

# Señales de partida importantes en variable discreta

## Tema 8

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones  
Universidad de Oviedo

- 1 Introducción
- 2 Señales
  - Espacios de señal
  - Operaciones sobre señales de variable discreta
  - Transformaciones de señales de variable discreta
- 3 Principales señales de variable discreta
  - Señales de VD aperiódicas
  - Señales de variable discreta periódicas
- 4 Sistemas en variable discreta
  - Sistemas en variable discreta
  - Sistemas lineales en variable discreta

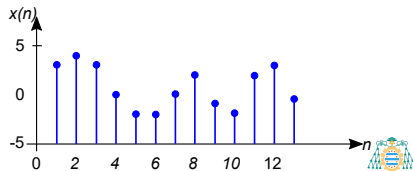
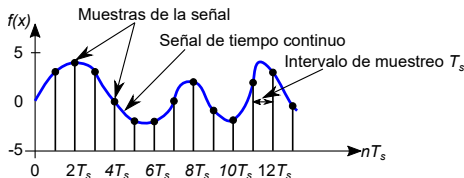


# Señales de variable discreta

- Son señales cuya variable independiente es discreta

$$x(n), n \in \mathbb{Z}$$

- A menudo también reciben el nombre de **secuencias**.
- Pueden aparecer como consecuencia de observar un proceso discreto (p.ej., los valores en bolsa a lo largo de cada día) o como consecuencia de **muestrear una señal de variable continua**.
- Este último caso es de especial importancia pues es la herramienta utilizada por los ordenadores para **procesar numéricamente señales de variable continua**.

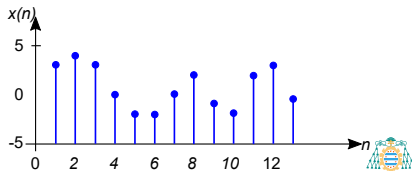
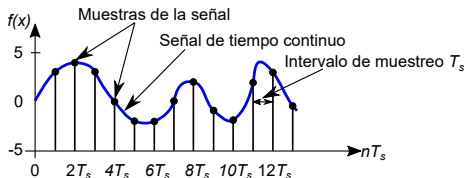


# Señales de variable discreta

- Son señales cuya variable independiente es discreta

$$x(n), n \in \mathbb{Z}$$

- A menudo también reciben el nombre de **secuencias**.
- Pueden aparecer como consecuencia de observar un proceso discreto (p.ej., los valores en bolsa a lo largo de cada día) o como consecuencia de **muestrear una señal de variable continua**.
- Este último caso es de especial importancia pues es la herramienta utilizada por los ordenadores para **procesar numéricamente señales de variable continua**.

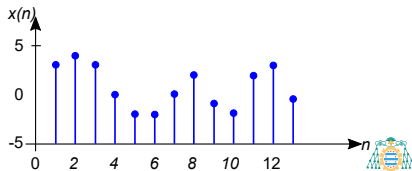
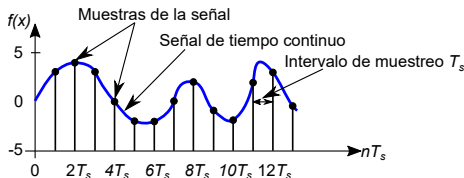


# Señales de variable discreta

- Son señales cuya variable independiente es discreta

$$x(n), n \in \mathbb{Z}$$

- A menudo también reciben el nombre de **secuencias**.
- Pueden aparecer como consecuencia de observar un proceso discreto (p.ej., los valores en bolsa a lo largo de cada día) o como consecuencia de **muestrear una señal de variable continua**.
- Este último caso es de especial importancia pues es la herramienta utilizada por los ordenadores para **procesar numéricamente señales de variable continua**.

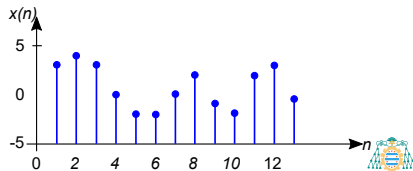
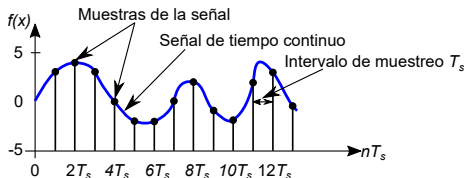


# Señales de variable discreta

- Son señales cuya variable independiente es discreta

$$x(n), n \in \mathbb{Z}$$

- A menudo también reciben el nombre de **secuencias**.
- Pueden aparecer como consecuencia de observar un proceso discreto (p.ej., los valores en bolsa a lo largo de cada día) o como consecuencia de **muestrear una señal de variable continua**.
- Este último caso es de especial importancia pues es la herramienta utilizada por los ordenadores para **procesar numéricamente señales de variable continua**.



# Espacios de señal para variable discreta

- Al igual que en el caso continuo utilizaremos principalmente dos tipos de **espacio de señal**.

