

Señales aperiódicas: La Transformada de Fourier

Tema 7

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

Índice I

- 1 Introducción
 - Álgebra del espacio
 - Paso al límite del DSF
- 2 Definición
 - Ecuaciones de análisis y síntesis
 - Interpretación como un operador
- 3 Convergencia de la TF
 - Criterios de convergencia de la TF
- 4 Propiedades de la TF
 - Propiedades generales
 - Teorema de Parseval
- 5 Ejemplos de Transformadas de Fourier
 - Señales de energía finita
 - Distribuciones y señales de energía infinita
 - La TF de señales periódicas



Índice II

6 Relación entre la TF y los SLI

7 Densidad espectral de energía

8 Ancho de banda

9 Apéndices



Índice

- 1 Introducción
 - Álgebra del espacio
 - Paso al límite del DSF
- 2 Definición
- 3 Convergencia de la TF
- 4 Propiedades de la TF
- 5 Ejemplos de Transformadas de Fourier
- 6 Relación entre la TF y los SLI
- 7 Densidad espectral de energía



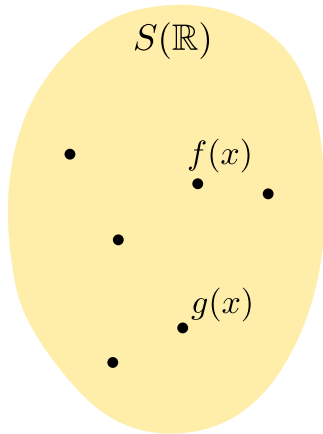
Introducción

- El **DSF** nos permitía una herramienta para descomponer señales periódicas en suma de exponenciales relacionadas armónicamente.
- Con la **Transformada de Fourier** (TF) obtendremos una herramienta similar pero destinada a **señales aperiódicas**.
- Todos los conocimientos obtenidos en el DSF nos serán de utilidad pues:
 - se puede ver como un **paso al límite del DSF**,
 - mantiene unas **propiedades casi idénticas**,
 - el DSF se puede analizar como un **caso particular** de la TF.
- En general, este tema está **estructurado de manera análoga al anterior** (definición, convergencia, propiedades, ejemplos y relación con los SLI)



Álgebra del espacio

- Conviene recordar el álgebra del espacio vectorial $S(\mathbb{R})$



$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx$$

$$\|f(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

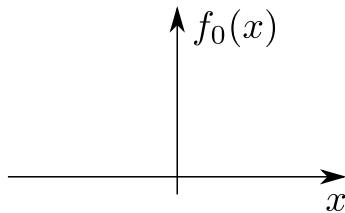
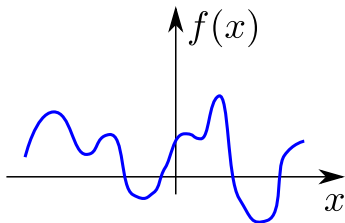
$$d^2(f(x), g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|^2 dx$$



Paso al límite del DSF - I

- Para entender las ecuaciones que motivan la TF, uno de los métodos más sencillos es analizar el **DSF** cuando el periodo de la señal tiende a infinito.
- Para tal fin, tomaremos un trozo de la señal a analizar $f(x)$ y lo **periodificaremos**:

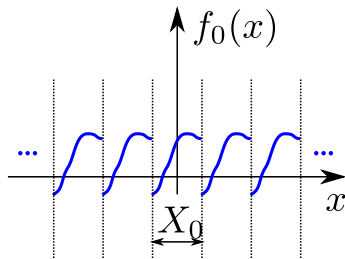
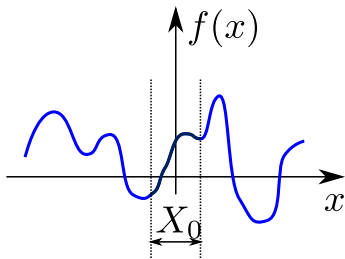
$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x - mX_0) \Pi\left(\frac{x - mX_0}{X_0}\right), \text{ obsérvese que } f(x) = \lim_{X_0 \rightarrow \infty} f_0(x)$$



Paso al límite del DSF - I

- Para entender las ecuaciones que motivan la TF, uno de los métodos más sencillos es analizar el **DSF** cuando el periodo de la señal tiende a infinito.
- Para tal fin, tomaremos un trozo de la señal a analizar $f(x)$ y lo **periodificaremos**:

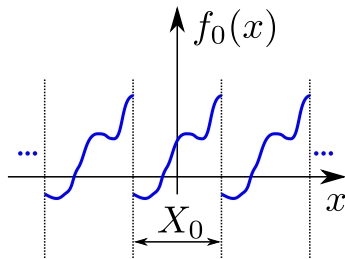
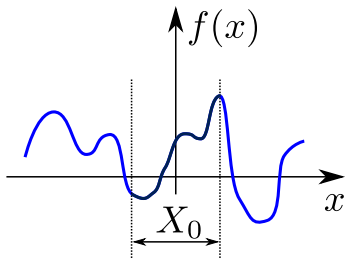
$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x - mX_0) \Pi\left(\frac{x - mX_0}{X_0}\right), \text{ obsérvese que } f(x) = \lim_{X_0 \rightarrow \infty} f_0(x)$$



Paso al límite del DSF - I

- Para entender las ecuaciones que motivan la TF, uno de los métodos más sencillos es analizar el **DSF** cuando el periodo de la señal tiende a infinito.
- Para tal fin, tomaremos un trozo de la señal a analizar $f(x)$ y lo **periodificaremos**:

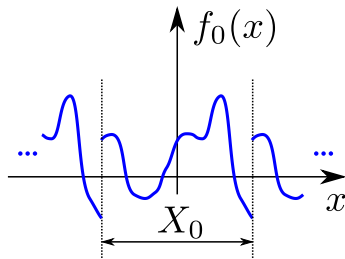
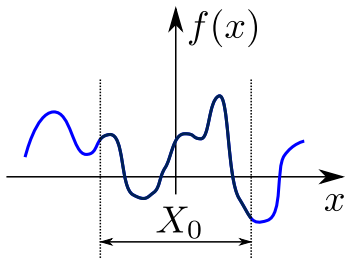
$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x - mX_0) \Pi\left(\frac{x - mX_0}{X_0}\right), \text{ obsérvese que } f(x) = \lim_{X_0 \rightarrow \infty} f_0(x)$$



Paso al límite del DSF - I

- Para entender las ecuaciones que motivan la TF, uno de los métodos más sencillos es analizar el **DSF** cuando el periodo de la señal tiende a infinito.
- Para tal fin, tomaremos un trozo de la señal a analizar $f(x)$ y lo **periodificaremos**:

$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x - mX_0) \Pi\left(\frac{x - mX_0}{X_0}\right), \text{ obsérvese que } f(x) = \lim_{X_0 \rightarrow \infty} f_0(x)$$



Paso al límite del DSF - II

- Sabemos que los coeficientes del DSF serán:

$$a(m) = \frac{1}{X_0} \int_{-\frac{X_0}{2}}^{\frac{X_0}{2}} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx$$

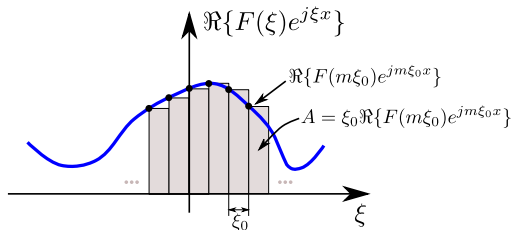
- Estos coeficientes pueden verse como si evaluásemos una función $F(\xi)$ de variable continua en los puntos $m\xi_0$:

$$a(m) = \frac{1}{X_0} F(\xi = m\xi_0) \text{ donde } F(\xi) = \int_{-\frac{X_0}{2}}^{\frac{X_0}{2}} f_0(x) e^{-j\xi x} dx$$

- Por otro lado, si el DSF es convergente:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{X_0} F(m\xi_0) e^{jm\xi_0 x} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_0 F(m\xi_0) e^{jm\xi_0 x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \xi_0 \left[F(\xi) e^{j\xi x} \right]_{\xi=m\xi_0} \end{aligned}$$


Paso al límite del DSF - II



En el paso al límite, el sumatorio es equivalente a una integral de Riemann (tanto para la parte real como para la imaginaria).

