

Señales periódicas: el Desarrollo en Serie de Fourier

Tema 6

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

Índice I

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Convergencia del DSF
 - Análisis del error en el DSF truncado
 - Criterios de convergencia del DSF
- 4 Propiedades del DSF
 - Propiedades generales
 - Teorema de Parseval
- 5 Ejemplos de DSFs
 - Señales sinusoidales
 - Trenes de pulsos y triángulos
 - DSF de distribuciones periódicas
 - Fórmula de la suma de Poisson
- 6 Relación entre el DSF y los SLI
- 7 Apéndices



Índice

- 1 **Introducción**
- 2 Definición
- 3 Convergencia del DSF
- 4 Propiedades del DSF
- 5 Ejemplos de DSFs
- 6 Relación entre el DSF y los SLI
- 7 Apéndices



Introducción

- En este tema veremos como (casi) cualquier función periódica $f_0(x) \in P(X_0)$ puede expresarse como una combinación lineal de funciones conocidas.
 - Estas funciones, denominadas funciones base, son exponenciales complejas.
 - A esta combinación lineal de funciones base se la conoce como **Desarrollo en Serie de Fourier (DSF)**.
- Veremos que estas funciones base permiten generar un espacio de señales de dimensión infinita.
 - En la práctica, la combinación lineal se trunca a un número de términos finito, dando lugar a un cierto **error**.
- Veremos como además, el DSF nos permite un análisis simple del paso de señales periódicas por **sistemas lineales**.



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición**
- 3 Convergencia del DSF
- 4 Propiedades del DSF
- 5 Ejemplos de DSFs
- 6 Relación entre el DSF y los SLI
- 7 Apéndices



Álgebra del espacio

- Conviene recordar el álgebra del espacio vectorial $P(X_0)$

$P(X_0)$

$$\langle f_0(x), g_0(x) \rangle = \int_{\langle X_0 \rangle} f_0(x) g_0^*(x) dx$$

$f_0(x)$

$$\|f_0(x)\|^2 = \int_{\langle X_0 \rangle} |f_0(x)|^2 dx$$

$g_0(x)$

$$d^2(f_0(x), g_0(x)) = \int_{\langle X_0 \rangle} |f_0(x) - g_0(x)|^2 dx$$



Funciones base

Ejercicio

Demuestre que la colección de funciones $\{\varphi(x; m)\} = e^{jm\xi_0 x}$:

- ❶ pertenecen a $P(X_0)$
- ❷ tienen por norma $\|\varphi(x; m)\|^2 = X_0$
- ❸ son ortogonales, es decir

$$\langle \varphi(x; m), \varphi(x; n) \rangle = \begin{cases} X_0 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

- Puesto que las funciones son ortogonales, también son linealmente independientes, se concluye que **forman una base de un subespacio de $P(X_0)$** .



Expansión de funciones periódicas

- Es posible demostrar que el subespacio generado por las funciones base **exponenciales de argumento imaginario**

$$\{\varphi(x; m)\} = e^{jm\xi_0 x} \text{ con } \xi_0 = \frac{2\pi}{X_0}$$

cubre la mayor parte de señales de interés pertenecientes a $P(X_0)$.

- En general, es posible expresar una función periódica de VC como:

$$f_0(x) \approx \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m)\varphi(x; m) \text{ con } a(m) = \frac{1}{X_0} \langle f_0(x), \varphi(x; m) \rangle$$

existen algunas **excepciones** que analizaremos más adelante.

- En cualquier caso, según el **Teorema de la Mejor Aproximación**, esta aproximación será la mejor que se puede hacer de $f_0(x)$ utilizando como base $\{\varphi(x; m)\}$.



Desarrollo en Serie de Fourier

Ecuación de análisis y síntesis

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, tenemos las denominadas ecuaciones de análisis y síntesis:

$$a(m) = \frac{1}{X_0} \int_{\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx \quad (\text{ec. análisis})$$

$$f_0(x) \approx \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x} \quad (\text{ec. síntesis})$$

las cuales definen el Desarrollo en Serie de Fourier para VC.



Interpretación como un operador

- El DSF puede interpretarse como un **operador** (no invertible) entre diferentes espacios de señal:

$$\mathbf{DSF} : P(X_0) \rightarrow D(\mathbb{Z})$$

$$f_0(x) \mapsto a(m) = \frac{1}{X_0} \int_{\langle X_0 \rangle} f_0(x) e^{-jm\xi_0 x} dx$$

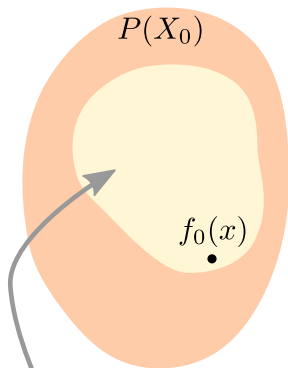
- Y de manera similar para el **DSF inverso**

$$\mathbf{DSF}^{-1} : D(\mathbb{Z}) \rightarrow P(X_0)$$

$$a(m) \mapsto \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) e^{jm\xi_0 x} \approx f_0(x)$$