- $D(\mathbb{Z})$  será el espacio de señales con variable independiente en el rango  $n \in (-\infty, \infty)$ .
- El producto escalar en  $D(\mathbb{Z})$  se suele definir como:

$$\langle x(n), y(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)$$

- $D(N_0)$  será el espacio de las señales de variable discreta con periodo  $N_0$
- El producto escalar en  $D(N_0)$  se suele definir como:

$$\langle x_0(n), y_0(n) \rangle = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n)y_0^*(n)$$

- En ambos casos, se pueden definir normas y métricas.
  - En el caso de considerar la **norma inducida por el producto escalar**, y la **métrica inducida por dicha norma** tendremos:

$$\|x(n)\|^2 = \langle x(n), x(n) \rangle \quad d(x(n), y(n)) = \|x(n) - y(n)\|$$



# Energía y potencia

| Magnitud             | Longitud finita                                                                                          | Longitud infinita                                                                                              |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Potencia instantánea | $\mathbf{P}[x(n)] =  x(n) ^2 = x(n)x^*(n)$                                                               |                                                                                                                |
| Energía              | $E[x(n)] = \sum_{n=N_1}^{N_2} \mathbf{P}[x(n)]$                                                          | $E[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}[x(n)]$                                                         |
| Potencia media       | $\langle \mathbf{P}[x(n)] \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=N_1}^{N_2} \mathbf{P}[x(n)]$ $N = N_2 - N_1 + 1$ | $\langle \mathbf{P}[x(n)] \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \mathbf{P}[x(n)]$ |

- Estas definiciones también son válidas para el caso de **señales periódicas**  $x_0(x)$ , aunque la potencia media se puede simplificar y expresar como:  $\langle \mathbf{P}[x_0(n)] \rangle = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \mathbf{P}[x_0(n)]$
- Además, puesto que para señales periódicas la energía es infinita, sólo tendría sentido hablar de **energía por periodo**:  $E_0[x_0(n)] = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} \mathbf{P}[x_0(n)] = N_0 \langle \mathbf{P}[x_0(n)] \rangle$



# Convolución discreta

- Al igual que en el caso continuo, se definen dos tipos de convolución.
- La **convolución aperiódica** (o, simplemente, convolución):

$$c(n) = x(n) * y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(n-m)$$

- La **convolución periódica**, para señales en  $D(N_0)$ :

$$c_0(n) = x_0(n) * y_0(n) = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} x_0(m)y_0(n-m)$$

- La señal  $c_0(n)$  también pertenecerá a  $D(N_0)$ .
- Ambas convoluciones siguen cumpliendo la propiedad conmutativa, asociativa y distributiva respecto a la suma:

$$x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$$

$$x(n) * (y(n) * z(n)) = (x(n) * y(n)) * z(n)$$

$$x(n) * (y(n) + z(n)) = x(n) * y(n) + x(n) * z(n)$$



# Operaciones comunes con señales de variable discreta

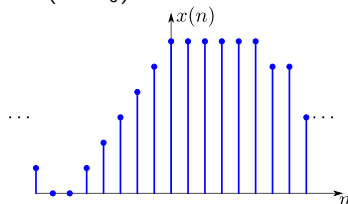
- Las operaciones con señales de variable discreta son similares, salvo mínimos detalles, a las de variable continua.
- La **suma** y el **producto** de dos señales se definen nuevamente punto a punto.
- Del mismo modo, el **escalado por un escalar** se realiza punto a punto.
- Las operaciones de **reflexión y desplazamiento** también son similares.
- Sin embargo, se definen dos operaciones (**diezmado** y **relleno con ceros**) que demandan ciertos requisitos.
  - En estas dos operaciones, el escalado debe realizarse por un número entero  $N \in \mathbb{Z}$



# Transformaciones de la variable independiente I

Desplazamiento

$$x(n) \rightarrow x(n - n_0)$$



Reflexión

$$x(n) \rightarrow x(-n)$$

Cambios de escala: Diezmado

$$x(n) \rightarrow x(pn), p \in \mathbb{Z}$$

Cambio de escala: Relleno con ceros

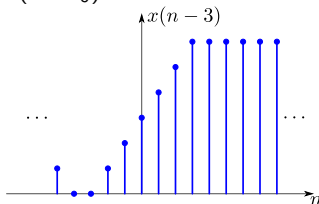
$$x(n) \rightarrow x(n/p) = \begin{cases} x(m) & n = mp \\ 0 & n \neq mp \end{cases}, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$



# Transformaciones de la variable independiente I

Desplazamiento

$$x(n) \rightarrow x(n - n_0)$$



Reflexión

$$x(n) \rightarrow x(-n)$$

Cambios de escala: Diezmado

$$x(n) \rightarrow x(pn), p \in \mathbb{Z}$$

Cambio de escala: Relleno con ceros

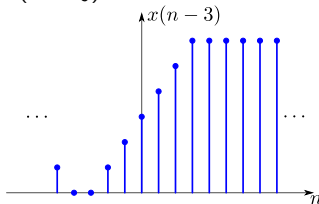
$$x(n) \rightarrow x(n/p) = \begin{cases} x(m) & n = mp \\ 0 & n \neq mp \end{cases}, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$