- Realizando el paso al límite llegamos a las dos siguientes ecuaciones:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{j\xi x} d\xi \quad \text{donde} \quad F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx$$



Expansión de funciones aperiódicas

- El desarrollo anterior sugiere que una señal aperiódica puede expresarse, en general, como una **combinación lineal (generalizada) de exponenciales complejas**.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{CL} \{F(\xi) \varphi(x; \xi)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{j\xi x} d\xi$$

- Como veremos, las **exponenciales de argumento imaginario** son una base

$$\{\varphi(x; \xi)\} = e^{j\xi x}$$

cubre la mayor parte de señales de interés pertenecientes a $S(\mathbb{R})$.

- Además, los coeficientes de la combinación lineal también pueden identificarse como un producto escalar con los elementos de la base:

$$F(\xi) = \langle f(x), \varphi(x; \xi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx$$



Ortogonalidad de la base

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{CL} \{ F(\xi) \varphi(x; \xi) \}$$

$$F(\xi) = \langle f(x), \varphi(x; \xi) \rangle$$

$$\{ \varphi(x; \xi) \} = e^{j\xi x}$$

- Observe que las expresiones anteriores coinciden con las que se tendrían en la formulación para funciones **base ortogonales**.
 - Sin embargo, veremos que esta **ortogonalidad** debe ser entendida **en el sentido de las distribuciones**.
- Una de las grandes ventajas de una base ortogonal es que permite obtener los coeficientes de la combinación lineal, $F(\xi)$, con un simple producto escalar:

$$F(\xi) = \langle f(x), \varphi(x; \xi) \rangle$$

veamos, asumiendo que existe convergencia, que se requiere en caso de una **base no numerable**:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \langle f(x), \varphi(x; \xi) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mathbf{CL} \{ F(\xi') \varphi(x; \xi') \}, \varphi(x; \xi) \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{CL} \{ F(\xi') \langle \varphi(x; \xi'), \varphi(x; \xi) \rangle \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi') \langle \varphi(x; \xi'), \varphi(x; \xi) \rangle d\xi' \end{aligned}$$

para que esto se cumpla, la única opción es

$$\langle \varphi(x; \xi'), \varphi(x; \xi) \rangle = 2\pi \delta(\xi - \xi')$$



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
 - Ecuaciones de análisis y síntesis
 - Interpretación como un operador
- 3 Convergencia de la TF
- 4 Propiedades de la TF
- 5 Ejemplos de Transformadas de Fourier
- 6 Relación entre la TF y los SLI
- 7 Densidad espectral de energía



La Transformada de Fourier

Ecuación de análisis y síntesis

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, tenemos las denominadas ecuaciones de análisis y síntesis:

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx \quad (\text{ec. análisis})$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{j\xi x} d\xi \quad (\text{ec. síntesis})$$

las cuales definen la Transformada de Fourier para VC.

El símbolo $\approx$ se ha utilizado pues, tal y como ocurría en el DSF, pueden existir casos en los que no se pueda recuperar la señal original.



Interpretación como un operador

- La TF puede interpretarse como un **operador** (no invertible) entre dos espacios de señal, que en este caso coinciden:

$$\mathbf{TF} : S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$$

$$f(x) \mapsto F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx$$

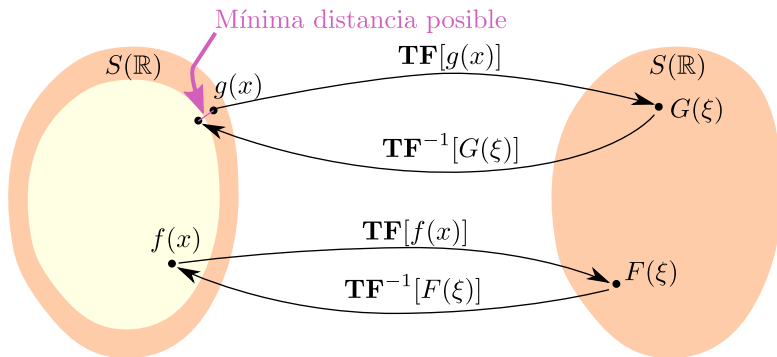
- Y de manera similar para la **TF inversa**

$$\mathbf{TF}^{-1} : S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$$

$$F(\xi) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{j\xi x} d\xi \approx f(x)$$



Interpretación como un operador

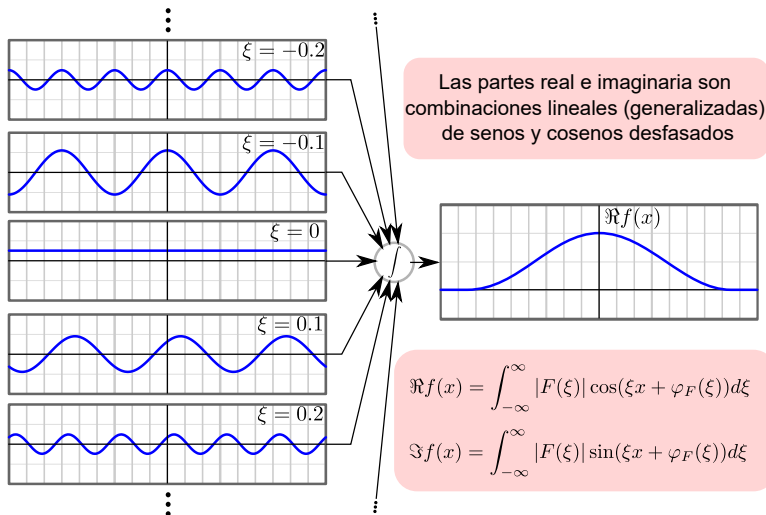


$$f(x) = \mathbf{TF}^{-1}[F(\xi)] \quad g(x) \neq \mathbf{TF}^{-1}[G(\xi)]$$

- Aunque no se puede garantizar la convergencia en todos los casos, veremos que para la mayor parte de **señales de interés** la TF **existe y converge**.
- Además, veremos que se puede **extender** la definición a **señales periódicas y distribuciones**.