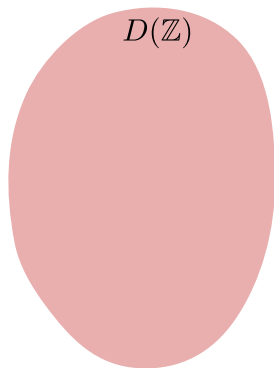


Interpretación como un operador

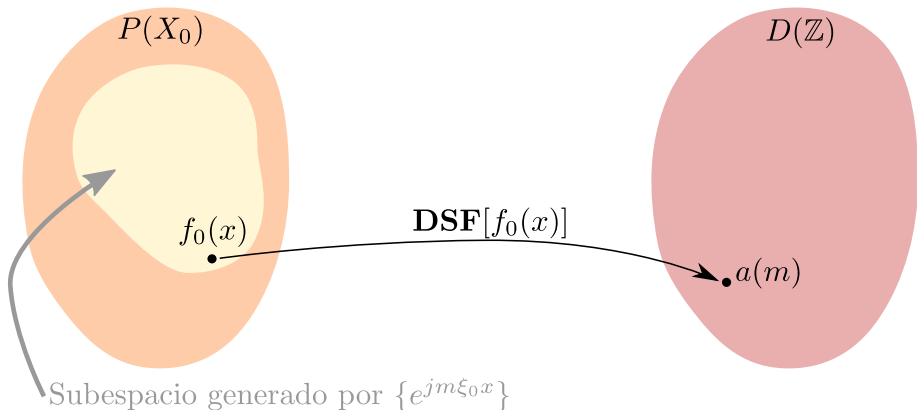


Subespacio generado por $\{e^{jm\xi_0 x}\}$

$$f_0(x) = \mathbf{DSF}^{-1}[a(m)] \quad g_0(x) \neq \mathbf{DSF}^{-1}[b(m)]$$



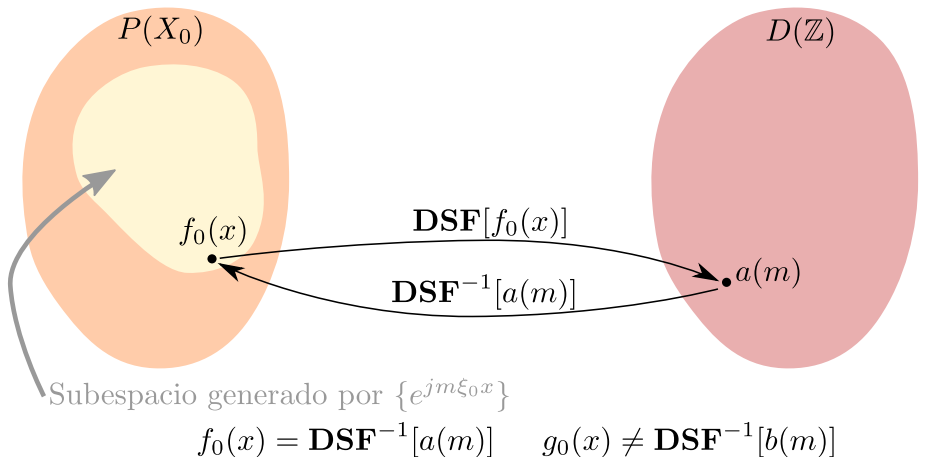
Interpretación como un operador



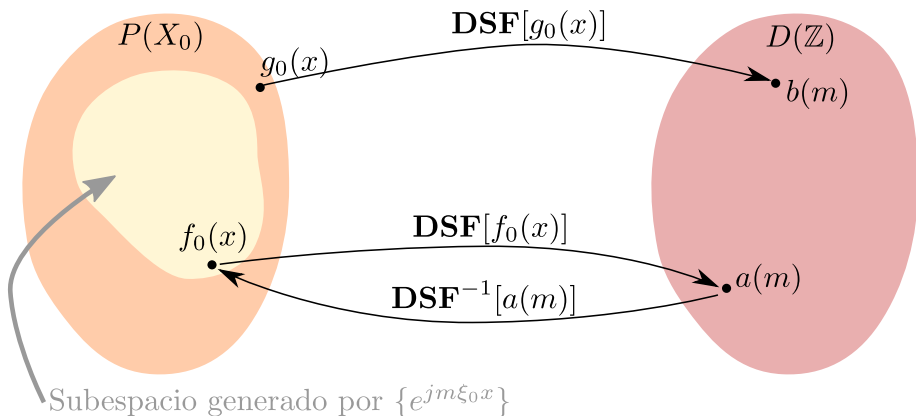
$$f_0(x) = \mathbf{DSF}^{-1}[a(m)] \quad g_0(x) \neq \mathbf{DSF}^{-1}[b(m)]$$



Interpretación como un operador



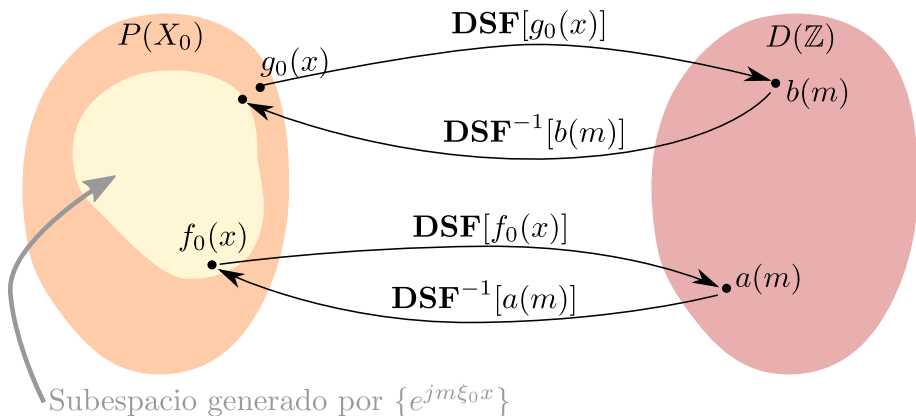
Interpretación como un operador



$$f_0(x) = \mathbf{DSF}^{-1}[a(m)] \quad g_0(x) \neq \mathbf{DSF}^{-1}[b(m)]$$



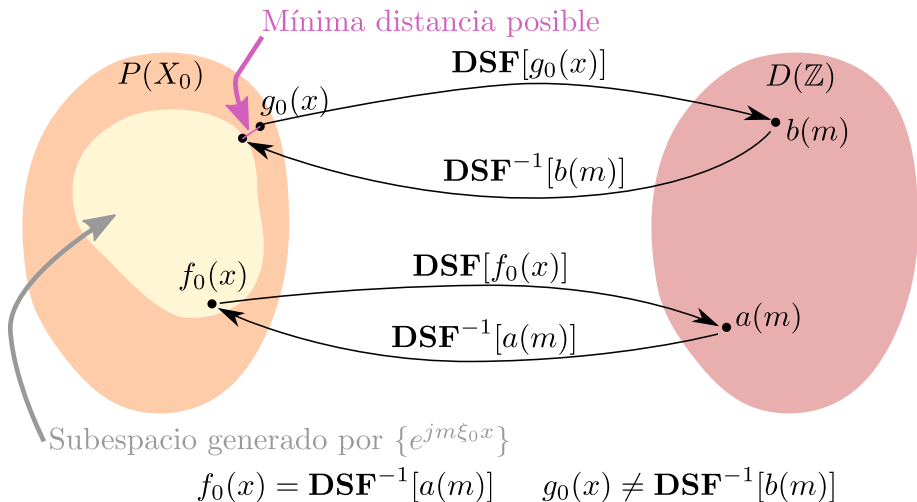
Interpretación como un operador



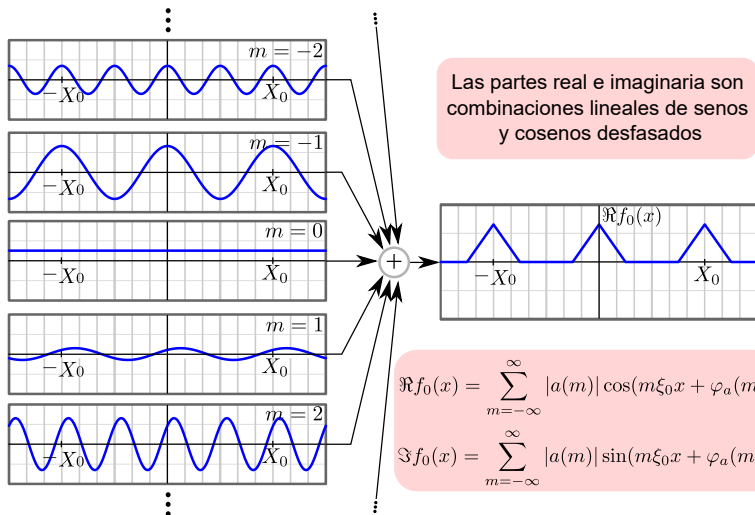
$$f_0(x) = \text{DSF}^{-1}[a(m)] \quad g_0(x) \neq \text{DSF}^{-1}[b(m)]$$



Interpretación como un operador



Ejemplo: Tren de triángulos periódico



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Convergencia del DSF
 - Análisis del error en el DSF truncado
 - Criterios de convergencia del DSF
- 4 Propiedades del DSF
- 5 Ejemplos de DSFs
- 6 Relación entre el DSF y los SLI



DSF truncado - I

- En la práctica, **no es posible considerar los infinitos términos** de la ecuación de síntesis:

$$f_{0N}(x) = \sum_{m=-N}^N a(m) e^{jm\xi_0 x}$$

- Por ello, es conveniente analizar el error que se comete con un **número finito** de términos N

$$d_N^2 = E_0 [e_{0N}(x)] = E_0 [f_0(x) - f_{0N}(x)] = \int_{\langle X_0 \rangle} |f_0(x) - f_{0N}(x)|^2 dx$$



DSF truncado - II

- Como consecuencia del **teorema de la mejor aproximación**, este error decrecerá (o al menos no aumentará) con N .
- Además, es posible demostrar que los coeficientes $a(m)$, calculados según la ecuación de análisis, dan lugar a un **error que tiende a cero**

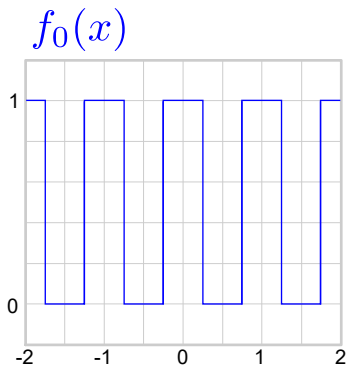
$$\lim_{N \rightarrow \infty} d \left(f_0(x), \sum_{m=-N}^N a(m) e^{jm\xi_0 x} \right) = 0$$

siempre y cuando estos coeficientes existan.