# Transformaciones de la variable independiente I

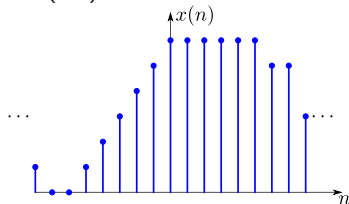
Desplazamiento

$$x(n) \rightarrow x(n - n_0)$$



Reflexión

$$x(n) \rightarrow x(-n)$$



Cambios de escala: Diezmado

$$x(n) \rightarrow x(pn), \quad p \in \mathbb{Z}$$

Cambio de escala: Relleno con zeros

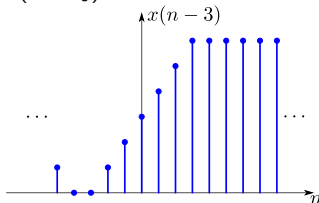
$$x(n) \rightarrow x(n/p) = \begin{cases} x(m) & n = mp \\ 0 & n \neq mp \end{cases}, \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$



# Transformaciones de la variable independiente I

Desplazamiento

$$x(n) \rightarrow x(n - n_0)$$

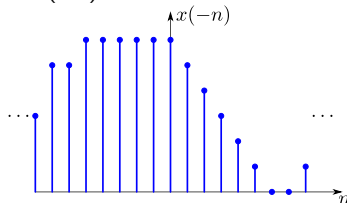


Cambios de escala: Diezmado

$$x(n) \rightarrow x(pn), \quad p \in \mathbb{Z}$$

Reflexión

$$x(n) \rightarrow x(-n)$$



Cambio de escala: Relleno con ceros

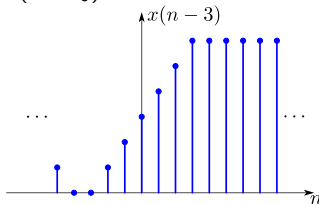
$$x(n) \rightarrow x(n/p) = \begin{cases} x(m) & n = mp \\ 0 & n \neq mp \end{cases}, \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$



# Transformaciones de la variable independiente I

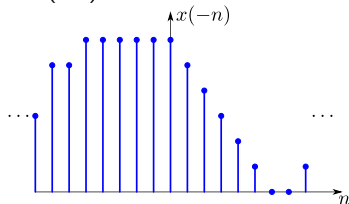
Desplazamiento

$$x(n) \rightarrow x(n - n_0)$$



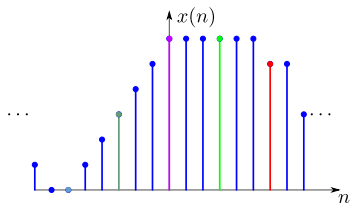
Reflexión

$$x(n) \rightarrow x(-n)$$



Cambios de escala: Diezmado

$$x(n) \rightarrow x(pn), p \in \mathbb{Z}$$



Cambio de escala: Relleno con ceros

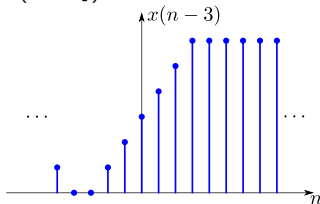
$$x(n) \rightarrow x(n/p) = \begin{cases} x(m) & n = mp \\ 0 & n \neq mp \end{cases}, p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$



# Transformaciones de la variable independiente I

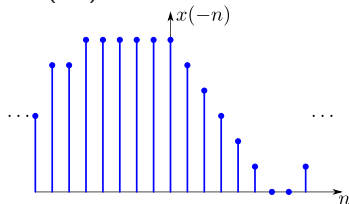
Desplazamiento

$$x(n) \rightarrow x(n - n_0)$$



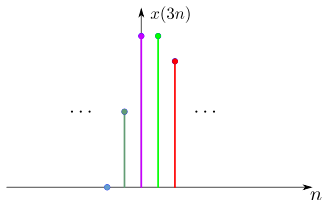
Reflexión

$$x(n) \rightarrow x(-n)$$



Cambios de escala: Diezmado

$$x(n) \rightarrow x(pn), \quad p \in \mathbb{Z}$$



Cambio de escala: Relleno con ceros

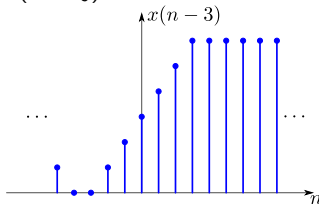
$$x(n) \rightarrow x(n/p) = \begin{cases} x(m) & n = mp \\ 0 & n \neq mp \end{cases}, \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$



# Transformaciones de la variable independiente I

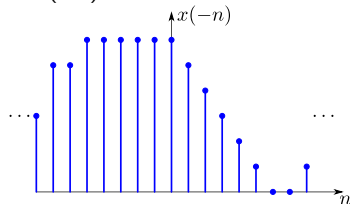
Desplazamiento

$$x(n) \rightarrow x(n - n_0)$$



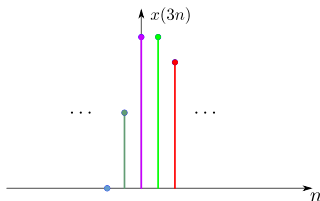
Reflexión

$$x(n) \rightarrow x(-n)$$



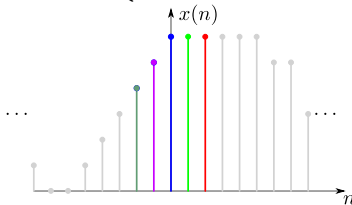
Cambios de escala: Diezmado

$$x(n) \rightarrow x(pn), \quad p \in \mathbb{Z}$$



Cambio de escala: Relleno con ceros

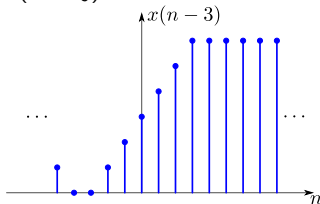
$$x(n) \rightarrow x(n/p) = \begin{cases} x(m) & n = mp \\ 0 & n \neq mp \end{cases}, \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$



