

Señales periódicas: el desarrollo en serie de Fourier (DSF) de señales de variable discreta

Tema 9

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

Índice

- 1 Exponenciales imaginarias como funciones base
 - Repaso álgebra de espacio
 - Funciones base
 - Propiedades de las funciones base
 - Ecuaciones de análisis y síntesis
- 2 Criterios de convergencia
- 3 Propiedades
 - Propiedades del DSF en variable discreta
- 4 Ejemplos pares transformados
- 5 Relación del DSF de variable discreta y los SLI



Álgebra de espacio

- En este tema se considerará el **espacio de señal** $D(N_0)$, en el cual se definen las siguientes operaciones:

$$\langle x_0(n), y_0(n) \rangle = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) y_0^*(n)$$

$$\|x(n)\|^2 = \langle x_0(n), x_0(n) \rangle$$

$$d(x_0(n), y_0(n)) = \|x_0(n) - y_0(n)\|$$

- Es también conveniente recordar que la **convolución periódica** para señales discretas se define como:

$$x_0(n) * y_0(n) = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} x_0(k) y_0(n-k)$$



Funciones base

- Puesto que el espacio de señal es de dimensión N_0 , la base será finita y se escribirá de la forma $\phi(n; m)$.
- En este caso, las transformadas de interés para la asignatura tomaría la forma:

$$a(m) = \frac{1}{\|\phi(n; m)\|^2} \langle x_0(n), \phi(n; m) \rangle$$

$$x_0(n) = \sum_{m=0}^{N_0-1} a(m) \phi(n; m).$$

- Demostraremos a continuación que una base completa es la formada por:

$$\phi(n; m) = e^{jm\Omega_0 n} \text{ con } \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}.$$

- Es interesante observar que las funciones base son periódicas tanto en n como en m

$$\phi(n; m) = \phi(n; m + N_0), \quad \phi(n; m) = \phi(n + N_0; m)$$



Ortogonalidad de la base

- Comprobemos la **ortogonalidad** de las funciones base:

$$\begin{aligned} \langle \phi(n; m_1), \phi(n; m_2) \rangle &= \sum_{n=0}^{N_0-1} e^{j(m_1-m_2)\frac{2\pi}{N_0}n} = \sum_{n=0}^{N_0-1} \left(e^{j(m_1-m_2)\frac{2\pi}{N_0}} \right)^n = \\ &= \begin{cases} N_0 & \text{si } m_1 - m_2 = kN_0 \\ \frac{1-e^{j(m_1-m_2)\frac{2\pi}{N_0}N_0}}{1-e^{j(m_1-m_2)\frac{2\pi}{N_0}}} = 0 & \text{si } m_1 - m_2 \neq kN_0 \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Las funciones base entre 0 y $N_0 - 1$ son ortogonales entre sí y, por ello, son también **linealmente independientes**. Puesto que además **la dimensión del espacio vectorial es N_0** , podemos afirmar que:

Funciones base

Las funciones base del tipo $\phi(n; m) = e^{jm\Omega_0 n}$, con $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$, son una *base completa* del espacio de señal $D(N_0)$.

Ecuaciones de análisis y síntesis

Ecuaciones análisis y síntesis

Las ecuaciones que definen la DSF en variable discreta son:

$$a(m) = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) e^{-jm\Omega_0 n}$$

$$x_0(n) = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} a(m) e^{jm\Omega_0 n}$$