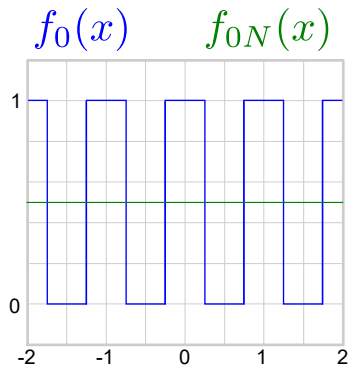
- Los **criterios de convergencia** de $f_{0N}(x)$ se estudiarán posteriormente.



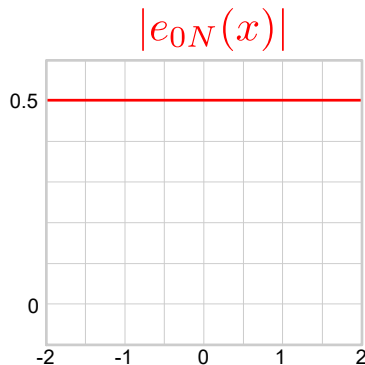
Análisis gráfico del DSF truncado



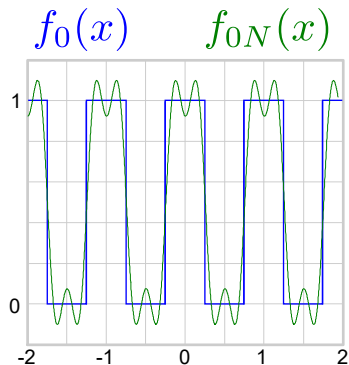
Análisis gráfico del DSF truncado



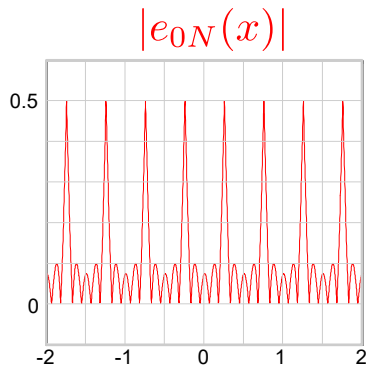
$N=0$



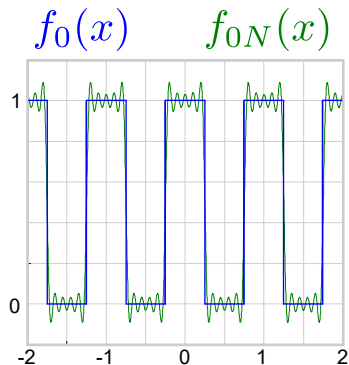
Análisis gráfico del DSF truncado



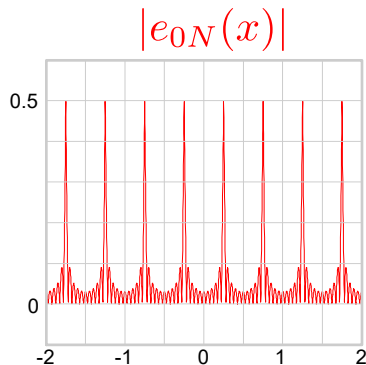
$N=3$



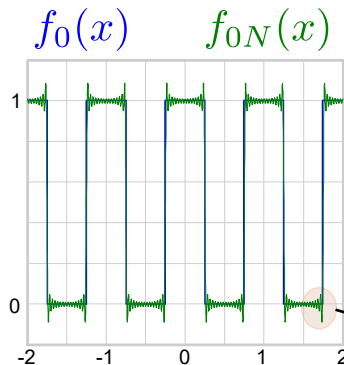
Análisis gráfico del DSF truncado



$N=10$

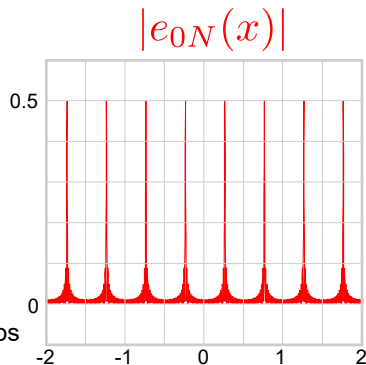


Análisis gráfico del DSF truncado



$N=30$

Fenómeno de Gibbs



Fenómeno de Gibbs

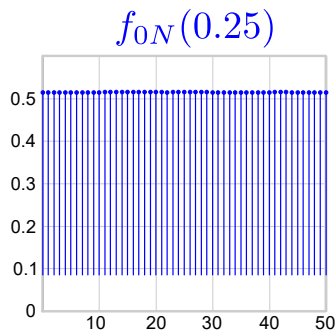
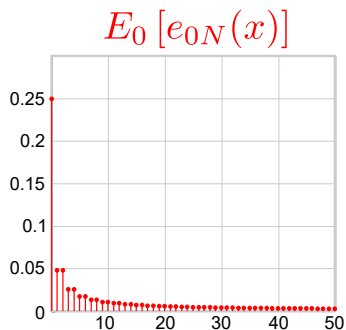
Fenómeno de Gibbs

- El DSF truncado de **funciones discontinuas** dará lugar a funciones con oscilaciones en los puntos donde existen discontinuidades.
 - Si el salto en la discontinuidad es finito, el DSF truncado tiende al valor medio en la discontinuidad.
- La amplitud de esta oscilación no cambia y, por tanto, no tiende a cero.
 - La oscilación, para valores altos de N , es de aproximadamente un **9%**.
 - No obstante, el error total, d_N , si tiende a cero pues la función de error pierde área.

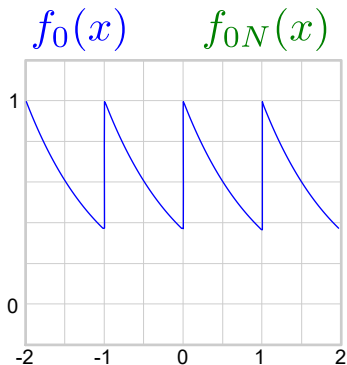


Convergencia del DSF truncado

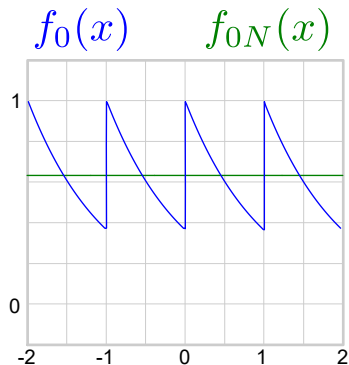
- Para el caso del tren de pulsos analizado anteriormente, observe que:
 - aunque el **error** e_{0N} mantiene picos de valor constante, su **energía** **tiende a cero**,
 - en la discontinuidad (p. ej., $x_0 = 0,25$), el DSF tiende al **valor medio** (0,5).