# Transformaciones de la variable independiente I

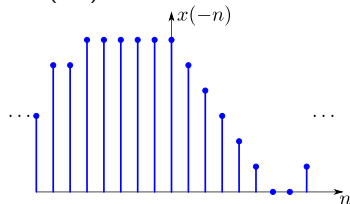
Desplazamiento

$$x(n) \rightarrow x(n - n_0)$$



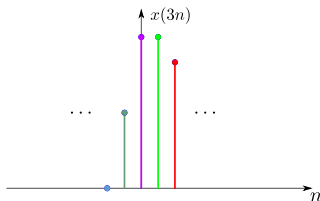
Reflexión

$$x(n) \rightarrow x(-n)$$



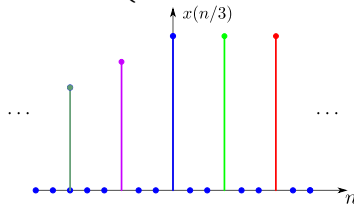
Cambios de escala: Diezmado

$$x(n) \rightarrow x(pn), \quad p \in \mathbb{Z}$$



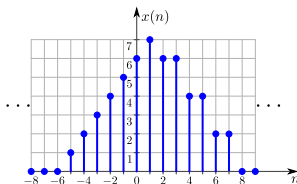
Cambio de escala: Relleno con ceros

$$x(n) \rightarrow x(n/p) = \begin{cases} x(m) & n = mp \\ 0 & n \neq mp \end{cases}, \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$



# Transformaciones de la variable independiente II

- El **orden de las operaciones** puede facilitar o dificultar el cálculo de la señal.
  - Por ejemplo, consideremos el cálculo de la señal  $x(3-2n)$

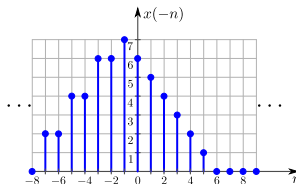
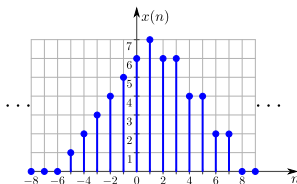


- En este caso, el orden resulta poco intuitivo pues reaparecen valores que ya habíamos descartados.



# Transformaciones de la variable independiente II

- El **orden de las operaciones** puede facilitar o dificultar el cálculo de la señal.
  - Por ejemplo, consideremos el cálculo de la señal  $x(3-2n)$

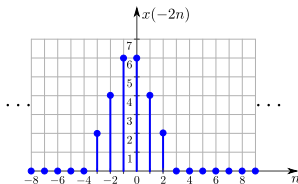
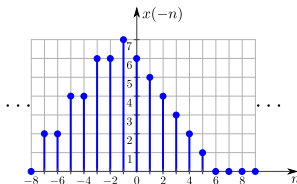
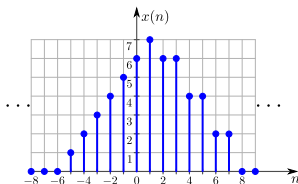


- En este caso, el orden resulta poco intuitivo pues reaparecen valores que ya habíamos descartados.



# Transformaciones de la variable independiente II

- El **orden de las operaciones** puede facilitar o dificultar el cálculo de la señal.
  - Por ejemplo, consideremos el cálculo de la señal  $x(3-2n)$

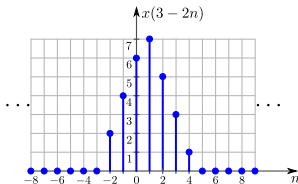
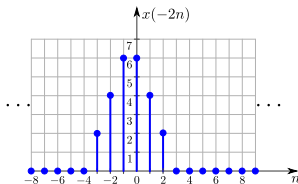
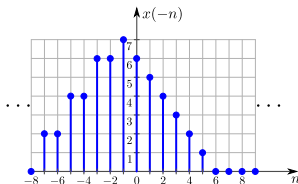
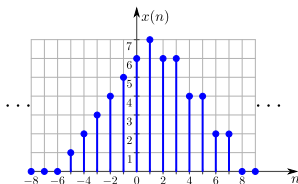


- En este caso, el orden resulta poco intuitivo pues reaparecen valores que ya habíamos descartados.