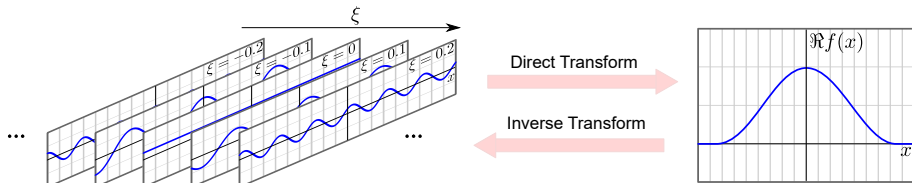


Ejemplo: Gaussiana



Ejemplo: Gaussiana

La transformada de Fourier nos permite descomponer una señal en señales sinusoidales. La amplitud y fase de estas sinusoides da lugar a la señal transformada.



$$\Re f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)| \cos(\xi x + \varphi_F(\xi)) d\xi$$

$$\Im f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)| \sin(\xi x + \varphi_F(\xi)) d\xi$$



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Convergencia de la TF
 - Criterios de convergencia de la TF
- 4 Propiedades de la TF
- 5 Ejemplos de Transformadas de Fourier
- 6 Relación entre la TF y los SLI
- 7 Densidad espectral de energía
- 8 Ancho de banda



Criterios de convergencia de la TF

- Como ocurría en el DSF, la **existencia de los coeficientes** $F(\xi)$, que viene dada por una integral en todo $\mathbb{R}$, no está garantizada.
- Es más, incluso aunque exista la TF $F(\xi)$, no hay **garantías de que la transformada inversa converja** y permita recuperar la señal original $f(x)$.
- A pesar de que existen un gran número de **criterios de convergencia**, nos centraremos en dos, similares a los utilizados en el DSF.
 - Es intuitivo entender que, puesto que la TF se puede interpretar como un paso al límite del DSF, estos criterios serán los mismos pero cubriendo todo el intervalo de integración en lugar de un único periodo.
- En la práctica, **todas las señales que se pueden generar en un laboratorio tendrán TF**.



Problemas en la convergencia de la TF

- Es importante notar que aquí, al contrario que en el DSF, aunque exista una singularidad en $F(\xi)$, esta no tiene por qué conllevar que no exista la transformada de Fourier inversa.
- El motivo es que, como sabemos, una integral puede converger aunque el integrando sea singular en uno o más puntos aislados.



Criterios de convergencia de la TF

Criterios de convergencia

La TF de una señal $f(x)$ existirá y convergerá si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

- $f(x) \in L^2$, es decir, es cuadrado integrable,
- $f(x) \in L^1$, es decir, es absolutamente integrable y, además, tiene un número finito de (a) máximos y mínimos y (b) discontinuidades, en cualquier intervalo finito. Además, todas las discontinuidades deben ser finitas.

Es importante observar que estas son **condiciones suficientes** (pero no necesarias).

- Cada uno de estos criterios nos ofrecerá un grado de convergencia diferente.



Convergencia de la TF - Funciones L^2

- El primer caso de interés es cuando $f(x) \in L^2$:

$$\|f(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = E[f(x)] < \infty$$

- Cualquier señal que tenga **energía finita**, tendrá una TF que **converge en el sentido de la norma-2** (norma inducida por el producto escalar):

$$d\left(f(x), \mathbf{TF}^{-1}(F(\xi))\right) = \left\|f(x) - \mathbf{TF}^{-1}(F(\xi))\right\| = 0$$

- Este hecho es especialmente importante pues las señales que se pueden generar en un **laboratorio** son siempre de **energía finita**.



Convergencia de la TF - Condiciones de Dirichlet

- El segundo criterio se conoce, al igual que en el DSF, como **Condiciones de Dirichlet**:

① $f(x) \in L^1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

- ② El número de discontinuidades de $f(x)$ en un intervalo finito ha de ser finito. Además, las discontinuidades deben ser finitas.
- ③ El número de máximos y mínimos de $f(x)$ en un intervalo finito ha de ser finito.
- En la práctica, nuevamente, las señales que no cumplen las dos últimas condiciones son bastante **“artificiales”** por lo que se suele asumir que estas condiciones se cumplen.
- Si se cumplen las condiciones de Dirichlet, **la transformada inversa converge punto a punto** hacia $f(x)$ excepto en los puntos donde $f(x)$ es discontinua.
 - En las discontinuidades, convergerá hacia el **valor medio de la discontinuidad**.



Convergencia de la TF - Ejercicio

Ejercicio

Compruebe si la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, cumple alguno de los criterios de convergencia.



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Convergencia de la TF
- 4 Propiedades de la TF**
 - Propiedades generales
 - Teorema de Parseval
- 5 Ejemplos de Transformadas de Fourier
- 6 Relación entre la TF y los SLI
- 7 Densidad espectral de energía



Propiedades generales de la TF

Linealidad	$\alpha f(x) + \beta g(x)$	$\alpha F(\xi) + \beta G(\xi)$
Desplazamiento	$f(x - x_0)$	$F(\xi) e^{-j\xi x_0}$
Producto por exponencial imaginaria	$f(x) e^{j\xi_0 x}$	$F(\xi - \xi_0)$
Conjugado de la función	$f^*(x)$	$F^*(-\xi)$
Reflexión	$f(-x)$	$F(-\xi)$
Escalado variable indep.	$f(ax)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\xi}{a}\right)$
Convolución	$f(x) * g(x)$	$F(\xi) G(\xi)$
Producto	$f(x) g(x)$	$\frac{1}{2\pi} F(\xi) * G(\xi)$
Primera derivada	$\frac{d}{dx} f(x)$	$j\xi F(\xi)$
Derivada n -ésima	$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$	$(j\xi)^n F(\xi)$
Producto con x^n , $n > 0$	$x^n f(x)$	$j^n \frac{d^n F(\xi)}{d\xi^n}$
Integración	$\int_{-\infty}^x f(y) dy$	$\frac{1}{j\xi} F(\xi) + \pi F(0) \delta(\xi)$
Dualidad	$F(x)$	$2\pi f(-\xi)$
Producto escalar	$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle F(\xi), G(\xi) \rangle$	
Señales reales	$f(x)$ real	$F(\xi) = F^*(-\xi)$
Señales pares	$f(x) = f(-x)$	$F(\xi) = F(-\xi)$
Señales impares	$f(x) = -f(-x)$	$F(\xi) = -F(-\xi)$

(se asume que las TFs de las señales $f(x)$ y $g(x)$ son $F(\xi)$ y $G(\xi)$, respectivamente)



Teorema de Parseval

- A partir de la propiedad del producto escalar, es directo demostrar el siguiente teorema.

Teorema de Parseval (o Plancherel)

La energía en una señal $f(x)$ es la misma, salvo un factor de escala, que la energía de la señal dada por su transformada de Fourier.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2 d\xi$$

$$E[f(x)] = \frac{1}{2\pi} E[F(\xi)]$$



Ejemplo propiedades de la TF

Ejercicio

- ➊ Haciendo uso de la definición de la TF, calcule **TF** $[e^{-ax}u(x)]$ con $\Re a > 1$.
- ➋ Haciendo uso de las propiedades de la TF y del resultado anterior, calcule **TF** $[e^{-a|x|}]$.
- ➌ Haciendo uso de las propiedades de la TF y de los resultados anteriores, calcule **TF** $[\frac{2}{1+x^2}]$.
- ➍ Teniendo en cuenta los resultados anteriores, calcule $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+x^2} dx$.