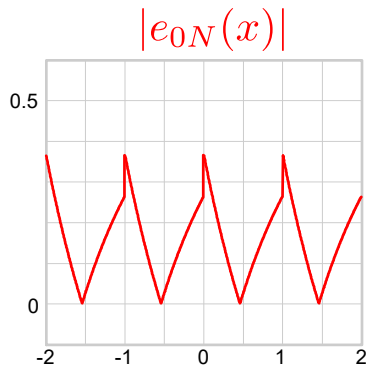
Análisis gráfico del DSF truncado



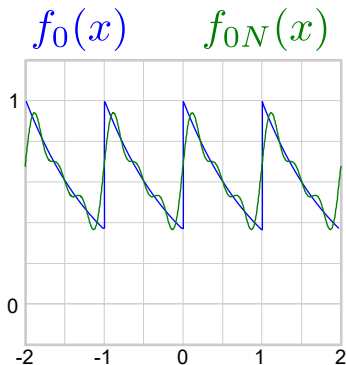
Análisis gráfico del DSF truncado



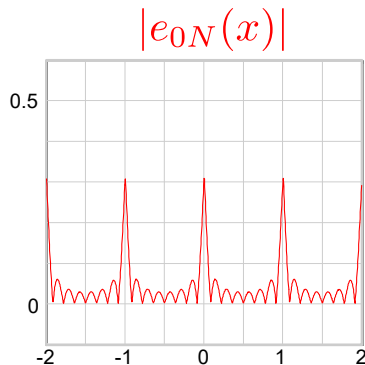
$N=0$



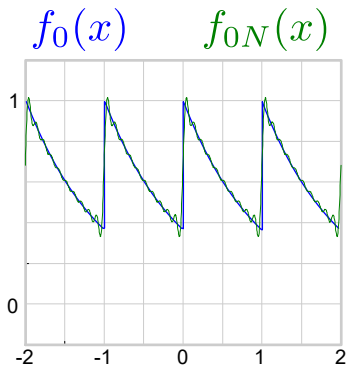
Análisis gráfico del DSF truncado



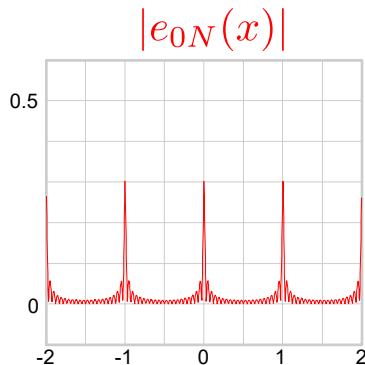
$N=3$



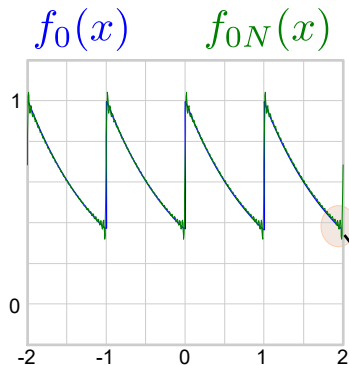
Análisis gráfico del DSF truncado



$N=10$

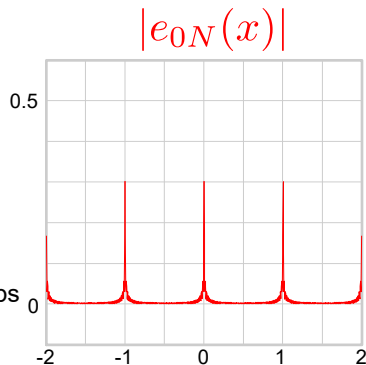


Análisis gráfico del DSF truncado



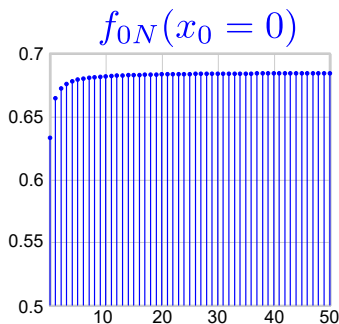
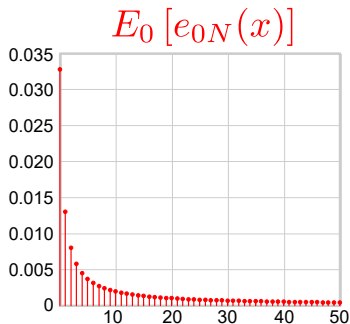
$N=30$

Fenómeno de Gibbs



Convergencia del DSF truncado

- Para el caso del tren de exponenciales, nuevamente:
 - el **error** e_{0N} mantiene picos de valor constante pero su **energía** tiende a **cero**,
 - en la discontinuidad (p. ej., $x_0 = 1$), el DSF tiende al **valor medio** (0,683).



Criterios de convergencia del DSF

- Resulta pues conveniente estudiar bajo que condiciones el DSF existirá y convergerá hacia la señal bajo análisis
- El análisis de la existencia y la convergencia del DSF es muy complejo...
- ... pero se puede resumir en que, en la práctica, todas las funciones de interés en ingeniería tienen DSF.

“All reasonable wishes, but starting to ask about convergence of Fourier series, beyond the L^2 -convergence, is starting down a road leading to endless complications, details, and, in the end, probably madness.”
(Prof. Brad Osgood, Lecture Notes for The Fourier Transform and its Applications, Stanford University)



Problemas en la convergencia del DSF

- Antes de ver los criterios de convergencia, se ilustrará un caso en el cual no es posible el DSF de una función.
- Para ello consideraremos la siguiente función periódica, definida en el intervalo $[0, X_0)$:

$$f_0(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [0, X_0)$$

- Si intentamos calcular su primer coeficiente, $a(0)$, obtenemos:

$$a(0) = \frac{1}{X_0} \int_0^{X_0} f_0(x) dx = \langle f_0(x) \rangle = \frac{1}{X_0} \int_0^{X_0} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{X_0} \ln x \Big|_0^{X_0} \rightarrow \infty$$

y, por tanto, $f_0(x)$ no se puede expresar como una serie de Fourier.



Criterios de convergencia del DSF

Criterios de convergencia

El DSF de una señal $f_0(x)$ existirá y convergerá si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

- $f_0(x) \in L_p^2$, es decir, es cuadrado integrable en un periodo.
- $f_0(x) \in L_p^1$, es decir, es absolutamente integrable en un periodo y, además, tiene un número finito de (a) máximos y mínimos por periodo y (b) discontinuidades. Además, todas las discontinuidades deben ser finitas.

Es importante observar que estas son **condiciones suficientes** (pero no necesarias).

- Cada uno de estos criterios nos ofrecerá un grado de convergencia diferente.



Convergencia del DSF - Funciones L_p^2

- El primer caso de interés es cuando $f_0(x) \in L_p^2$:

$$\int_{\langle X_0 \rangle} |f_0(x)|^2 dx < \infty$$

- Cualquier señal que tenga **energía finita en un periodo**, tendrá un DSF que **converge en el sentido de la norma-2** (norma inducida por el producto escalar):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d(f_0(x), f_{0N}(x)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \|f_0(x) - f_{0N}(x)\| = 0$$

- Este hecho es especialmente importante pues las señales que se pueden generar en un **laboratorio** son siempre de **energía finita**.



Convergencia del DSF - Condiciones de Dirichlet

- El segundo criterio se conoce como **Condiciones de Dirichlet**:

❶ $f_0(x) \in L_p^1$:

$$\int_{\langle x_0 \rangle} |f_0(x)| dx < \infty$$

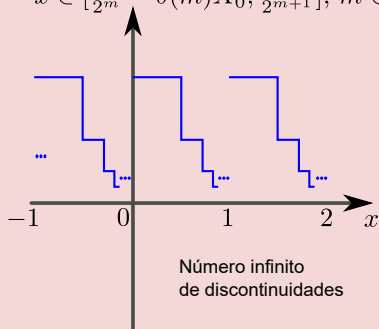
- ❷ El número de discontinuidades de $f_0(x)$ en un periodo es finito. Además, las discontinuidades deben ser finitas.
- ❸ El número de máximos y mínimos de $f_0(x)$ en un periodo es finito.
- En la práctica, las señales que no cumplen las dos últimas condiciones son bastante **“artificiales”** por lo que se suele asumir que estas condiciones se cumplen.
- Si se cumplen las condiciones de Dirichlet, **la serie converge punto a punto** hacia $f_0(x)$ excepto en los puntos donde $f_0(x)$ es discontinua.
 - En las discontinuidades, convergerá hacia el **valor medio de la discontinuidad**.



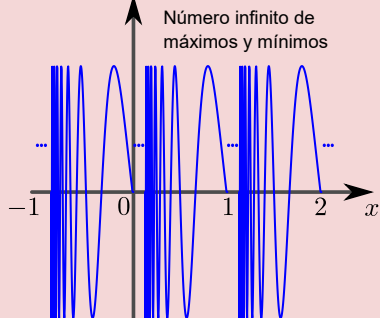
Convergencia del DSF - Condiciones de Dirichlet

$$f_0(x) = \frac{1}{2^m}$$

$$x \in \left[\frac{X_0}{2^m} - \delta(m)X_0, \frac{X_0}{2^{m+1}}\right], m \in \mathbb{N}$$



$$f_0(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right), 0 < x \leq 1$$



Convergencia del DSF - Ejercicio

Ejercicio

Compruebe si la función $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $0 < x \leq 1$ cumple alguno de los criterios de convergencia.