donde se ha definido $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$

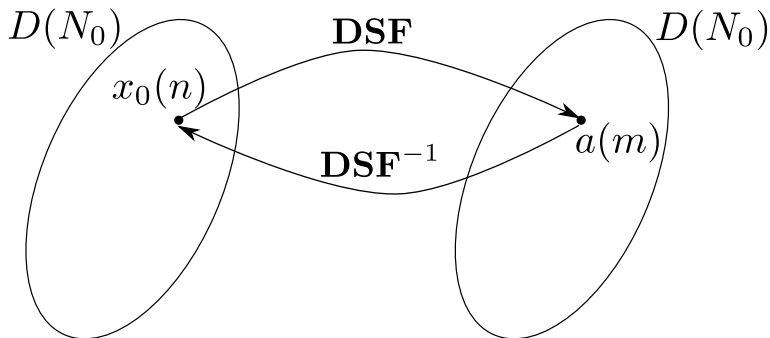
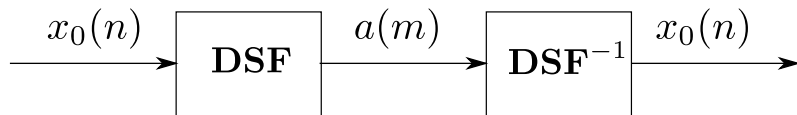
- Es relevante observar que, dadas las propiedades de las funciones base, **los coeficientes del DSF también serán periódicos**

$$a(m) = a(m + N_0)$$

y que por tanto basta con N_0 coeficientes consecutivos para definir el DSF.



Espacios de señal



Criterios de convergencia



Criterios de convergencia

Criterios de convergencia

Puesto que el espacio es de dimensión finita, *siempre* convergerá.



Criterios de convergencia

Criterios de convergencia

Puesto que el espacio es de dimensión finita, *siempre* convergerá.

- La transformada puede verse como un cambio de base en un espacio vectorial de dimensión N_o

$$\begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \\ \vdots \\ a(N_o - 1) \end{pmatrix} = \frac{1}{N_o} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j\Omega_0} & \dots & e^{-j\Omega_0(N_o-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\Omega_0(N_o-1)} & \dots & e^{-j\Omega_0(N_o-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N_o - 1) \end{pmatrix}$$

Ejercicio

Calcule la matriz inversa que permite deshacer el cambio de base.



Propiedades del DSF de variable discreta

Linealidad	$\alpha x_0(n) + \beta y_0(n)$	$\alpha a(m) + \beta b(m)$
Desplazamiento	$x_0(n - n_0)$	$a(m) e^{-jm\Omega_0 n_0}$
Producto por exponencial imaginaria	$x_0(n) e^{jM\Omega_0 n}$	$a(m - M)$
Conjugado de la función	$x_0^*(n)$	$a^*(-m)$
Reflexión	$x_0(-n)$	$a(-m)$
Escalado variable indep. periodo pN_0	$\begin{cases} x_0(n/p) & n \text{ mult. } p \\ 0 & n \text{ no mult. } p \end{cases}$	$\frac{1}{p} a(m)$
Convolución periódica	$x_0(n) * y_0(n)$	$N_0 a(m) b(m)$
Modulación	$x_0(n) y_0(n)$	$\sum_{k=\langle N_0 \rangle} a(k) b(k - m)$
Primera diferencia	$x_0(n) - x_0(n - 1)$	$(1 - e^{-jm\Omega_0}) a(m)$
Suma (finita y periódica si $a(0) = 0$)	$\sum_{k=-\infty}^n x_0(k)$	$\frac{1}{(1 - e^{-jm\Omega_0})} a(m)$
Producto escalar	$\langle x_o(n), y_o(n) \rangle = N_o \langle a(m), b(m) \rangle$	
Señales reales	$x_0(n)$ real	$a(m) = a^*(-m)$
Señales pares	$x_0(n) = x_0(-n)$	$a(m) = a(-m)$
Señales impares	$x_0(n) = -x_0(-n)$	$a(m) = -a(-m)$



Propiedades especiales: Teorema de Parseval y Dualidad

- Como consecuencia de la propiedad de preservación del producto escalar, se obtiene la versión correspondiente del **teorema de Parseval**:

$$E_0[x_0(n)] = N_0 E_0[a(m)] .$$

- Además, una simple inspección de las ecuaciones de análisis y síntesis revela una **dualidad** del DSF de variable discreta consigo mismo:

$$\mathbf{DSF}(x_o(n)) = \frac{1}{N_o} \mathbf{DSF}^{-1}(x_o(-m)) ,$$

y, consecuentemente:

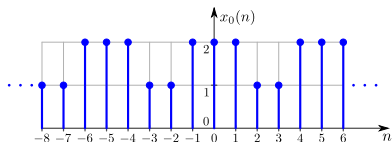
$$a(n) = \frac{1}{N_o} \mathbf{DSF}^{-1}(x_o(-m)) \quad \text{o} \quad x_o(m) = N_o \mathbf{DSF}(a(-n))$$

$$x(n) \leftrightarrow a(m) \iff a(n) \leftrightarrow \frac{1}{N_o} x(-m)$$

- Esta propiedad nos permite reutilizar propiedades y pares transformados en los dos sentidos de transformación.