Ejercicio

Usando el resultado del apartado 1 del ejercicio anterior, y observando que

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{a+j\xi} \right) = \frac{1}{(a+j\xi)^2}$$

calcule la TF inversa de

$$\frac{1}{(a+j\xi)^2}$$

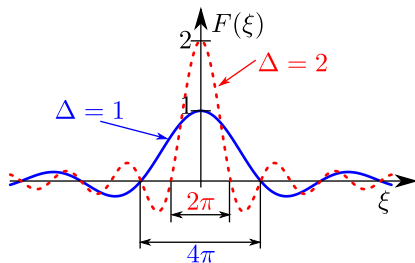
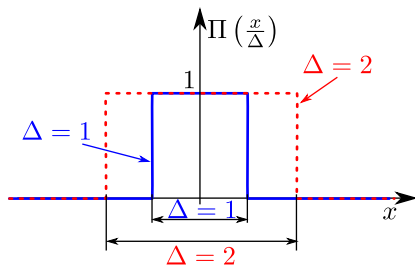
Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Convergencia de la TF
- 4 Propiedades de la TF
- 5 Ejemplos de Transformadas de Fourier**
 - Señales de energía finita
 - Distribuciones y señales de energía infinita
 - La TF de señales periódicas
- 6 Relación entre la TF y los SLI
- 7 Densidad espectral de energía



Pulso rectangular

$$f(x) = \Pi\left(\frac{x}{\Delta}\right) \longleftrightarrow F(\xi) = \Delta \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\xi\right)$$



- Observe que:
 - cuanto más estrecho es el pulso, mayor es el lóbulo principal en el dominio espectral.
 - se cumplen las propiedades para señales reales y pares.



Pulso rectangular

Demostración

La demostración es directa a partir de la definición de TF:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx &= \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^{-j\xi x} dx = \frac{1}{-j\xi} e^{-j\xi x} \Big|_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \\ &= \frac{e^{j\frac{\Delta}{2}\xi} - e^{-j\frac{\Delta}{2}\xi}}{j\xi} = 2 \frac{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\xi\right)}{\xi} = 2 \frac{\Delta}{2} \frac{\sin\left(\frac{\Delta}{2}\xi\right)}{\xi \frac{\Delta}{2}} = \Delta \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\xi\right)\end{aligned}$$



Señal sinc

- A partir del resultado obtenido para un pulso, aplicando **dualidad** podemos obtener el resultado para la TF de la **señal sinc**:

$$\begin{aligned}\Pi\left(\frac{x}{\Delta}\right) &\longleftrightarrow \Delta \text{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\xi\right) \\ \Delta \text{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}x\right) &\longleftrightarrow 2\pi \Pi\left(\frac{-\xi}{\Delta}\right) = 2\pi \Pi\left(\frac{\xi}{\Delta}\right) \\ \text{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}x\right) &\longleftrightarrow \frac{2\pi}{\Delta} \Pi\left(\frac{\xi}{\Delta}\right) \\ \boxed{\frac{\Delta}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}x\right) &\longleftrightarrow \Pi\left(\frac{\xi}{\Delta}\right)}\end{aligned}$$



Pulso rectangular

Ejercicio

Demuestre que

$$\text{sinc}\xi_1 x * \text{sinc}\xi_2 x = \text{sinc}\xi_3 x$$

y calcule el valor de ξ_3 .

Ejercicio

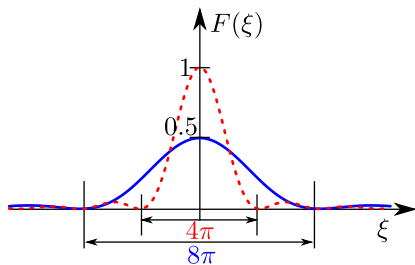
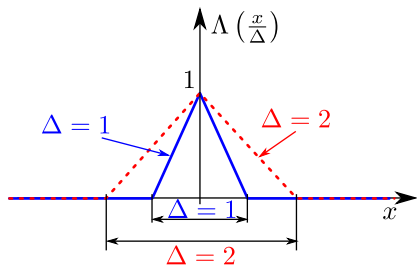
Calcule el siguiente producto escalar

$$\left\langle e^{j\xi_0 x} \text{sinc}\xi_0 x, e^{-j\xi_0 x} \text{sinc}\xi_0 x \right\rangle$$



Pulso triangular

$$f(x) = \Lambda\left(\frac{x}{\Delta}\right) \longleftrightarrow F(\xi) = \frac{\Delta}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta}{4}\xi\right)$$



- Observe que:
 - cuanto más estrecho es el triángulo, mayor es el lóbulo principal en el dominio espectral.
 - se cumplen las propiedades para señales reales y pares.



Pulso triangular

Demostración

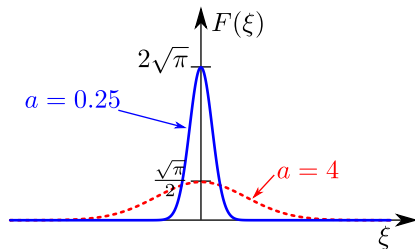
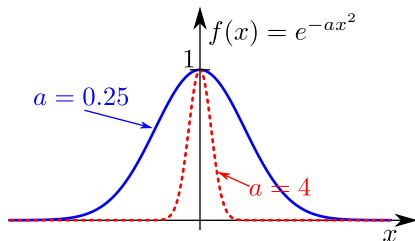
La demostración es directa a partir de la definición a partir de la propiedad de la convolución:

$$\begin{aligned}\Lambda\left(\frac{x}{\Delta}\right) &= \frac{2}{\Delta} \Pi\left(\frac{x}{\Delta/2}\right) * \Pi\left(\frac{x}{\Delta/2}\right) \\ \Lambda\left(\frac{x}{\Delta}\right) &\longleftrightarrow \frac{2}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta}{4}\xi\right)\right)^2 = \frac{\Delta}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\Delta}{4}\xi\right)\end{aligned}$$



Señal Gaussiana

$$f(x) = e^{-ax^2} \longleftrightarrow F(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \quad \text{con } \Re a > 0$$



● Observe que:

- la TF de una gaussiana es otra gaussiana,
- cuanto más estrecha (y por ello tiene variaciones más rápidas) es la señal $f(x)$, más ancha es la señal $F(\xi)$ (es decir, mayores frecuencias utiliza),
- Se cumplen las propiedades para señales reales y pares.



Señal Gaussiana

Demostración

La demostración es directa si se parte del resultado conocido

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{(b^2-4ac)}{4a}}, \text{ con } \Re a > 0$$

simplemente tomando $b = j\xi$ y $c = 0$.

La relación anterior puede demostrarse a partir del resultado conocido de teoría de la probabilidad

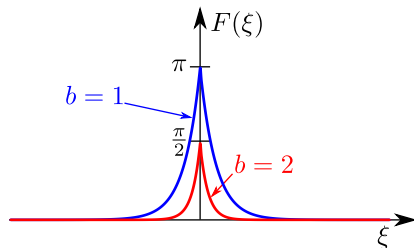
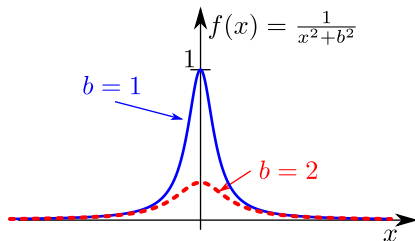
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

realizando completando cuadrados y realizando un cambio de variable. No obstante, la demostración rigurosa requiere conocer los rudimentos de integración por contornos para poder generalizar el resultado a números complejos.



Señal Pseudo-Gaussiana

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + b^2} \longleftrightarrow F(\xi) = \frac{\pi}{b} e^{-b|\xi|}$$



- Observe que:
 - cuanto más estrecha (y por ello tiene variaciones más rápidas) es la señal $f(x)$, más ancha es la señal $F(\xi)$ (es decir, mayores frecuencias utiliza).
 - Se cumplen las propiedades para señales reales y pares.