Convergencia del DSF - Ejercicio

Ejercicio

Compruebe si la función $f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $0 < x \leq 1$ cumple alguno de los criterios de convergencia.

Solución

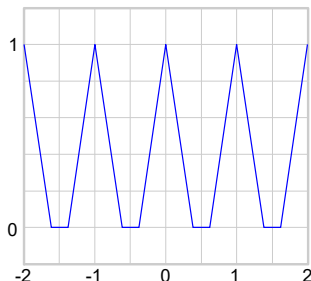
- La función no cumple el primer criterio pues es discontinua.
- La función no cumple el segundo criterio pues
$$\int_0^1 |f_0(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_0^1 = \infty$$
- La función (a) sí es absolutamente integrable
$$\int_0^1 |f_0(x)| dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2,$$
 (b) tiene un número finito de máximos y mínimos por periodo, y (c) tiene un número finito de discontinuidades pero su única discontinuidad es infinita.

No se puede garantizar por tanto que exista su DSF

Convergencia del DSF - Funciones continuas

- En el caso de **señales periódicas continuas**, que cumplan las condiciones “extra” de variabilidad acotada, tendremos siempre DSF y convergerá hacia la señal.
- Observe como en el siguiente DSF los picos del error sí disminuyen al aumentar N
- Además no existe fenómeno de Gibbs pues no hay discontinuidades.

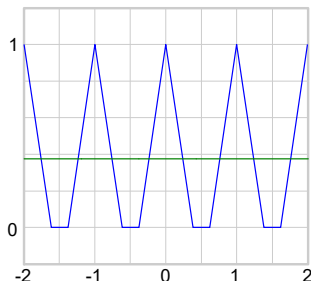
$$f_0(x) \quad f_{0N}(x)$$



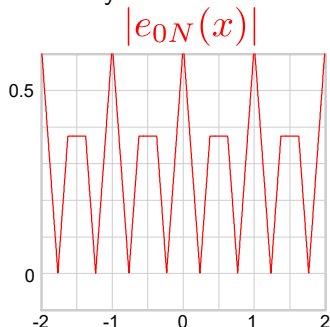
Convergencia del DSF - Funciones continuas

- En el caso de **señales periódicas continuas**, que cumplan las condiciones “extra” de variabilidad acotada, tendremos siempre DSF y convergerá hacia la señal.
- Observe como en el siguiente DSF los picos del error sí disminuyen al aumentar N
- Además no existe fenómeno de Gibbs pues no hay discontinuidades.

$$f_0(x) \quad f_{0N}(x)$$



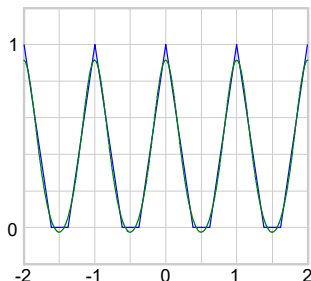
$N=0$



Convergencia del DSF - Funciones continuas

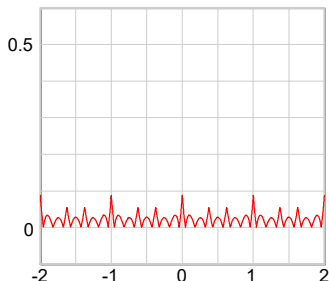
- En el caso de **señales periódicas continuas**, que cumplan las condiciones “extra” de variabilidad acotada, tendremos siempre DSF y convergerá hacia la señal.
- Observe como en el siguiente DSF los picos del error sí disminuyen al aumentar N
- Además no existe fenómeno de Gibbs pues no hay discontinuidades.

$$f_0(x) \quad f_{0N}(x)$$



$N=3$

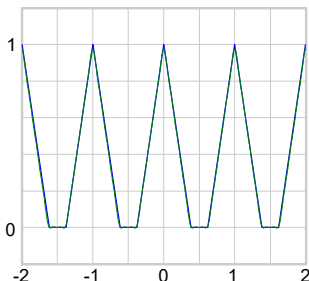
$$|e_{0N}(x)|$$



Convergencia del DSF - Funciones continuas

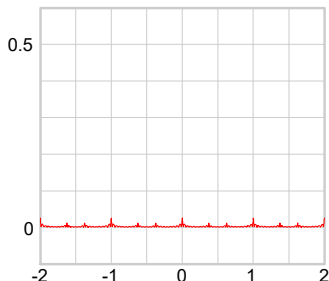
- En el caso de **señales periódicas continuas**, que cumplan las condiciones “extra” de variabilidad acotada, tendremos siempre DSF y convergerá hacia la señal.
- Observe como en el siguiente DSF los picos del error sí disminuyen al aumentar N
- Además no existe fenómeno de Gibbs pues no hay discontinuidades.

$$f_0(x) \quad f_{0N}(x)$$



$N=10$

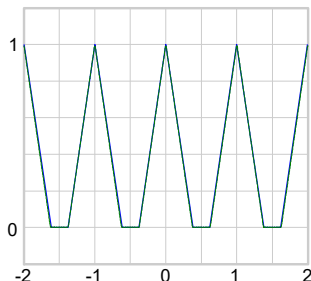
$$|e_{0N}(x)|$$



Convergencia del DSF - Funciones continuas

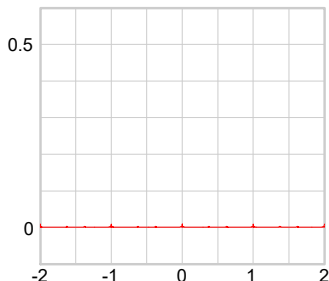
- En el caso de **señales periódicas continuas**, que cumplan las condiciones “extra” de variabilidad acotada, tendremos siempre DSF y convergerá hacia la señal.
- Observe como en el siguiente DSF los picos del error sí disminuyen al aumentar N
- Además no existe fenómeno de Gibbs pues no hay discontinuidades.

$$f_0(x) \quad f_{0N}(x)$$



$N=30$

$$|e_{0N}(x)|$$



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Convergencia del DSF
- 4 Propiedades del DSF**
 - Propiedades generales
 - Teorema de Parseval
- 5 Ejemplos de DSFs
- 6 Relación entre el DSF y los SLI



Propiedades generales del DSF

Linealidad	$\alpha f_0(x) + \beta g_0(x)$	$\alpha a(m) + \beta b(m)$
Desplazamiento	$f_0(x - x_0)$	$a(m)e^{-jm\xi_0 x_0}$
Producto por el armónico m_0 -ésimo	$f_0(x)e^{jm_0\xi_0}$	$a(m - m_0)$
Conjugado de la función	$f_0^*(x)$	$a^*(-m)$
Reflexión	$f_0(-x)$	$a(-m)$
Escalado variable indep.	$f_0(ax)$, con $a > 0$	$a(m)$ (periodo $X'_0 = \frac{X_0}{a}$)
Convolución periódica	$f_0(x) * g_0(x)$	$X_0 a(m)b(m)$
Producto	$f_0(x)g_0(x)$	$a(m) * b(m)$
Primera derivada	$\frac{d}{dx} f_0(x)$	$jm\xi_0 a(m)$
Derivada n -ésima	$\frac{d^n}{dx^n} f_0(x)$	$(jm\xi_0)^n a(m)$
Integración (sólo si $\langle f_0(x) \rangle = a(0) = 0$)*	$\int f_0(x)dx$	$\frac{1}{jm\xi_0} a(m)$
Producto escalar	$\langle f_0(x), g_0(x) \rangle = X_0 \langle a(m), b(m) \rangle$	
Señales reales	$f_0(x)$ real	$a(m) = a^*(-m)$

(se asume que los coeficientes del DSF las señales $f_0(x)$ y $g_0(x)$ son $a(m)$ y $b(m)$, respectivamente)

*Nótese que $\int f_0(x)dx$ denota integral indefinida (primitiva de la función). Además, se asume que se escoge la constante de integración como cero.