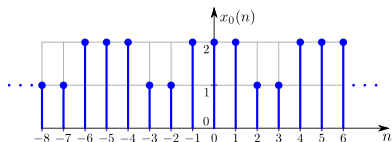
Ejemplo uso de propiedades #1



$\mathcal{L}\{a(m)\}?$

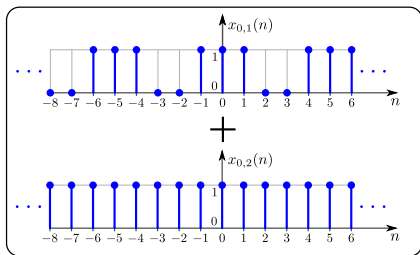


Ejemplo uso de propiedades #1

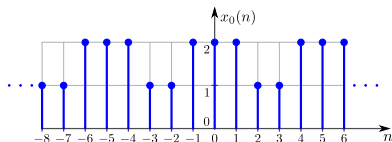


$$a(m) = b(m) + c(m)$$

||



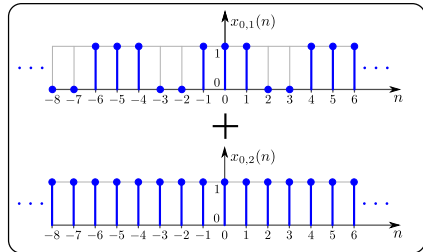
Ejemplo uso de propiedades #1



||



$$a(m) = b(m) + c(m)$$



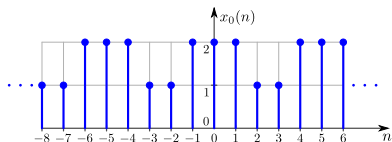
$$b(m) = \begin{cases} \frac{1}{5} \frac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)} & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \text{etc.} \\ \frac{3}{5} & k = 0, \pm 5, \pm 10, \text{etc.} \end{cases}$$



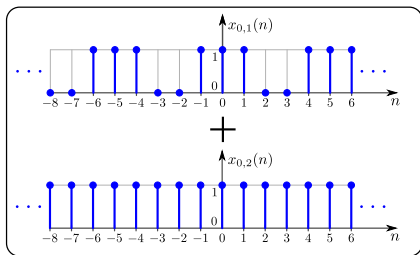
$$c(m) = \sum_k \delta(m - 5k)$$



Ejemplo uso de propiedades #1



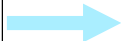
||



$$a(m) = \begin{cases} \frac{1}{5} \frac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)} & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \text{etc.} \\ \frac{8}{5} & k = 0, \pm 5, \pm 10, \text{etc.} \end{cases}$$



$$b(m) = \begin{cases} \frac{1}{5} \frac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)} & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \text{etc.} \\ \frac{3}{5} & k = 0, \pm 5, \pm 10, \text{etc.} \end{cases}$$



$$c(m) = \sum_k \delta(m - 5k)$$



Ejemplo uso de propiedades #2

Ejercicio

Suponga que se conocen los siguientes datos de la secuencia $x_0(n)$:

- ❶ $x_0(n)$ es periódica, con periodo $N_0 = 6$
- ❷ $\sum_{n=0}^5 x_0(n) = 2$
- ❸ $\sum_{n=2}^7 (-1)^n x_0(n) = 1$
- ❹ Del conjunto de señales que cumplen las tres propiedades anteriores, $x_0(n)$ es la de mínima energía

calcule dicha señal de variable discreta.