Señal Pseudo-Gaussiana

Demostración

La demostración se basa en la siguiente integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2b} e^{-b|\beta|}$$

la cual se demuestra por integración por contornos.

Para demostrar la TF de la pseudogaussiana:

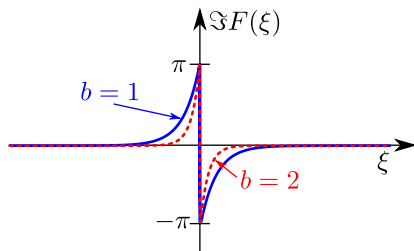
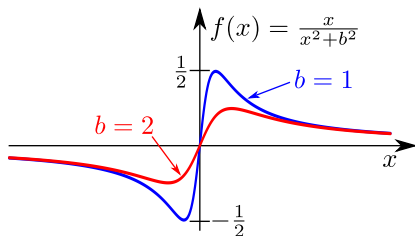
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + b^2} e^{-j\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \xi x}{x^2 + b^2} dx + j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi x}{x^2 + b^2} dx$$

puesto que los integrandos de estas dos integrales son una función par e impar, respectivamente, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + b^2} e^{-j\xi x} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{b} e^{-b|\xi|}$$

Señal Pseudo-Gaussiana multiplicada por x

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + b^2} \longleftrightarrow F(\xi) = -j\pi \operatorname{sgn}(\xi) e^{-b|\xi|}$$



● Observe que:

- cuanto más estrecha (y por ello tiene variaciones más rápidas) es la señal $f(x)$, más ancha es la señal $F(\xi)$ (es decir, mayores frecuencias utiliza).
- Se cumplen las propiedades para señales reales e impares.



Señal Pseudo-Gaussiana multiplicada por x

Demostración

La demostración se puede realizar a partir de la TF de la pseudogaussiana y la propiedad del producto con x

$$xf(x) = \frac{x}{x^2 + b^2} \longleftrightarrow -j \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\pi}{b} e^{-b|\xi|} \right)$$

Operando tenemos que:

$$j \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\pi}{b} e^{-b|\xi|} \right) = -j\pi \frac{d|\xi|}{d\xi} e^{-b|\xi|} = -j\pi \operatorname{sgn}(\xi) e^{-b|\xi|}$$



Transformada de Fourier de distribuciones

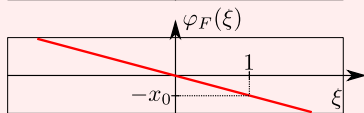
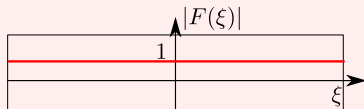
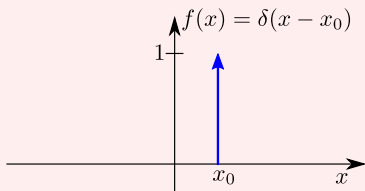
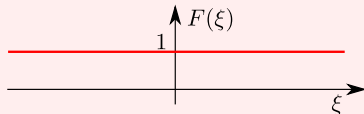
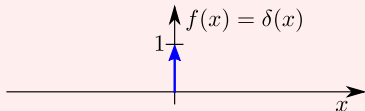
- El concepto de Transformada de Fourier puede **generalizarse** al caso de **distribuciones** (ver apéndice).
 - Esta **transformada generalizada** se define de modo que se cumplen la mayor parte de **propiedades** de la TF (dualidad, derivadas, traslaciones, convoluciones y paridad)
- Es posible demostrar que para el caso de distribuciones de tipo impulsivo ($\delta(x)$, $\delta'(x)$, etc.) y distribuciones asociadas (p.ej., su primitiva $\Gamma(x)$), se puede obtener el mismo resultado operando con “normalidad”.
- El uso de distribuciones nos permitirá definir la TF de un buen número de señales importantes, las cuales no sería posible definir con la TF convencional.
 - Dentro de este ámbito se incluirían las **señales periódicas**.



Delta de Dirac

$$\delta(x) \longleftrightarrow 1$$

$$\delta(x - x_0) \longleftrightarrow e^{-j\xi x_0}$$



Demostración

La demostración es trivial usando la definición de la delta de Dirac

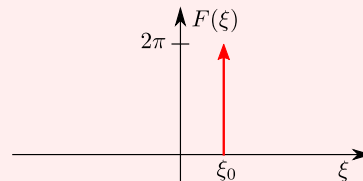
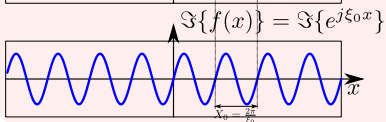
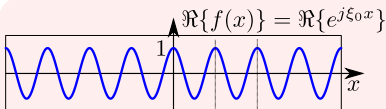
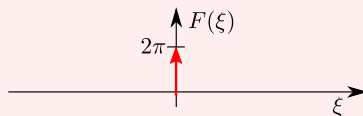
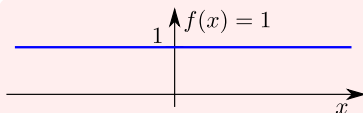
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) e^{-j\xi x} dx = e^{-j\xi x_0}$$

Delta de Dirac

- Además, aplicando la propiedad de dualidad sobre el resultado anterior:

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\xi)$$

$$e^{j\xi_0 x} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\xi - \xi_0)$$

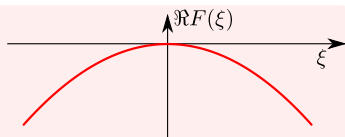
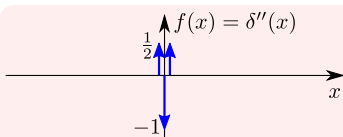
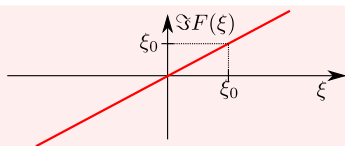
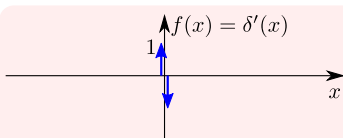


Derivadas de la delta de Dirac

- De manera análoga al caso anterior:

$$\delta^{(n)}(x) \longleftrightarrow (j\xi)^n$$

$$\delta^{(n)}(x - x_0) \longleftrightarrow (j\xi)^n e^{-j\xi x_0}$$



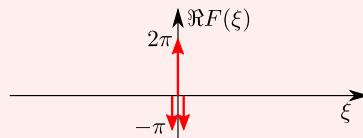
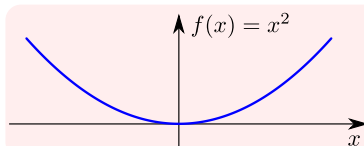
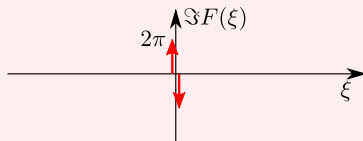
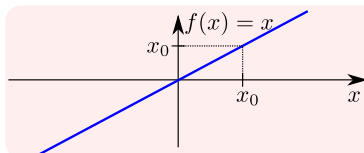
Demostración

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x - x_0) e^{-j\xi x} dx = (-1)^n \left. \frac{d^n (e^{-j\xi x})}{dx^n} \right|_{x=x_0} = (-1)^n (-j\xi)^n e^{-j\xi x_0} = (j\xi)^n e^{-j\xi x_0}$$