Señales pares/impares

Además de las propiedades anteriores, es interesante observar que:

- El DSF de una **señal par**, es una **secuencia discreta par**

$$f_0(x) = f_0(-x) \longleftrightarrow a(m) = a(-m)$$

- El DSF de una **señal impar**, es una **secuencia discreta impar**

$$f_0(x) = -f_0(-x) \longleftrightarrow a(m) = -a(-m)$$

- Estas propiedades son muy útiles a la hora de **validar resultados**.



Teorema de Parseval

- A partir de la propiedad del producto escalar, es directo demostrar el siguiente teorema.

Teorema de Parseval (o Plancherel)

La energía en un periodo de una señal periódica $f_0(x)$ es la misma, salvo un factor de escala, que la energía de la señal de variable discreta compuesta por su DSF.

$$\int_{\langle X_0 \rangle} |f_0(x)|^2 dx = X_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a(m)|^2$$

$$E_0[f_0(x)] = X_0 E[a(m)]$$



Ejemplo propiedades del DSF

Ejercicio

(Ejemplo 3.9 del Oppenheim)

Calcule la señal $f_0(x)$ de la cual se conoce que:

- es una señal real, tiene periodo $X_0 = 4$,
- $a(m) = 0, \quad \forall |m| > 1$,
- la señal con coeficientes $b(m) = e^{-jm\frac{\pi}{2}} a(-m)$ es impar,
- su energía por periodo es $\int_{\langle 4 \rangle} |f_0(x)|^2 dx = 2$.



Ejemplo propiedades del DSF

Solución

La condición 2 nos impone que sólo existen 3 coeficientes: $a(-1)$, $a(0)$ y $a(1)$. Por otro lado, de la condición 3 deducimos:

$$b(-1) = -b(1) \Rightarrow e^{j\frac{\pi}{2}} a(1) = -e^{-j\frac{\pi}{2}} a(-1) \Rightarrow \boxed{a(-1) = a(1)}$$

$$b(0) = -b(0) \Rightarrow b(0) = 0 \Rightarrow \boxed{a(0) = 0}$$

Además, de la condición de la energía, aplicando el teorema de Parseval obtenemos que:

$$4(|a(-1)|^2 + |a(0)|^2 + |a(1)|^2) = 2$$

Teniendo en cuenta que la señal es real $|a(-1)| = |a(1)|$ (lo cual es congruente con las condiciones calculadas anteriormente), por lo que $\boxed{|a(\pm 1)| = \frac{1}{2}}$.

Puesto que la señal es real, se ha de cumplir que $a(m) = a^*(-m)$, imponiendo esta condición sobre el coeficiente $m = 1$: $a(1) = a^*(-1) = a^*(1)$. Por tanto, el coeficiente $a(1)$ es real (y así también $a(-1)$). Si además imponemos la condición del módulo tenemos que las únicas soluciones posibles son $a(-1) = a(1) = \pm \frac{1}{2}$.

Desarrollando el DSF obtenemos las dos posibles soluciones:

$$f_0(x) = \pm \cos(\xi_0 x) = \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$$

Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Convergencia del DSF
- 4 Propiedades del DSF
- 5 Ejemplos de DSFs**
 - Señales sinusoidales
 - Trenes de pulsos y triángulos
 - DSF de distribuciones periódicas
 - Fórmula de la suma de Poisson

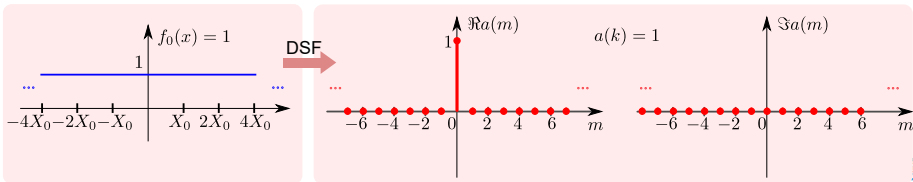


Señales sinusoidales

- Una pieza básica para calcular DSFs complejos son las exponenciales armónicas $f_0(x) = e^{jk\xi_0 x}$.
- En este caso, el DSF se puede hacer comparando directamente los términos:

$$f_0(x) = e^{jk\xi_0 x} \longleftrightarrow \begin{cases} a(m) = 1 & m = k \\ a(m) = 0 & m \neq k \end{cases}$$

- Un caso particular, es el caso $k = 0$, que da lugar a una **función constante** $f_0(x) = 1$.



Señales sinusoidales

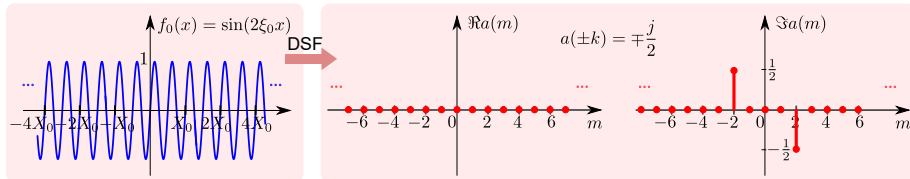
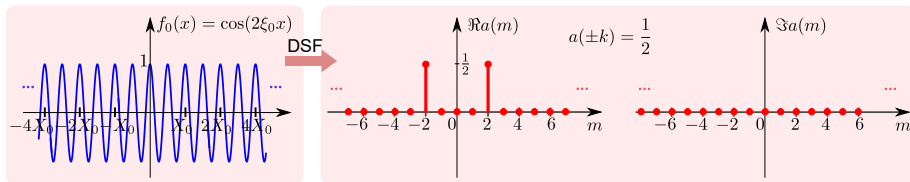
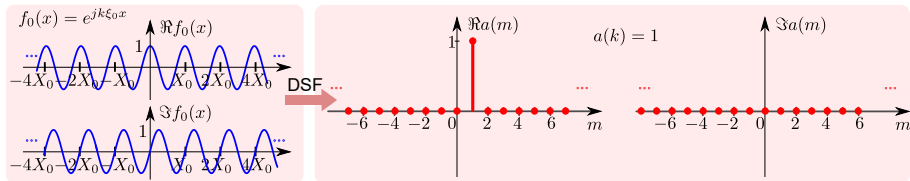
- A partir del desarrollo anterior, y descomponiendo senos y cosenos en suma de exponenciales complejas:

$$\cos(k\xi_0 x) = \frac{e^{jk\xi_0 x} + e^{-jk\xi_0 x}}{2} \longleftrightarrow \begin{cases} a(m) = \frac{1}{2} & m = \pm k \\ a(m) = 0 & m \neq \pm k \end{cases}$$

$$\sin(k\xi_0 x) = \frac{e^{jk\xi_0 x} - e^{-jk\xi_0 x}}{2j} \longleftrightarrow \begin{cases} a(m) = \frac{1}{2j} & m = k \\ a(m) = \frac{-1}{2j} & m = -k \\ a(m) = 0 & m \neq \pm k \end{cases}$$



Señales sinusoidales



Señales sinusoidales

Ejercicio

Calcule el DSF de la señal:

$$f_0(x) = 2 + \cos(\xi_0 x) + \cos^2(2\xi_0 x) + \sin(2\xi_0 x)$$



Señales sinusoidales

Ejercicio

Calcule el DSF de la señal:

$$f_0(x) = 2 + \cos(\xi_0 x) + \cos^2(2\xi_0 x) + \sin(2\xi_0 x)$$

Solución

Tendremos en cuenta que $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$, luego:

$$f_0(x) = 2 + \frac{e^{j\xi_0 x} + e^{-j\xi_0 x}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{e^{j4\xi_0 x} + e^{-j4\xi_0 x}}{4} + \frac{e^{j2\xi_0 x} - e^{-j2\xi_0 x}}{2j}$$