Ejemplo uso de propiedades #2

Ejercicio

Suponga que se conocen los siguientes datos de la secuencia $x_0(n)$:

- ❶ $x_0(n)$ es periódica, con periodo $N_0 = 6$
- ❷ $\sum_{n=0}^5 x_0(n) = 2$
- ❸ $\sum_{n=2}^7 (-1)^n x_0(n) = 1$
- ❹ Del conjunto de señales que cumplen las tres propiedades anteriores, $x_0(n)$ es la de mínima energía

calcule dicha señal de variable discreta.

Solución

$$x_0(n) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-1)^n$$



Ejemplo DSF #1

- Considérese la señal de variable discreta:

$$x_o(n) = e^{j\Omega_0 n} \text{ donde } \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}.$$

- Esta señal ya está directamente expresada como serie de Fourier, por lo que sólo necesitamos identificar los coeficientes: por lo que los coeficientes puede calcularse por asociación directa:

$$a(1) = 1$$

- Y, por tanto, dentro del rango $0 \leq m \leq N_0 - 1$:

$$a(m) = \delta(m - 1)$$

- Si se considera un valor arbitrario de m , fuera del rango anterior, podemos tener en cuenta que la señal debe ser periódica y, por tanto, se puede obtener una expresión general periodificando:

$$a(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m - 1 - kN_0)$$



Ejemplo DSF #2

- Considérese una señal similar a la anterior (mismo periodo), pero con frecuencia angular múltiplo de Ω_0 :

$$x_o(n) = e^{jp\Omega_0 n} \text{ donde } \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \text{ y } p \in \mathbb{Z}$$

- Obsérvese que p puede ser mayor que N_0 . También debe cumplirse que p no tiene factores en común con N_0 pues entonces el periodo fundamental sería inferior.
- Si escogemos un periodo que abarque al entero p , es decir $N_1 \leq m \leq N_2$ con $p \in [N_1, N_2]$ y $N_2 - N_1 + 1 = N_0$, por asociación directa vemos que:

$$a(p) = 1$$

- Con todo lo anterior, en el rango considerado tenemos que:

$$a(m) = \delta(m - p)$$

- Nuevamente, se puede obtener una expresión general periodificando:

$$x_o(n) = e^{jp\Omega_0 n} \leftrightarrow a(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m - p - kN_0)$$



Ejemplo DSF #3

- La señales de variable discreta sinusoidales, pueden obtener de manera directa a partir de combinaciones lineales de exponenciales complejas
- Así pues tenemos que:

$$x_o(n) = \cos(p\Omega_0 n) = \frac{1}{2} e^{jp\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-jp\Omega_0 n} \leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m-p-kN_0) + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m+p-kN_0)$$

y

$$x_o(n) = \sin(p\Omega_0 n) = \frac{1}{2j} e^{jp\Omega_0 n} - \frac{1}{2j} e^{-jp\Omega_0 n} \leftrightarrow \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m-p-kN_0) - \frac{1}{2j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m+p-kN_0)$$

en ambos casos $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$.

- Observe que en cada periodo, sólo hay dos deltas.



Ejemplo DSF #3

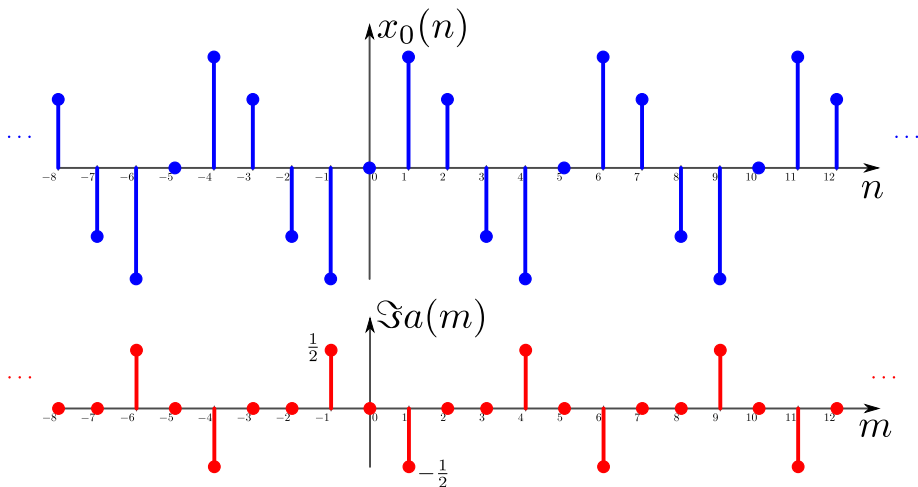


Figura: Señal $x_0(n) = \sin(2\pi/5n)$ y los coeficientes de su DSF.