Derivadas de la delta de Dirac

- Aplicando la propiedad de dualidad sobre el resultado anterior:

$$x^n \longleftrightarrow 2\pi j^n \delta^{(n)}(\xi)$$



Demstración

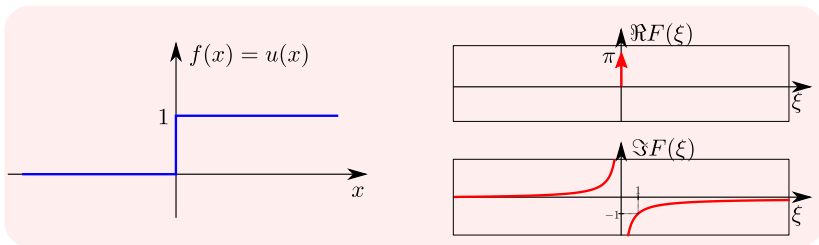
$$(jx)^n \longleftrightarrow 2\pi \delta^{(n)}(-\xi) = (-1)^n 2\pi \delta^{(n)}(\xi)$$

$$x^n \longleftrightarrow 2\pi \frac{1}{j^n} (-1)^n \delta^{(n)}(\xi) = 2\pi j^n \delta^{(n)}(\xi)$$

Función salto unidad

- Relacionada con la delta de Dirac, está también la TF de la función salto unidad:

$$u(x) \longleftrightarrow \pi\delta(\xi) + \frac{1}{j\xi}$$



Ejercicio

Demuestre la propiedad de integración a partir de la TF de la función salto unidad.

$$\int_{-\infty}^x f(y) dy \leftrightarrow \frac{1}{j\xi} F(\xi) + \pi F(0) \delta(\xi)$$

Función salto unidad

Demostración

La demostración se basa en la propiedad de la derivada de la TF y el hecho de que $u'(x) = \delta(x)$

$$1 = \mathbf{TF}(\delta(x)) = \mathbf{TF}(u'(x)) = j\xi \mathbf{TF}(u(x))$$

despejando en esta última igualdad, y teniendo en cuenta el resultado visto en distribuciones, tenemos que:

$$\mathbf{TF}(u(x)) = \frac{1}{j\xi} + C\delta(\xi)$$

donde C es una constante a determinar. Para ello, tendremos en cuenta que:

$$\mathbf{TF}(\text{sgn}(x)) = \mathbf{TF}(2u(x) - 1) = 2\mathbf{TF}(u(x)) - 2\pi\delta(\xi) = \frac{2}{j\xi} + (2C - 2\pi)\delta(\xi)$$

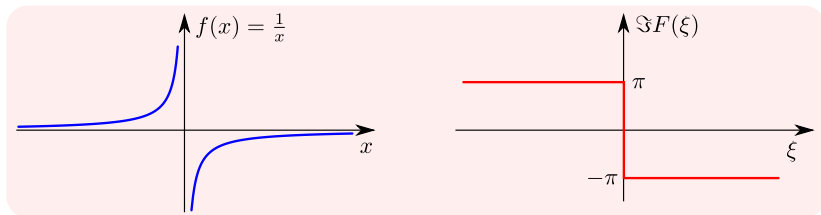
puesto que la $\mathbf{TF}(\text{sgn}(x))$ debe ser una función impar, el término de $\delta(\xi)$ debe cancelarse pues es una distribución par:

$$2C - 2\pi = 0 \Leftrightarrow C = \pi$$

Función salto unidad

- Por dualidad es sencillo ver que:

$$\frac{1}{x} \longleftrightarrow -\pi j \operatorname{sgn}(\xi)$$



Demostración

$$\begin{aligned} u(x) &\longleftrightarrow \pi \delta(\xi) + \frac{1}{j\xi} \quad \Leftrightarrow \quad \pi \delta(x) + \frac{1}{jx} \longleftrightarrow 2\pi u(-\xi) \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{jx} &\longleftrightarrow 2\pi u(-\xi) - \mathbf{TF}(\pi \delta(x)) = 2\pi u(-\xi) - \pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \longleftrightarrow 2\pi j \left(u(-\xi) - \frac{1}{2} \right) = \pi j \operatorname{sgn}(-\xi) \end{aligned}$$

TF de Señales periódicas

- Con la ayuda de distribuciones es posible obtener la TF de **señales periódicas**.
- Para ello basta con observar que, si una señal admite DSF, entonces se puede expresar como

$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x}$$

- Teniendo en cuenta que **TF** $[e^{jm\xi_0 x}] = 2\pi\delta(\xi - m\xi_0)$:

$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x} \longleftrightarrow F_0(\xi) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \delta(\xi - m\xi_0)$$

- Tal y como se vio en la introducción, **los coeficientes del DSF se pueden calcular a partir de la TF de la señal en un periodo**:

$$a(m) = \frac{1}{X_0} \int_{-\frac{X_0}{2}}^{\frac{X_0}{2}} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx = \frac{1}{X_0} F(m\xi_0) \quad \text{con } F(\xi) = \int_{-\frac{X_0}{2}}^{\frac{X_0}{2}} f_0(x) e^{-j\xi x} dx$$

- Es posible escoger otro **intervalo de integración**, p.ej. $[x_0, X_0 + x_0]$, y aunque $F(\xi)$ será diferente, en los puntos $m\xi_0$ el resultado será el mismo.



TF de Señales periódicas

TF de Señales periódicas

La transformada de Fourier de una señal periódica, con periodo X_0 , está compuesta por un tren de deltas separadas $\xi_0 = \frac{2\pi}{X_0}$ cuyas amplitudes son proporcionales a los coeficientes del DSF.

$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)e^{jm\xi_0 x} \longleftrightarrow F_0(\xi) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)\delta(\xi - m\xi_0)$$

Además, los coeficientes del DSF se pueden calcular a partir de la **TF de la señal en un periodo** como:

$$a(m) = \frac{1}{X_0} F(m\xi_0)$$

$$F(\xi) = \int_{x_0}^{x_0+X_0} f_0(x)e^{-j\xi x} dx, \forall x_0$$

TF de Señales periódicas

Ejercicio

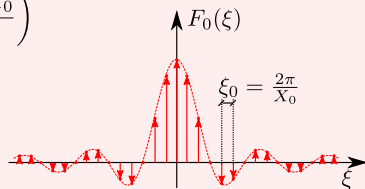
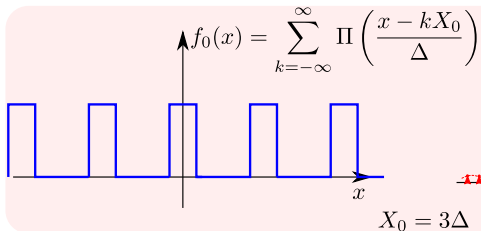
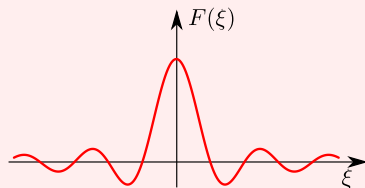
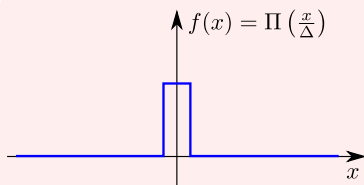
Calcule la TF de un tren de pulsos $f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x-mX_0}{\Delta}\right)$ a partir de la TF de un pulso $\Pi\left(\frac{x}{\Delta}\right)$.

