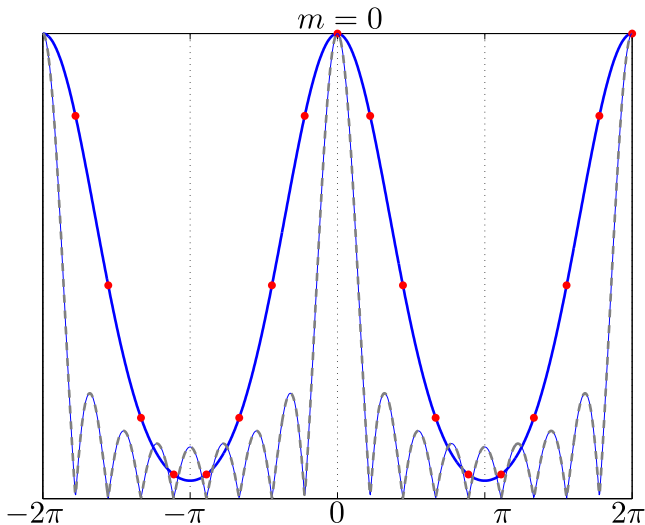
Interpolación del espectro de la TF



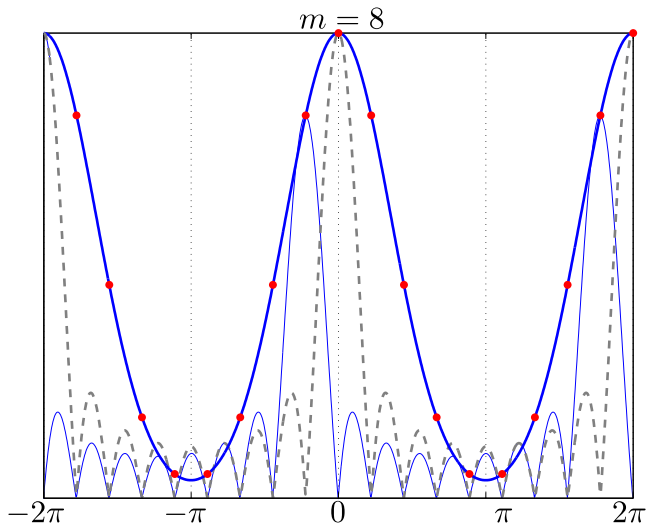
Interpolación del espectro de la TF



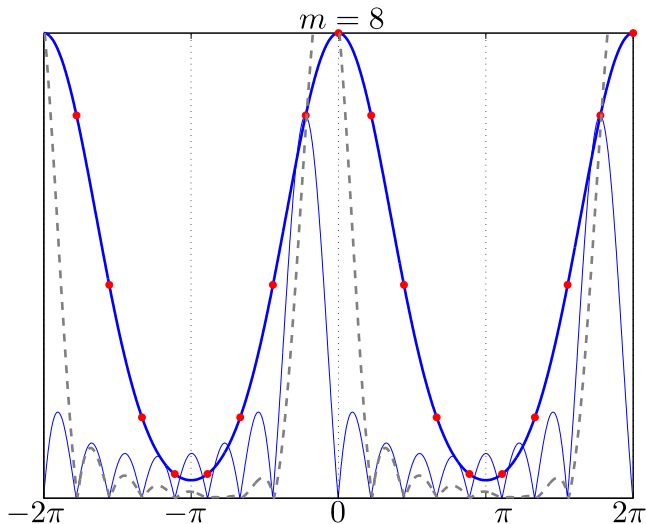
Interpolación del espectro de la TF



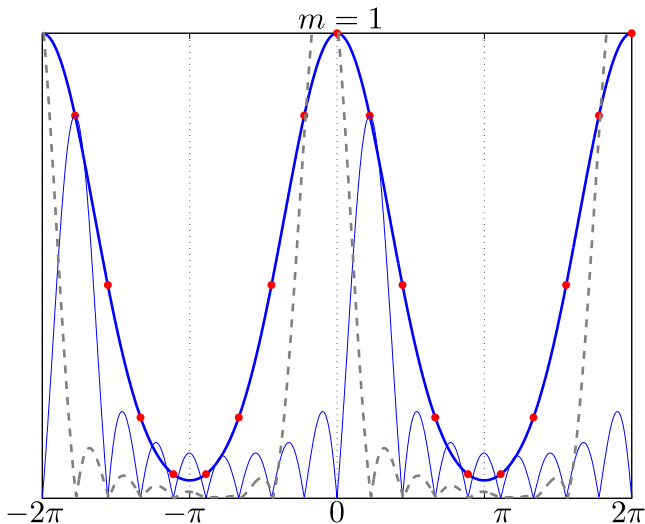
Interpolación del espectro de la TF



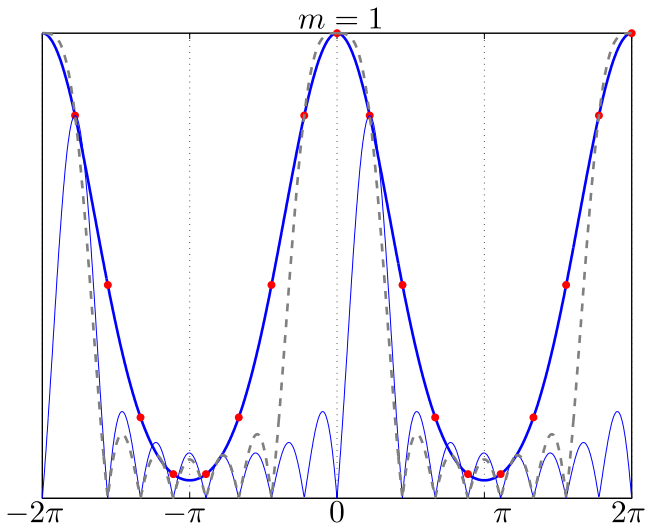
Interpolación del espectro de la TF