De este modo, los únicos coeficientes distintos de cero serán:

$$a(0) = \frac{5}{2} \quad a(\pm 1) = \frac{1}{2} \quad a(\pm 2) = \pm \frac{1}{2j} \quad a(\pm 4) = \frac{1}{4}$$

Tren de pulsos

- Un DSF muy útil es el de los trenes de pulsos

$$\Pi_{0,\Delta}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x - nX_0}{\Delta}\right)$$

su desarrollo se puede calcular a partir de la definición:

$$\Pi_{0,\Delta}(x) \longleftrightarrow a(m) = \frac{\Delta}{X_0} \text{sinc}\left(m\pi \frac{\Delta}{X_0}\right)$$

Demostración

$$\begin{aligned} a(m) &= \frac{1}{X_0} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^{-jm\xi_0 x} dx = \frac{1}{-jm\xi_0 X_0} \left(e^{-jm\xi_0 \frac{\Delta}{2}} - e^{jm\xi_0 \frac{\Delta}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{m\pi} \sin\left(m\pi \frac{\Delta}{X_0}\right) = \frac{\Delta}{X_0} \text{sinc}\left(m\pi \frac{\Delta}{X_0}\right) \end{aligned}$$

Tren de triángulos

- A partir del DSF de un tren de pulsos es sencillo calcular el DSF de un tren de triángulos

$$\Lambda_{0,\Delta}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{x - nX_0}{\Delta}\right)$$

su desarrollo se puede calcular a partir de la definición:

$$\Lambda_{0,\Delta}(x) \longleftrightarrow a(m) = \frac{\Delta}{2X_0} \text{sinc}^2\left(m\pi \frac{\Delta}{2X_0}\right)$$

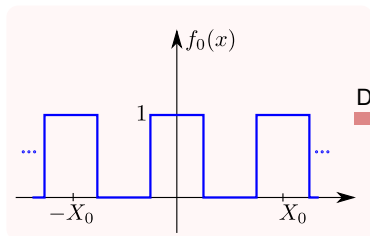
Demostración

Teniendo en cuenta que la relación entre triángulos y pulsos, y la propiedad de convolución:

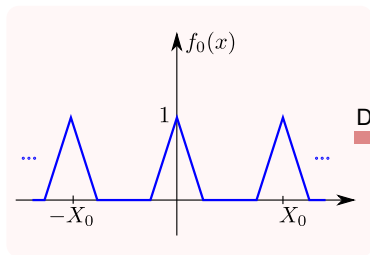
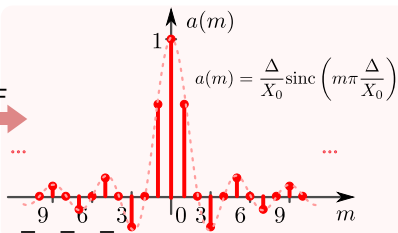
$$\Lambda\left(\frac{x}{\Delta}\right) = \frac{2}{\Delta} \Pi\left(\frac{x}{\Delta/2}\right) * \Pi\left(\frac{x}{\Delta/2}\right) \Rightarrow \Lambda_{0,\Delta}(x) = \frac{2}{\Delta} \Pi_{0,\frac{\Delta}{2}}(x) * \Pi_{0,\frac{\Delta}{2}}(x)$$

$$\Lambda_{0,\Delta}(x) \longleftrightarrow X_0 \frac{2}{\Delta} \left[\frac{\Delta}{2X_0} \text{sinc}\left(m\pi \frac{\Delta}{2X_0}\right) \right]^2 = \frac{\Delta}{2X_0} \text{sinc}^2\left(m\pi \frac{\Delta}{2X_0}\right)$$

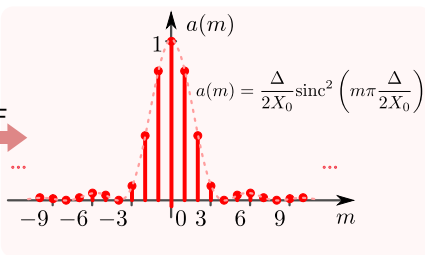
Tren de triángulos



DSF



DSF



Tren de exponenciales

Ejercicio

Haciendo uso de la definición calcule el DSF de un tren de exponenciales, definido para un periodo como:

$$f_0(x) = e^{-\frac{ax}{X_0}}, \quad x \in [0, X_0)$$

Solución

$$\begin{aligned} a(m) &= \frac{1}{X_0} \int_{\langle X_0 \rangle} e^{-\frac{ax}{X_0}} e^{-jm\xi_0 x} dx = \frac{1}{X_0} \int_0^{X_0} e^{-\left(\frac{a}{X_0} + jm\xi_0\right)x} dx = \\ &= \frac{1}{X_0} \frac{-1}{\frac{a}{X_0} + jm\xi_0} \left[e^{-\left(\frac{a}{X_0} + jm\xi_0\right)x} \right]_{x=0}^{X_0} = \frac{1}{a + jm2\pi} \left[1 - e^{-(a + jm\xi_0 X_0)} \right] \\ &= \frac{1 - e^{-a}}{a + jm2\pi} \end{aligned}$$

Distribuciones periódicas

- Una **distribución** $D_0(x)$ se dice que es **periódica** si

$$\exists X_0 \text{ t.q. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) D_0(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) D_0(x + X_0) dx, \quad \forall f(x)$$

- El DSF de distribuciones requiere una justificación teórica algo compleja.
- No obstante, es fácil demostrar que para **distribuciones de tipo impulsivo** (delta de Dirac y derivadas), (y en general para cualquier distribución de soporte finito), se puede **operar con normalidad** utilizando la definición y propiedades de la distribución correspondiente.
- Definiremos los siguientes **trenes de distribuciones periódicas**:

$$\delta_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nX_0) \quad \delta'_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta'(x - nX_0)$$



Distribuciones periódicas

$$\delta_0(x) \longleftrightarrow a(m) = \frac{1}{X_0}$$

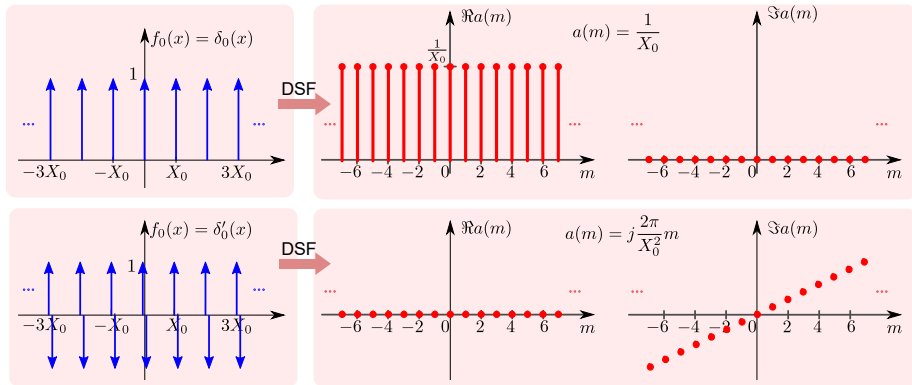
$$\delta'_0(x) \longleftrightarrow a(m) = j \frac{2\pi}{X_0^2} m$$

Demostración

$$\delta_0(x) \longleftrightarrow a(m) = \frac{1}{X_0} \int_{-\frac{X_0}{2}}^{\frac{X_0}{2}} \delta(x) e^{-jm\xi_0 x} dx = \frac{1}{X_0}$$

$$\delta'_0(x) \longleftrightarrow a(m) = \frac{1}{X_0} \int_{-\frac{X_0}{2}}^{\frac{X_0}{2}} \delta'(x) e^{-jm\xi_0 x} dx = -\frac{-jm\xi_0}{X_0} = j \frac{2\pi}{X_0^2} m$$

Distribuciones periódicas



Distribuciones periódicas

Ejercicio

Calcule el DSF para un tren de segundas derivadas de delta $\delta_0''(x)$ usando (a) la definición del $\delta''(x)$ y (b) las propiedades del DSF para derivadas.