Ejemplo DSF #3

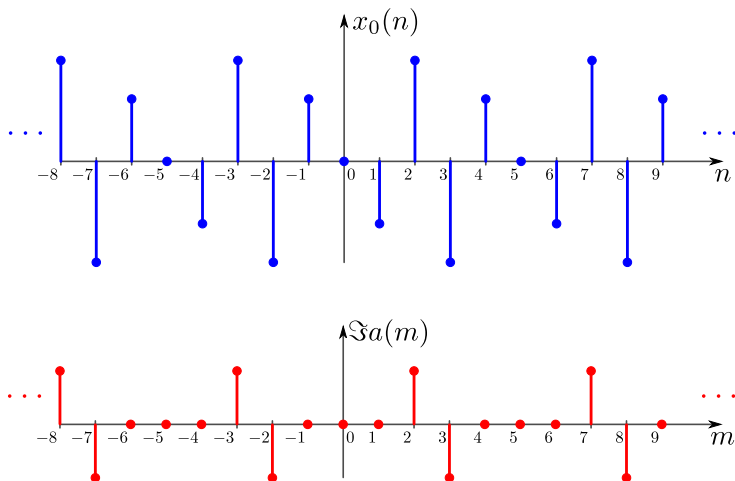


Figura: Señal $x_0(n) = \sin(2\pi \frac{3}{5} n)$ y los coeficientes de su DSF.



Ejercicio #1

Ejercicio #1

Calcule los coeficientes del DSF de la siguiente señal

$$x_o(n) = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N_0}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N_0}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N_0}n + \frac{\pi}{2}\right)$$



Ejercicio #1

Ejercicio #1

Calcule los coeficientes del DSF de la siguiente señal

$$x_o(n) = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N_0}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N_0}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N_0}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

Solución

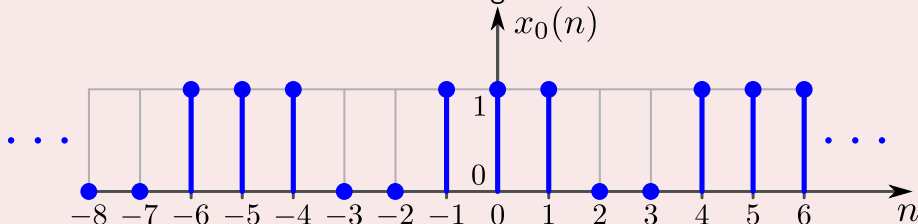
$$a(0) = 1, a(1) = \frac{3}{2} - j\frac{1}{2}, a(-1) = \frac{3}{2} + j\frac{1}{2}, a(2) = \frac{1}{2}j, a(-2) = -\frac{1}{2}j$$



Ejercicio #2

Ejercicio #2

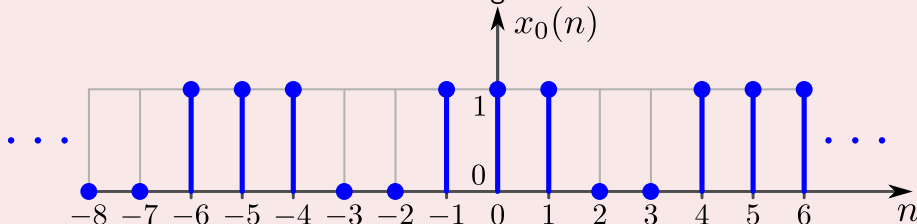
Calcule los coeficientes del DSF de la siguiente señal