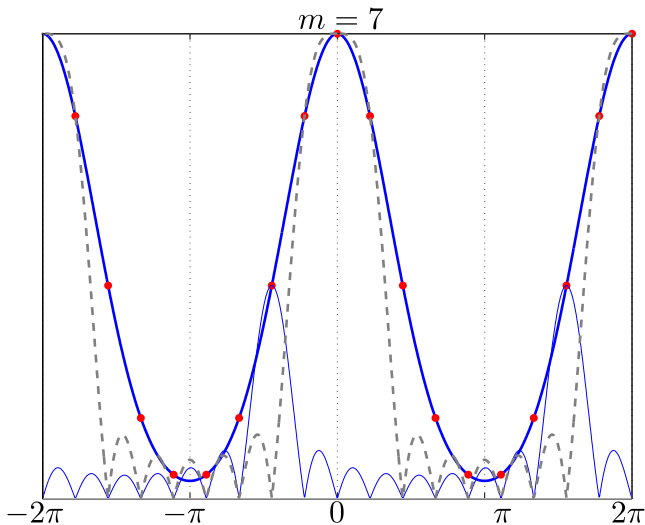
Interpolación del espectro de la TF



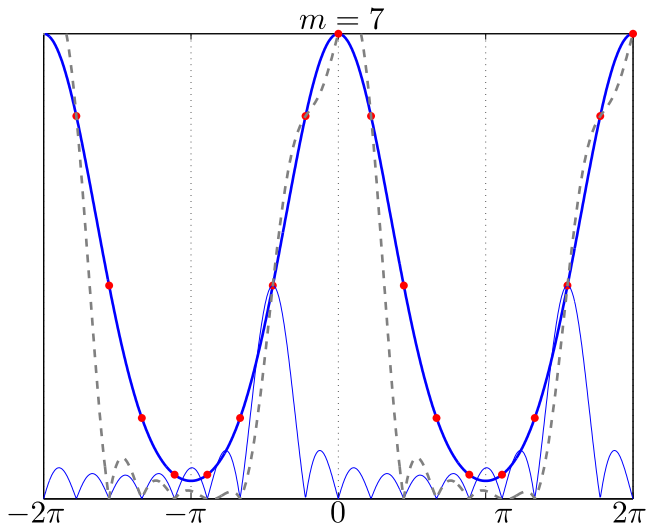
Interpolación del espectro de la TF



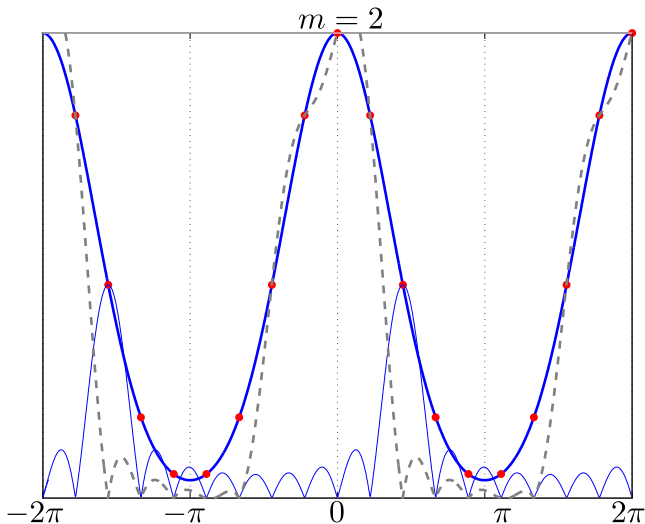
Interpolación del espectro de la TF



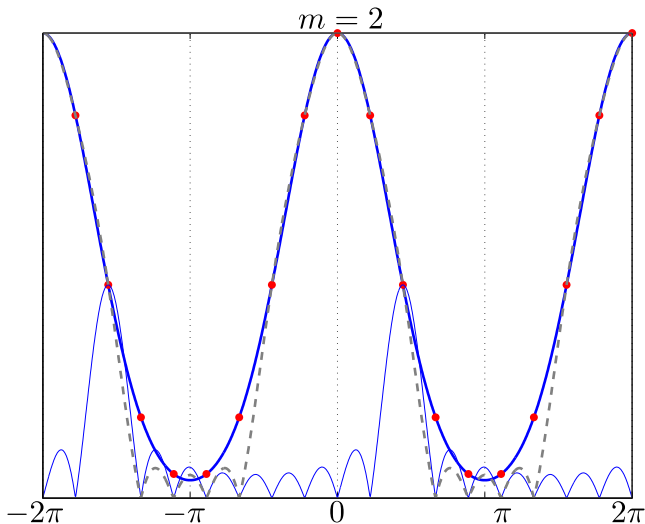
Interpolación del espectro de la TF



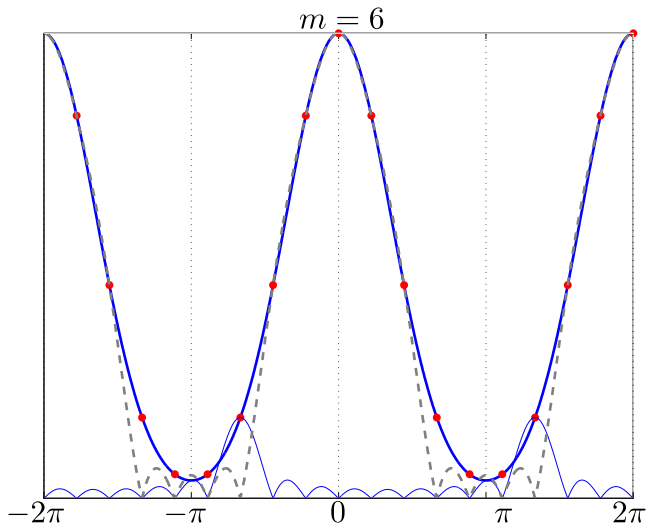
Interpolación del espectro de la TF