# Transformaciones de la variable independiente II

- El **orden de las operaciones** puede facilitar o dificultar el cálculo de la señal.
  - Por ejemplo, consideremos el cálculo de la señal  $x(3-2n)$

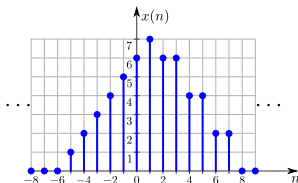


- En este caso, el orden resulta poco intuitivo pues reaparecen valores que ya habíamos descartados.



# Transformaciones de la variable independiente III

- En general, es más cómodo que el **diezmando o relleno por ceros** sea **última operación**.

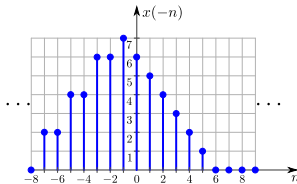
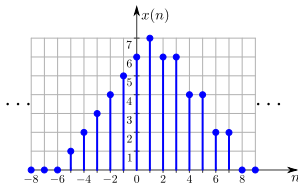


- En este orden (reflexión+desplazamiento+diezmando) ya no reaparecen valores descartados.



# Transformaciones de la variable independiente III

- En general, es más cómodo que el **diezmado o relleno por ceros** sea **última operación**.

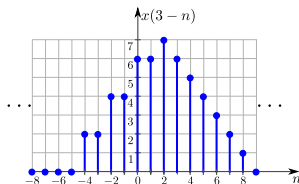
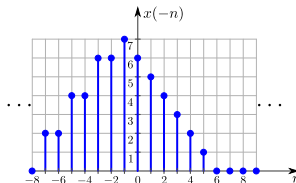
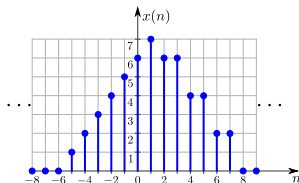


- En este orden (reflexión+desplazamiento+diezmado) ya no reaparecen valores descartados.



# Transformaciones de la variable independiente III

- En general, es más cómodo que el **diezmado o relleno por ceros** sea **última operación**.

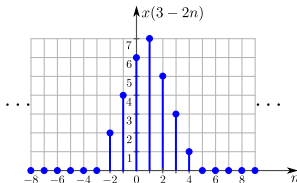
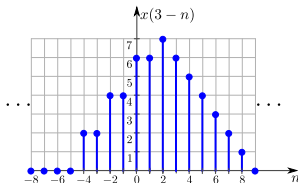
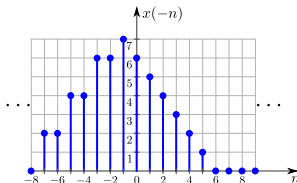
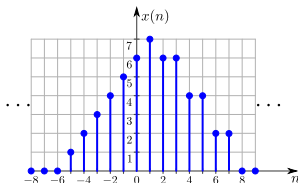


- En este orden (reflexión+desplazamiento+diezmado) ya no reaparecen valores descartados.



# Transformaciones de la variable independiente III

- En general, es más cómodo que el **diezmado o relleno por ceros** sea **última operación**.



- En este orden (reflexión+desplazamiento+diezmado) ya no reaparecen valores descartados.



# Función impulso unitario discreto

- Es la *contraparte* discreta de la función delta de Dirac.
- Su definición matemática es

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

- Se cumple la siguiente propiedad, análoga a la del caso continuo, respecto a la convolución:

$$x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0)$$

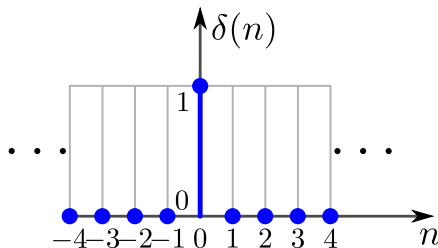
- Por ello, un sistema discreto con respuesta al impulso igual a la función  $\delta(n)$  será el *sistema identidad*.



# Función impulso unitario discreto

- Es la *contraparte discreta* de la *función delta de Dirac*.
- Su definición matemática es

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



- Se cumple la siguiente propiedad, análoga a la del caso continuo, respecto a la convolución:

$$x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0)$$

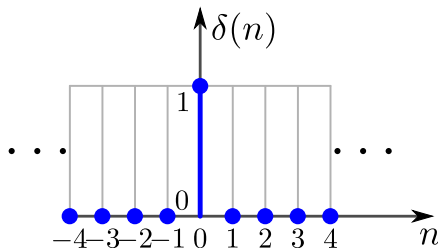
- Por ello, un sistema discreto con respuesta al impulso igual a la función  $\delta(n)$  será el *sistema identidad*.



# Función impulso unitario discreto

- Es la *contraparte discreta* de la *función delta de Dirac*.
- Su definición matemática es

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



- Se cumple la siguiente propiedad, análoga a la del caso continuo, respecto a la convolución:

$$x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0)$$

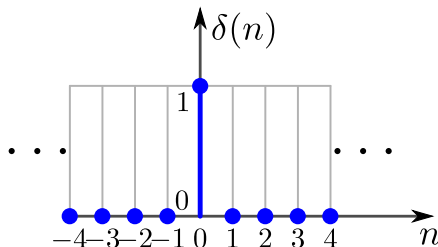
- Por ello, un sistema discreto con respuesta al impulso igual a la función  $\delta(n)$  será el *sistema identidad*.