Solución

$$\Pi_{0,\Delta}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x-mX_0}{\Delta}\right) \longleftrightarrow \frac{2\pi\Delta}{X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(m\pi\frac{\Delta}{X_0}\right) \delta(\xi - m\xi_0)$$



TF de Señales periódicas



$$X_0 = 3\Delta$$



Algunas señales periódicas de interés

- A partir del resultado anterior, o mediante una descomposición en exponenciales, es trivial calcular la TF de **senos y cosenos**:

$$\cos(\xi_0 x) \longleftrightarrow \pi \delta(\xi - \xi_0) + \pi \delta(\xi + \xi_0)$$

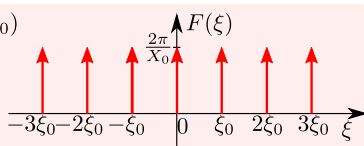
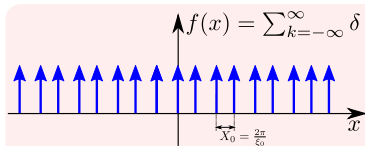
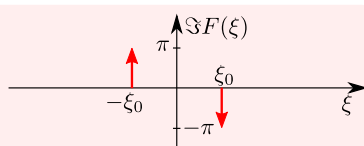
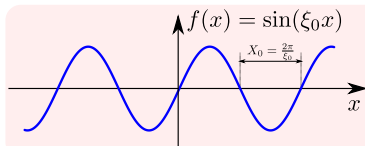
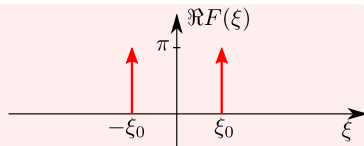
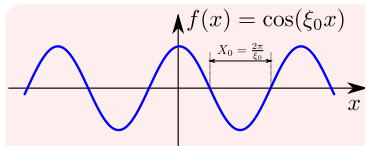
$$\sin(\xi_0 x) \longleftrightarrow \frac{\pi}{j} \delta(\xi - \xi_0) - \frac{\pi}{j} \delta(\xi + \xi_0)$$

- Además, es sencillo demostrar con la fórmula de la **suma de Poisson** que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - kX_0) \longleftrightarrow \frac{2\pi}{X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\xi - m\xi_0), \text{ con } \xi_0 = \frac{2\pi}{X_0}$$



Algunas señales periódicas de interés



Índice

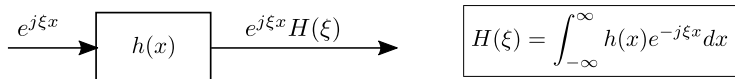
- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Convergencia de la TF
- 4 Propiedades de la TF
- 5 Ejemplos de Transformadas de Fourier
- 6 Relación entre la TF y los SLI**
- 7 Densidad espectral de energía
- 8 Ancho de banda



Respuesta de un SLI a una exponencial compleja

- Como hemos visto, las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas lineales e invariantes:

$$\mathbf{F}[\varphi(x; \xi)] = \varphi(x; \xi) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x') e^{j\xi(x-x')} dx' = e^{j\xi x} \int_{-\infty}^{\infty} h(x') e^{-j\xi x'} dx$$



- A la función

$$H(\xi) = \mathbf{TF}[h(x)]$$

se conoce como **función de transferencia del sistema**.



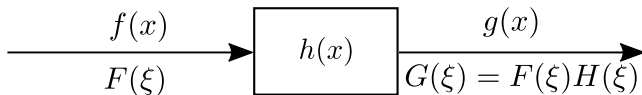
Respuesta de un SLI a una señal arbitraria

- Consecuentemente, la respuesta de un SLI a una señal $f(x)$ será:

$$g(x) = \mathbf{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \mathbf{F}[\varphi(x; \xi)] d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) H(\xi) e^{j\xi x} d\xi$$

- Es decir, la relación entre el espectro de la señal de entrada y la señal de salida será:

$$G(\xi) = F(\xi)H(\xi)$$

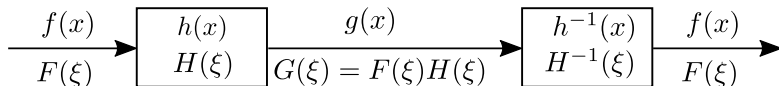


Sistema inverso de un SLI

- La función de transferencia del **sistema inverso** vendrá dada por:

$$\mathbf{TF} \left[h^{-1}(x) \right] = \frac{1}{H(\xi)}$$

- Es necesario exigir que $H(\xi) \neq 0, \forall \xi$.



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Convergencia de la TF
- 4 Propiedades de la TF
- 5 Ejemplos de Transformadas de Fourier
- 6 Relación entre la TF y los SLI
- 7 Densidad espectral de energía**
- 8 Ancho de banda



Densidad espectral de energía

- Recordemos que el teorema de Parseval nos dice que:

$$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\xi)|^2 d\xi \quad [J]$$

- Por tanto, el término $G_f(\xi) = |F(\xi)|^2$ describe **el reparto de la energía a lo largo del dominio espectral** y se puede asumir que tiene unidades $[J/(rad/s)]$ o $[J/(rad/m)]$, dependiendo del dominio en el que se trabaje.
- Al término $G_f(\xi) = |F(\xi)|^2$ se le denomina **densidad espectral de energía**.



Teorema de Wiener-Kinchine

Teorema de Wiener-Kinchine

La densidad espectral de energía se relaciona con la **autocorrelación** de una señal mediante la transformada de Fourier:

$$R_f(x) \leftrightarrow G_f(\xi)$$

siendo la demostración directa pues $R_f(x) = f(x) * f^*(-x)$ y teniendo en cuenta las propiedades de la TF.

También existen relaciones similares para el caso de las **correlaciones cruzadas**:

$$R_{fg}(x) \leftrightarrow G_{fg}(\xi) = F(\xi)G^*(\xi)$$

$$R_{gf}(x) \leftrightarrow G_{gf}(\xi) = G(\xi)F^*(\xi)$$



Ejemplo del Teorema de Wiener-Kinchine

- **Ejemplo** del teorema de Wiener-Kinchine:

$$\begin{array}{ccc}
 f(x) & \xleftrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & R_f(x) \\
 \updownarrow \text{TF} & & \updownarrow \text{TF} \\
 F(\xi) & \xleftrightarrow{|\cdot|^2} & G_f(\xi)
 \end{array}$$

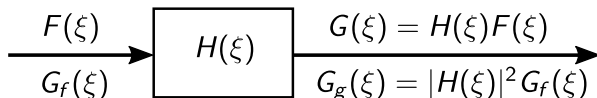
$$\begin{array}{ccc}
 f(x) = \Pi\left(\frac{x}{\Delta}\right) & \xleftrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} & R_f(x) = \Delta \Lambda\left(\frac{x}{2\Delta}\right) \\
 \updownarrow \text{TF} & & \updownarrow \text{TF} \\
 F(\xi) = \Delta \text{sinc}\left(\frac{\Delta}{2}\xi\right) & \xleftrightarrow{|\cdot|^2} & G_f(\xi) = \Delta^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta}{2}\xi\right)
 \end{array}$$