Ejercicio

Dibuje la siguiente señal, obtenga su periodo fundamental a partir de X_0' y calcule su DSF:

$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \delta(x - mX_0')$$

Ejercicio

Calcule la derivada, en el sentido de las distribuciones del siguiente tren de pulsos:

$$f_0(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x - mX_0 - \frac{X_0}{4}}{\frac{X_0}{2}}\right)$$

y calcule el DSF del tren de deltas alterno del ejercicio anterior a partir de este resultado.

Distribuciones periódicas

Solución

Aplicando la definición:

$$a(m) = \frac{1}{X_0} \int_{\langle X_0 \rangle} \delta_0''(x) e^{-jm\xi_0 x} dx = \frac{1}{X_0} \int_{-\frac{X_0}{2}}^{\frac{X_0}{2}} \delta''(x) e^{-jm\xi_0 x} dx = \frac{(-jm\xi_0)^2}{X_0}$$

$$a(m) = -\frac{4\pi^2}{X_0^3} m^2$$



Distribuciones periódicas

Solución

El periodo de la señal será $X_0 = 2X'_0$. Se puede descomponer fácilmente en dos trenes de deltas de periodo X_0 :

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2mX'_0) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - (2m+1)X'_0) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mX_0) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(x - mX_0 - \frac{X_0}{2}\right) \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de la suma del DSF y del desplazamiento:

$$a(m) = \frac{1}{X_0} - \frac{1}{X_0} e^{-jm\xi_0 \frac{X_0}{2}} = \frac{1}{X_0} - \frac{1}{X_0} e^{-jm\pi} = \frac{1}{X_0} (1 - (-1)^m) = \begin{cases} 0 & m \text{ par} \\ \frac{2}{X_0} & m \text{ impar} \end{cases}$$



Fórmula de la suma de Poisson

Fórmula de la suma de Poisson

A partir del DSF de un tren de deltas se obtiene la conocida Fórmula de la suma de Poisson:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - mX_0) = \frac{1}{X_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{jm\xi_0 x}$$

- Este resultado es muy útil pues nos permite relacionar sumas de deltas con sumas de exponenciales armónicas.



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Convergencia del DSF
- 4 Propiedades del DSF
- 5 Ejemplos de DSFs
- 6 Relación entre el DSF y los SLI**
- 7 Apéndices

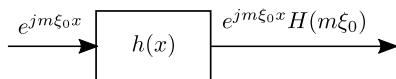


Respuesta de un SLI a una exponencial compleja

- Como hemos visto, una señal periódica puede ser, en general, expresada como una combinación lineal de **exponenciales complejas** $\{\varphi(x; m)\} = e^{jm\xi_0 x}$
- Conviene pues estudiar la **respuesta de un sistema lineal a una exponencial compleja**:

$$\mathbf{F}[\varphi(x; m)] = \varphi(x; m) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x') e^{jm\xi_0(x-x')} dx' = e^{jm\xi_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} h(x') e^{-jm\xi_0 x'} dx'$$

- Por tanto, **las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas lineales**.



$$H(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-j\xi x} dx$$



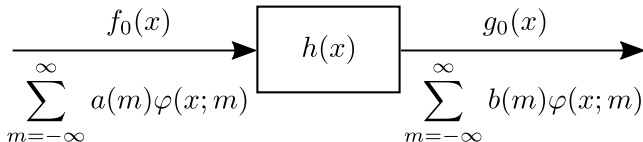
Respuesta de un SLI a una señal periódica

- Consecuentemente, la respuesta de un SLI a una señal periódica $f_0(x)$, si admite DSF, será:

$$g_0(x) = \mathbf{F}[f_0(x)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(m) \mathbf{F}[\varphi(x; m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b(m) \varphi(x; m)$$

- Es decir, la señal de salida será también una señal periódica con el **mismo periodo**, cuyos coeficientes del DSF vienen dados por

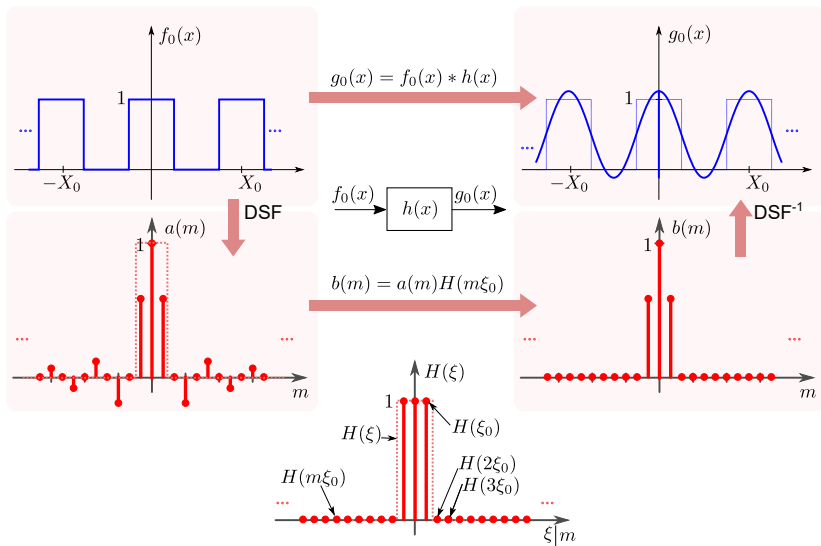
$$b(m) = a(m)H(m\xi_0)$$



- El término $H(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-j\xi x} dx$ se denomina **Transformada de Fourier** de $h(x)$ y será objeto de estudio en el próximo tema.



Respuesta de un SLI a una señal periódica



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Convergencia del DSF
- 4 Propiedades del DSF
- 5 Ejemplos de DSFs
- 6 Relación entre el DSF y los SLI
- 7 Apéndices**



Apéndices

Otras definiciones del DSF

- En algunos textos se usa una **definición ligeramente diferente** del desarrollo en serie de Fourier:

$$f_0(x) \approx \frac{\alpha(0)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha(m) \cos(m\xi_0 x) + \beta(m) \sin(m\xi_0 x)]$$

donde los coeficientes se calculan como:

$$\alpha(m) = \frac{2}{X_0} \int_{\langle X_0 \rangle} f_0(x) \cos(m\xi_0 x) dx \quad \beta(m) = \frac{2}{X_0} \int_{\langle X_0 \rangle} f_0(x) \sin(m\xi_0 x) dx$$

- Este tipo de definición se prefiere en algunos contextos pues, si la función $f_0(x)$ es real, sólo requiere el uso de **funciones y coeficientes reales**.
- La relación entre ambas notaciones es:

$$\alpha(m) = a(m) + a(-m) \quad \beta(m) = \frac{a(m) - a(-m)}{j}$$

$$a(-|m|) = \frac{\alpha(m) - j\beta(m)}{2} \quad a(|m|) = \frac{\alpha(m) + j\beta(m)}{2}$$



Tasa de convergencia

- Cuanto más “suave” sea una función, menos rápido varía.
- Si una función varía lentamente, es lógico pensar que los términos de más alta frecuencia tendrán menos peso en el DSF
- En la práctica, la “suavidad” de las funciones se mide por su derivabilidad.
- Es posible demostrar que:
 - Si $f(x) \notin C^0$, entonces los coeficientes $a(m)$ tendrán algunos términos del tipo $\frac{1}{m}$.
 - Por ejemplo, el tren de pulsos.
 - Si $\exists f'(x)$ (en casi todas partes) pero $f'(x) \notin C^0$, entonces los coeficientes $a(m)$ tendrán algunos términos del tipo $\frac{1}{m^2}$.
 - Por ejemplo, el tren de triángulos.
 - Si $\exists f''(x)$ (en casi todas partes) pero $f''(x) \notin C^0$, entonces los coeficientes $a(m)$ tendrán algunos términos del tipo $\frac{1}{m^3}$.