# Función impulso unitario discreto

- Es la *contraparte discreta* de la *función delta de Dirac*.
- Su definición matemática es

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



- Se cumple la siguiente propiedad, análoga a la del caso continuo, respecto a la convolución:

$$x(n) * \delta(n - n_0) = x(n - n_0)$$

- Por ello, un sistema discreto con respuesta al impulso igual a la función  $\delta(n)$  será el *sistema identidad*.



# Función escalón unitario

- Es la **contraparte discreta** de la **función de Heaviside**.
- Su definición matemática es

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

- Se cumple la siguiente propiedad, análoga a la del caso continuo, respecto a la convolución:

$$x(n) * u(n - n_0) = \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x(m)$$

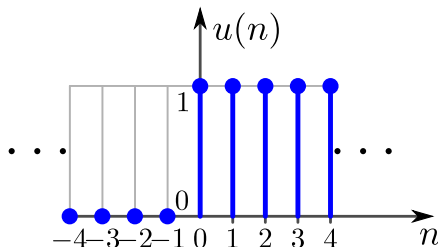
- Por ello, un sistema discreto con respuesta al impulso igual a la función  $u(n)$  será el **sistema acumulador**.



# Función escalón unitario

- Es la **contraparte discreta de la función de Heaviside**.
- Su definición matemática es

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



- Se cumple la siguiente propiedad, análoga a la del caso continuo, respecto a la convolución:

$$x(n) * u(n - n_0) = \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x(m)$$

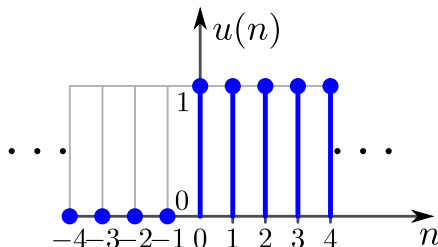
- Por ello, un sistema discreto con respuesta al impulso igual a la función  $u(n)$  será el **sistema acumulador**.



# Función escalón unitario

- Es la **contraparte discreta de la función de Heaviside**.
- Su definición matemática es

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



- Se cumple la siguiente propiedad, análoga a la del caso continuo, respecto a la convolución:

$$x(n) * u(n - n_0) = \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x(m)$$

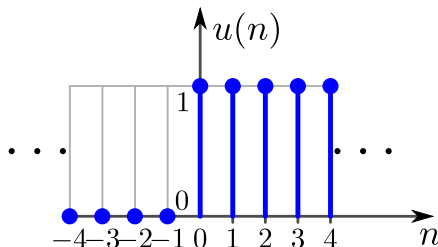
- Por ello, un sistema discreto con respuesta al impulso igual a la función  $u(n)$  será el **sistema acumulador**.



# Función escalón unitario

- Es la **contraparte discreta de la función de Heaviside**.
- Su definición matemática es

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



- Se cumple la siguiente propiedad, análoga a la del caso continuo, respecto a la convolución:

$$x(n) * u(n - n_0) = \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x(m)$$

- Por ello, un sistema discreto con respuesta al impulso igual a la función  $u(n)$  será el **sistema acumulador**.



# Función pulso discreto

- Es la contraparte discreta de la función pulso.

- Su definición matemática es

$$\Pi_{2N+1}(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & n > N \end{cases}$$

- Se cumple la siguiente propiedad, análoga a la del caso continuo, respecto a la convolución:

$$x(n) * \Pi_{2N+1}(n - n_0) = \sum_{m=n-n_0-N}^{n-n_0+N} x(m)$$

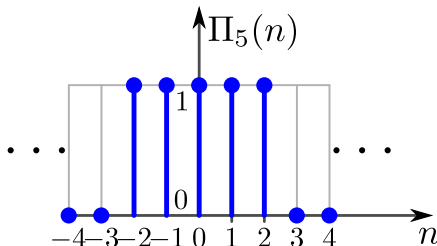
- Por ello, un sistema discreto con respuesta al impulso igual a la función  $\Pi_{2N+1}(n)$  realizará una suma parcial (promediado).



# Función pulso discreto

- Es la contraparte discreta de la función pulso.
- Su definición matemática es

$$\Pi_{2N+1}(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & n > N \end{cases}$$



- Se cumple la siguiente propiedad, análoga a la del caso continuo, respecto a la convolución:

$$x(n) * \Pi_{2N+1}(n - n_0) = \sum_{m=n-n_0-N}^{n-n_0+N} x(m)$$

- Por ello, un sistema discreto con respuesta al impulso igual a la función  $\Pi_{2N+1}(n)$  realizará una suma parcial (promediado).

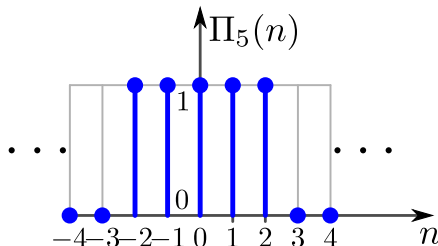


# Función pulso discreto

- Es la contraparte discreta de la función pulso.