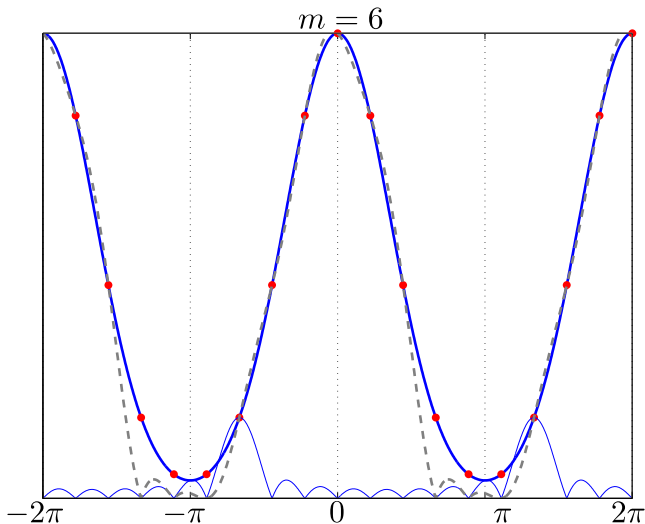
Interpolación del espectro de la TF



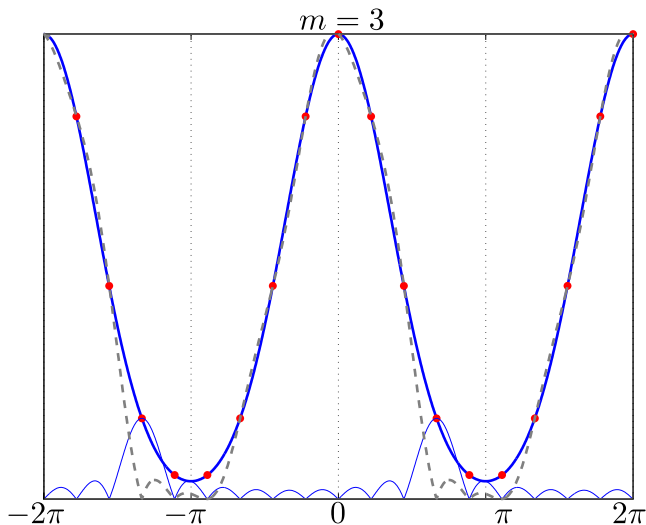
Interpolación del espectro de la TF



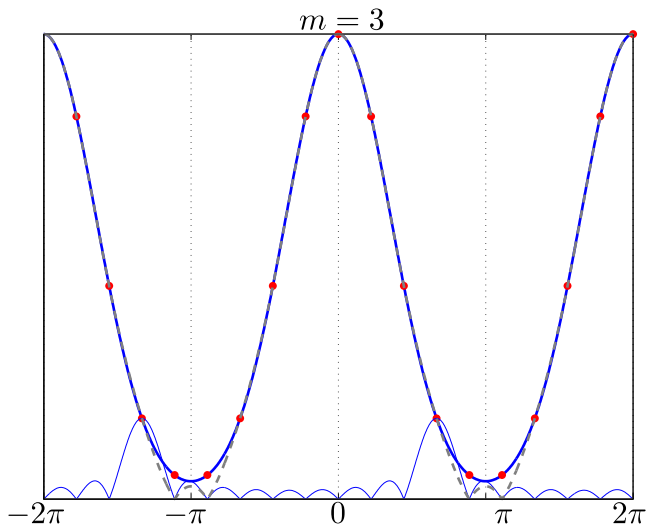
Interpolación del espectro de la TF



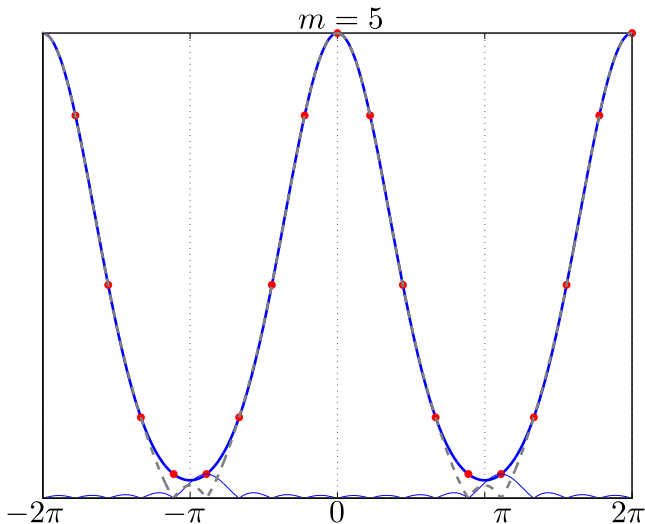
Interpolación del espectro de la TF



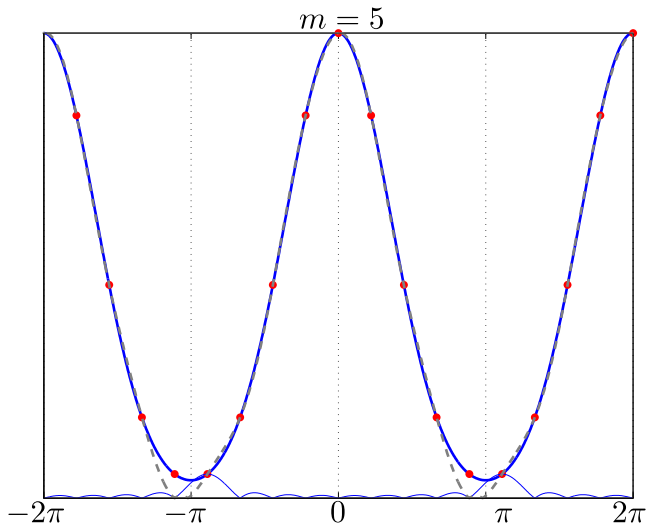
Interpolación del espectro de la TF