Relación de la DEE y los SLI

- La relación entre la densidad espectral de energía de las señales a la entrada y a la salida de un SLI viene dada por:

$$G_g(\xi) = |H(\xi)|^2 G_f(\xi)$$



Índice

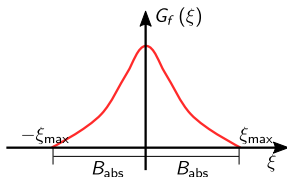
- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Convergencia de la TF
- 4 Propiedades de la TF
- 5 Ejemplos de Transformadas de Fourier
- 6 Relación entre la TF y los SLI
- 7 Densidad espectral de energía
- 8 Ancho de banda**



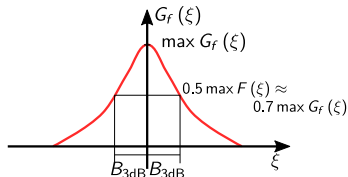
Definiciones de ancho de banda - banda-base

- En el caso de señales **banda-base** (señales con su densidad espectral comprendida entorno a $\xi = 0$):

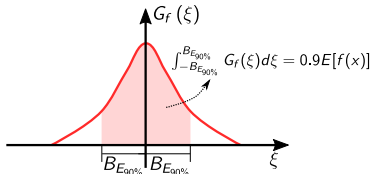
Ancho de banda absoluto



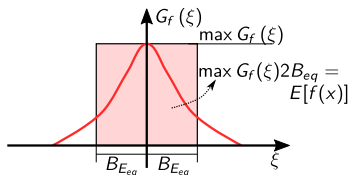
Ancho de banda a mitad de nivel (3dB)



Ancho de banda según porcentaje de energía



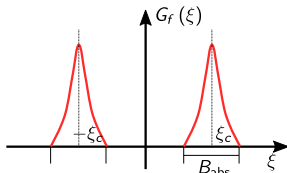
Ancho de banda equivalente



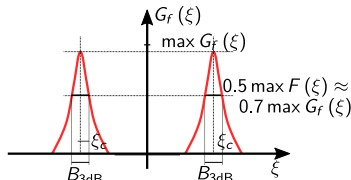
Definiciones de ancho de banda - paso-banda

- En el caso de señales **paso-banda** (señales con su densidad espectral comprendida entorno a un punto $\xi = \xi_c$):

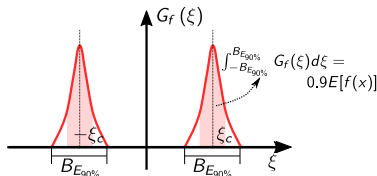
Ancho de banda absoluto



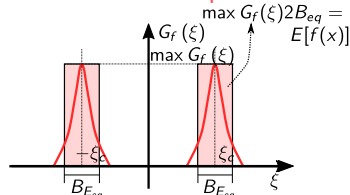
Ancho de banda a mitad de nivel (3dB)



Ancho de banda según porcentaje de energía



Ancho de banda equivalente



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Convergencia de la TF
- 4 Propiedades de la TF
- 5 Ejemplos de Transformadas de Fourier
- 6 Relación entre la TF y los SLI
- 7 Densidad espectral de energía
- 8 Ancho de banda



Apéndices

Definiciones alternativas - I

- Desafortunadamente existe falta de consenso en cuanto a la definición de las ecuaciones anteriores.
- Por ejemplo, en física se suele hacer el cambio $i = -j$:

~~$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx$$~~

~~$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-i\xi x} d\xi$$~~

- Otros autores mueven el factor 2π entre ecuaciones:

~~$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx$$~~

~~$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{j\xi x} d\xi$$~~

o

~~$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx$$~~

~~$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{j\xi x} d\xi$$~~



Definiciones alternativas - II

- Otra definición muy extendida es realizar la transformada con respecto a la frecuencia $f = \frac{\xi}{2\pi}$, en lugar de con respecto a la pulsación angular. En estos casos, el cambio de variable elimina el factor de $\frac{1}{2\pi}$ de las ecuaciones:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-j2\pi fx} dx$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi fx} df$$



La Transformada de Fourier generalizada - Definición

- La definición de las distribuciones es de funcionales lineales y continuos, habitualmente definidos por su comportamiento bajo el signo integral.
- No tiene por tanto sentido hablar de su transformada de Fourier.
- Sin embargo, la TF se puede generalizar a distribuciones mediante la siguiente observación

•

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \mathbf{TF} \{g(x)\} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-j\xi x} dx \right) d\xi =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-j\xi x} d\xi \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{TF} \{f(\xi)\} g(x) dx$$

que es válida para dos funciones (de Schwarz) cualesquiera.

- De este modo, se define la TF de Fourier generalizada como:

$$\langle f(\xi), \mathbf{TF} \{D(x)\} \rangle = \langle \mathbf{TF} \{f(\xi)\}, D(x) \rangle \quad \forall f(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

- Algunos autores limitan la definición de la TF convencional a señales de variación acotada en L^1 y utilizan esta definición para el resto de señales (p.ej., señales L^2 como la sinc).



La Transformada de Fourier generalizada - Ejemplos

- La transformada de Fourier de $\delta(x)$ se puede definir, de manera ortodoxa, como:

$$\begin{aligned}\langle f(\xi), \mathbf{TF}\{\delta(x)\} \rangle &= \langle \mathbf{TF}\{f(\xi)\}, \delta(x) \rangle = \mathbf{TF}\{f(\xi)\}|_{x=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi = \langle f(\xi), 1 \rangle\end{aligned}$$

y, por tanto, $\mathbf{TF}\{\delta(x)\} = 1$.

- Otro ejemplo con la distribución $\delta'(x)$

$$\begin{aligned}\langle f(\xi), \mathbf{TF}\{\delta'(x)\} \rangle &= \langle \mathbf{TF}\{f(\xi)\}, \delta'(x) \rangle = - \left. \frac{d\mathbf{TF}\{f(\xi)\}}{dx} \right|_{x=0} \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{d}{dx} \left(e^{-j\xi x} \right) \Big|_{x=0} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) (j\xi) dk = \langle f(\xi), (j\xi) \rangle\end{aligned}$$

y, por tanto, $\mathbf{TF}\{\delta'(x)\} = j\xi$.



La Transformada de Fourier generalizada - Ejemplos

- Es posible probar que las propiedades de la transformada de Fourier relativas a dualidad, derivadas, traslaciones, convoluciones y paridad, válidas para señales en L^1 son extrapolables a distribuciones.
- Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 \langle f(\xi), \mathbf{TF}\{D'(x)\} \rangle &= \langle \mathbf{TF}\{f(\xi)\}, D'(x) \rangle = - \left\langle \frac{d}{dx} \mathbf{TF}\{f(\xi)\}, D(x) \right\rangle = \\
 &= - \langle -j\xi \mathbf{TF}\{f(\xi)\}, D(x) \rangle = j\xi \langle \mathbf{TF}\{f(\xi)\}, D(x) \rangle \\
 &= j\xi \langle f(\xi), \mathbf{TF}\{D(x)\} \rangle = \langle f(\xi), j\xi \mathbf{TF}\{D(x)\} \rangle
 \end{aligned}$$



Señales limitadas en tiempo

Teorema de Benedick

El teorema de Bendick afirma que, si $f(x)$ es de buen comportamiento, entonces $f(x)$ y $F(\xi)$ no pueden ambas tener soporte (de medida no cero) finito.

A efectos prácticos, esto implica que las señales no pueden estar limitadas simultáneamente en tiempo y frecuencia.

El lector interesado puede consultar más detalles en la siguiente referencia:

- Benedicks, M. (1985), "On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure", *J. Math. Anal. Appl.*, 106 (1): 180–183.