- Su definición matemática es

$$\Pi_{2N+1}(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & n > N \end{cases}$$



- Se cumple la siguiente propiedad, análoga a la del caso continuo, respecto a la convolución:

$$x(n) * \Pi_{2N+1}(n - n_0) = \sum_{m=n-n_0-N}^{n-n_0+N} x(m)$$

- Por ello, un sistema discreto con respuesta al impulso igual a la función  $\Pi_{2N+1}(n)$  realizará una suma parcial (promediado).

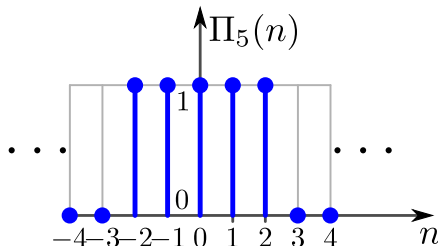


# Función pulso discreto

- Es la **contraparte discreta de la función pulso**.

- Su definición matemática es

$$\Pi_{2N+1}(n) = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & n > N \end{cases}$$



- Se cumple la siguiente propiedad, análoga a la del caso continuo, respecto a la convolución:

$$x(n) * \Pi_{2N+1}(n - n_0) = \sum_{m=n-n_0-N}^{n-n_0+N} x(m)$$

- Por ello, un sistema discreto con respuesta al impulso igual a la función  $\Pi_{2N+1}(n)$  realizará una suma parcial (promediado).



# Señales discretas periódicas

- Si las propiedades de una señal se repiten cada cierto intervalo, diremos que es periódica.
- Matemáticamente, esta condición se expresa como:

$$x_0(n) = x_0(n + N_0), \forall n$$

- Si una señal cumple la condición anterior, también la cumplirá para múltiplos de  $N_0$
- Se denomina **periodo fundamental** al mínimo de los posibles periodos de la señal.



# Señales discretas periódicas

- Si las propiedades de una señal se repiten cada cierto intervalo, diremos que es periódica.
- Matemáticamente, esta condición se expresa como:

$$x_0(n) = x_0(n + N_0), \forall n$$

- Si una señal cumple la condición anterior, también la cumplirá para múltiplos de  $N_0$
- Se denomina **periodo fundamental** al mínimo de los posibles periodos de la señal.



# Señales discretas periódicas

- Si las propiedades de una señal se repiten cada cierto intervalo, diremos que es periódica.
- Matemáticamente, esta condición se expresa como:

$$x_0(n) = x_0(n + N_0), \forall n$$

- Si una señal cumple la condición anterior, también la cumplirá para múltiplos de  $N_0$
- Se denomina **periodo fundamental** al mínimo de los posibles periodos de la señal.



# Señales discretas periódicas

- Si las propiedades de una señal se repiten cada cierto intervalo, diremos que es periódica.
- Matemáticamente, esta condición se expresa como:

$$x_0(n) = x_0(n + N_0), \forall n$$

- Si una señal cumple la condición anterior, también la cumplirá para múltiplos de  $N_0$
- Se denomina **periodo fundamental** al mínimo de los posibles periodos de la señal.



# Señales de variable discreta periódicas

## Ejemplo

¿Qué conjunto de valores hacen que la señal  $x_0(n) = e^{j\Omega_0 n}$  sea periódica?



# Señales de variable discreta periódicas

## Ejemplo

¿Qué conjunto de valores hacen que la señal  $x_0(n) = e^{j\Omega_0 n}$  sea periódica?

## Solución

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 (n+N_0)} \iff \Omega_0 N_0 = 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N_0}}$$

Observe que incrementar la frecuencia no necesariamente reduce el periodo, de hecho puede aumentarlo.



# Señales de variable discreta periódicas

## Ejercicio

¿Cuáles de estas señales son periódicas? ¿Cuál es su periodo?

❶  $\exp(j2\pi n)$

❷  $\exp(j\pi n)$

❸  $\exp(j0,2n)$

❹  $\exp(j0,18\pi n)$

❺  $\cos\left(\frac{2}{5}2\pi n\right) + \sin\left(\frac{2}{3}2\pi n\right)$



# Señales de variable discreta periódicas

## Ejercicio

¿Cuáles de estas señales son periódicas? ¿Cuál es su periodo?

❶  $\exp(j2\pi n)$

❷  $\exp(j\pi n)$

❸  $\exp(j0,2n)$

❹  $\exp(j0,18\pi n)$

❺  $\cos\left(\frac{2}{5}2\pi n\right) + \sin\left(\frac{2}{3}2\pi n\right)$

## Solución

❶  $\exp(j2\pi n) = 1 \rightarrow$  Sí, periodo  $N_0 = 1$

❷

❸

❹

❺

# Señales de variable discreta periódicas

## Ejercicio

¿Cuáles de estas señales son periódicas? ¿Cuál es su periodo?

❶  $\exp(j2\pi n)$

❷  $\exp(j\pi n)$

❸  $\exp(j0,2n)$

❹  $\exp(j0,18\pi n)$

❺  $\cos\left(\frac{2}{5}2\pi n\right) + \sin\left(\frac{2}{3}2\pi n\right)$

## Solución

❶  $\exp(j2\pi n) = 1 \rightarrow$  Sí, periodo  $N_0 = 1$

❷  $\exp(j\pi n) = (-1)^n \rightarrow$  Sí, periodo  $N_0 = 2$

❸

❹

❺

# Señales de variable discreta periódicas

## Ejercicio

¿Cuáles de estas señales son periódicas? ¿Cuál es su periodo?