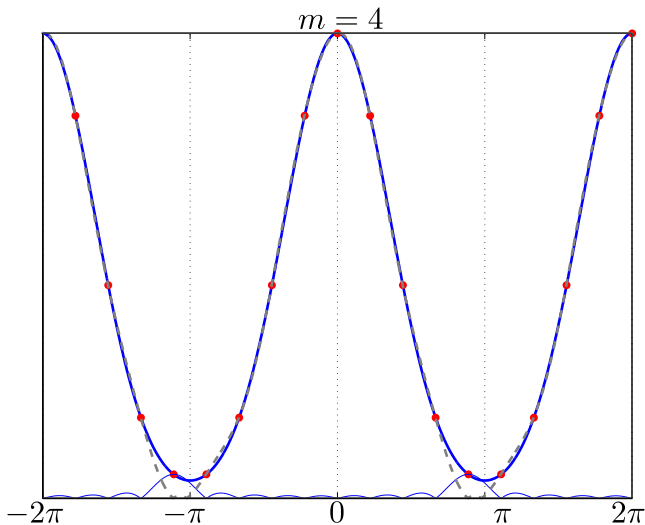
Interpolación del espectro de la TF



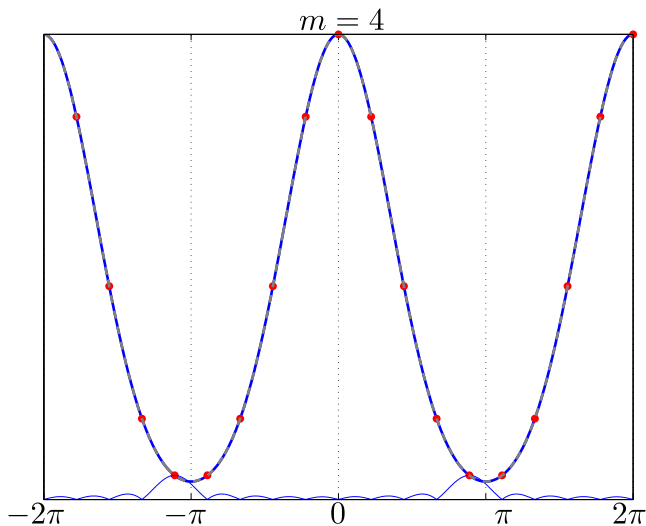
Interpolación del espectro de la TF



Interpolación del espectro de la TF



Interpolación del espectro de la TF



Zero padding I

- Hemos visto como la DFT nos permite obtener N muestras del espectro de una señal de longitud N .
- Una posible forma de obtener más muestras es a partir de la fórmula de interpolación anterior, sin embargo dicha **interpolación es computacionalmente costosa**.
- Una forma alternativa es utilizar la técnica conocida como relleno por ceros (**zero padding**):
 - Esta técnica se basa en calcular añadir M ceros a la secuencia, dando lugar a una secuencia $x'(n)$ de longitud $N' = N + M$
 - Su DFT vendrá dada por:

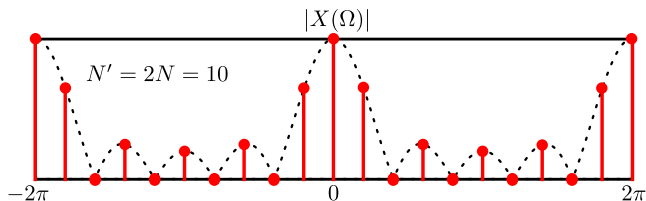
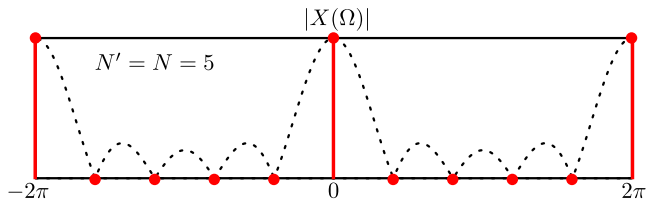
$$X'_d(m) = \sum_{n=0}^{N'-1} x'(n) e^{-jm\Omega'_o n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jm\frac{2\pi}{N'} n}$$

- Por tanto $X'_d(m) = X(m\frac{2\pi}{N'})$
- Gracias al zero padding, podemos obtener también muestras del espectro de $x(n)$ pero con una menor separación entre ellas.



Zero padding II

Ejemplo de cálculo de muestras del espectro de la señal $\Pi_{2N+1}(n-N)$ con $2N+1=5$



Zero padding III: Interpolación

- Esta estrategia permite la **interpolación eficiente** de señales de las que se tiene un conjunto de muestras equiespaciadas.
- La estrategia a seguir consiste en **DFT+Relleno por ceros+IDFT**:
 - La señal no tiene porque corresponderse a una TF, es decir, puede ser una señal arbitraria aunque en ese caso los resultados no serán perfectos.
 - Como es de esperar, la calidad de la interpolación dependerá de cuantas muestras y, sobretudo, con que frecuencia (espacial o temporal) han sido tomadas.
- La interpolación se realiza en términos de la función sinc periódica (o función de Dirichlet) y suponiendo que la señal es periódica.



La Transformada de Fourier rápida (Fast Fourier Transform, *FFT*)

- La complejidad de calcular una DFT de manera directa es $O(N^2)$ pues requiere un producto matriz-vector.
- Existen algoritmos computacionales que aprovechando la forma de las bases utilizadas, pueden reducir el número de operaciones requerido reduciendo la **coste complejidad** a

$$O(N \log N)$$

- Estos algoritmos se conocen como *Fast Fourier Transform (FFT)* y son especialmente eficientes cuando N es una **potencia de 2**.
 - Es habitual rellenar con ceros la secuencia para lograr que la secuencia de entrada sea una potencia de 2.
- El uso de la FFT está tan extendido que es habitual referirse a la DFT (e incluso a la TF) con este término.



Convolución periódica y aperiódica mediante la FFT

- El cálculo directo de una convolución conlleva una complejidad computacional $O(N^2)$.
- Dada la complejidad computacional de la FFT, si se desea calcular una **convolución periódica**, es más eficiente realizar las tres siguientes operaciones:
 - 1 calcular una FFT ($O(N \log N)$),
 - 2 una multiplicación ($O(N)$)
 - 3 una FFT inversa ($O(N \log N)$)

Ejercicio: Convolución aperiódica mediante la FFT

Proponga una estrategia para calcular una convolución aperiódica mediante la FFT.



Apéndices

Demostración criterio de convergencia 2

- Demostraremos aquí el Criterio 2 de convergencia

$$|X(\Omega)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|$$

Si sustituimos, la ecuación de análisis en la de síntesis tendremos:

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)e^{-j\Omega m} \right) e^{j\Omega n} d\Omega$$

- Puesto que la suma es absolutamente sumable, en virtud del teorema de Fubini-Tonelli, la integral y el sumatorio pueden intercambiarse

$$\hat{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega(n-m)} d\Omega \right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \delta(m-n) = x(n)$$

donde el valor de la integral $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\Omega(n-m)} d\Omega = \delta(m-n)$ es trivial de demostrar.