Ejercicio #2

Ejercicio #2

Calcule los coeficientes del DSF de la siguiente señal



Solución

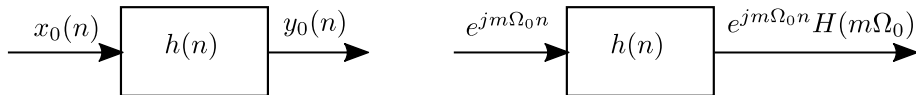
$$a(m) = \begin{cases} \frac{1}{5} \frac{\sin(3\pi m/5)}{\sin(\pi m/5)} & m \neq 0, \pm 5, \pm 10, \text{ etc.} \\ \frac{3}{5} & m = 0, \pm 5, \pm 10, \text{ etc.} \end{cases}$$

Pares transformados DSF

Exponencial imaginaria	$e^{jp\Omega_o n}$	$a(k) = 1, k = p \pm mN_o$
Coseno	$\cos(p\Omega_o n)$	$a(k) = 1/2, k = \pm p \pm mN_o$
Seno	$\sin(p\Omega_o n)$	$a(k) = \frac{1}{2j}, k = p \pm mN_o$ $a(k) = \frac{-1}{2j}, k = -p \pm mN_o$
Constante	K	$a(k) = K, k = \pm mN_o$
Tren de deltas	$\delta_o(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN_o)$	$a(k) = \frac{1}{N_o}, \forall k = p \pm mN_o$
Tren de pulsos (ancho $2N+1$)	$\Pi_{o,2N+1}(n)$	$\frac{1}{N_o} \frac{\sin[m\Omega_o(N+\frac{1}{2})]}{\sin(\frac{m\Omega_o}{2})}$



Relación del DSF de variable discreta y los SLI



- Si una señal periódica discreta pasa por un SLI, su salida vendrá dada

$$y_0(n) = x_0(n) * h(n) = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} a(m) \left(e^{jm\Omega_0 n} * h(n) \right).$$

- Por lo tanto, la salida será una **combinación lineal** de funciones del tipo:

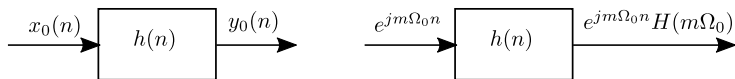
$$e^{jm\Omega_0 n} * h(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} e^{jm\Omega_0(n-n')} h(n') = e^{jm\Omega_0 n} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h(n') e^{-jm\Omega_0 n'}.$$

- Es decir, los armónicos son también **autofunciones** de los SLI discretos, con autovalor $H(m\Omega_0)$

$$H(m\Omega_0) \equiv H(\Omega)|_{\Omega=m\Omega_0} = \left[\sum_{n'=-\infty}^{\infty} h(n') e^{-j\Omega n'} \right]_{\Omega=m\Omega_0}$$



Relación del DSF de variable discreta y los SLI



- De manera análoga al caso continuo, el término

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\Omega n}$$

será la **transformada de Fourier** (de variable discreta) del sistema y será estudiada en el próximo tema.

- La salida del sistema será una **señal periódica**:

$$y_0(n) = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} b(m)e^{jm\Omega_0 n},$$

cuyos coeficientes del DSF serán:

$$b(m) = a(m)H(m\Omega_0)$$



Ejemplo DSF y SLI

Ejercicio

Calcule la salida de un sistema con respuesta al impulso $h(n) = \alpha^n u(n)$, $-1 < \alpha < 1$ y entrada $x_0(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N_0}n\right)$ para el caso $N_0 = 4$



Ejemplo DSF y SLI

Ejercicio

Calcule la salida de un sistema con respuesta al impulso $h(n) = \alpha^n u(n)$, $-1 < \alpha < 1$ y entrada $x_0(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N_0}n\right)$ para el caso $N_0 = 4$

Solución

La respuesta del sistema será

$$H(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\Omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}}$$

Particularizando para $\Omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$:

$$|H(\pm\Omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \text{ y } \angle H(\pm\Omega_0) = \mp \tan^{-1}(\alpha)$$

Descomponiendo en exponenciales complejas es trivial comprobar que

$$y_0(n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}n - \tan^{-1}(\alpha)\right)$$