❶  $\exp(j2\pi n)$

❷  $\exp(j\pi n)$

❸  $\exp(j0,2n)$

❹  $\exp(j0,18\pi n)$

❺  $\cos\left(\frac{2}{5}2\pi n\right) + \sin\left(\frac{2}{3}2\pi n\right)$

## Solución

❶  $\exp(j2\pi n) = 1 \rightarrow$  Sí, periodo  $N_0 = 1$

❷  $\exp(j\pi n) = (-1)^n \rightarrow$  Sí, periodo  $N_0 = 2$

❸  $\exp(j0,2n)$  No, no cumple la condición  $\Omega_0 = 2\pi \frac{k}{N_0}$

❹

❺

# Señales de variable discreta periódicas

## Ejercicio

¿Cuáles de estas señales son periódicas? ¿Cuál es su periodo?

1  $\exp(j2\pi n)$

2  $\exp(j\pi n)$

3  $\exp(j0,2n)$

4  $\exp(j0,18\pi n)$

5  $\cos\left(\frac{2}{5}2\pi n\right) + \sin\left(\frac{2}{3}2\pi n\right)$

## Solución

1  $\exp(j2\pi n) = 1 \rightarrow$  Sí, periodo  $N_0 = 1$

2  $\exp(j\pi n) = (-1)^n \rightarrow$  Sí, periodo  $N_0 = 2$

3  $\exp(j0,2n)$  No, no cumple la condición  $\Omega_0 = 2\pi \frac{k}{N_0}$

4  $\exp(j0,18n) = \exp(j\frac{18}{100}\pi n) = \exp(j\frac{9}{100}2\pi n) \rightarrow$  Sí, periodo  $N_0 = 100$

5

# Señales de variable discreta periódicas

## Ejercicio

¿Cuáles de estas señales son periódicas? ¿Cuál es su periodo?

❶  $\exp(j2\pi n)$

❷  $\exp(j\pi n)$

❸  $\exp(j0,2n)$

❹  $\exp(j0,18\pi n)$

❺  $\cos\left(\frac{2}{5}2\pi n\right) + \sin\left(\frac{2}{3}2\pi n\right)$

## Solución

❶  $\exp(j2\pi n) = 1 \rightarrow$  Sí, periodo  $N_0 = 1$

❷  $\exp(j\pi n) = (-1)^n \rightarrow$  Sí, periodo  $N_0 = 2$

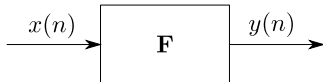
❸  $\exp(j0,2n)$  No, no cumple la condición  $\Omega_0 = 2\pi \frac{k}{N_0}$

❹  $\exp(j0,18n) = \exp(j\frac{18}{100}\pi n) = \exp(j\frac{9}{100}2\pi n) \rightarrow$  Sí, periodo  $N_0 = 100$

❺  $\cos\left(\frac{2}{5}2\pi n\right) + \sin\left(\frac{2}{3}2\pi n\right)$  Sí, son dos señales periódicas de periodo 5 y 3, el periodo común serán el mínimo común múltiplo  $N_0 = 15$

# Sistemas y propiedades en variable discreta

- Los sistemas en VD, al igual que los de VC, se caracterizan por un operador



- Los sistemas pueden cumplir (o no) las mismas propiedades que en el caso continuo: linealidad, invarianza, memoria, invertibilidad, causalidad y estabilidad.
- Todas estas propiedades se definen de manera idéntica al caso de variable continua.



# Sistemas lineales en variable discreta

- En el caso de un sistema sea **lineal**

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathbf{F}(x(n)) = \mathbf{F}(x(n) * \delta(n)) = \mathbf{F}\left(\sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n')\delta(n-n')\right) = \\ &= \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n')\mathbf{F}(\delta(n-n')) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n')h(n; n') \end{aligned}$$

- La colección de funciones de respuestas al impulso  $h(n; n')$  definen al sistema de VD.
- Si el sistema, además de lineal es **invariante**  $h(n; n') = h(n - n')$  resultando en:

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

- Por tanto, el operador  $\mathbf{F}$  es equivalente, en el caso de SLI, a una convolución con la respuesta al impulso del sistema  $h(n)$ .



# Sistemas lineales en variable discreta

## Propiedades SLI en VD

Las propiedades de los SLI en función de la respuesta al impulso, son prácticamente idénticas al caso continuo:

$$\text{SLI sin memoria} \Leftrightarrow h(n) = K\delta(n)$$

$$\text{SLI causal} \Leftrightarrow h(n) = 0, \forall n < 0$$

$$\text{SLI invertible} \Leftrightarrow \exists h^{-1}(n) \text{ tal que } h(n) * h^{-1}(n) = \delta(n)$$

$$\text{SLI estable} \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$



# Sistemas lineales en variable discreta

## Ejercicio

Demuestre las propiedades anteriores.

