

La Delta de Dirac y los SLI

Tema 5b

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

- 1 Introducción
- 2 La Delta de Dirac como base
- 3 La delta de Dirac y los SL
 - Sistemas lineales
 - Sistemas lineales e invariantes - Respuesta al impulso
 - Relación de las propiedades SLI y la respuesta al impulso



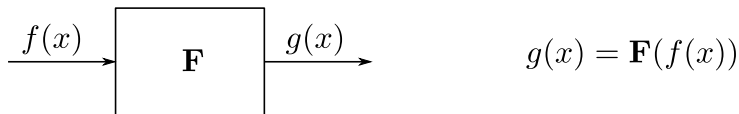
Índice

- 1 Introducción
- 2 La Delta de Dirac como base
- 3 La delta de Dirac y los SL



Introducción

- La Delta de Dirac juega un papel fundamental en la caracterización de los sistemas lineales, tanto invariantes como no invariantes.
- Recordemos que en un sistema lineal se cumple la siguiente relación entre entrada y salida:



- Siendo $\mathbf{F}(\cdot)$ un operador lineal, es decir, que cumple:

$$\mathbf{F}(\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) = \alpha \mathbf{F}(f_1(x)) + \beta \mathbf{F}(f_2(x))$$



Índice

- 1 Introducción
- 2 La Delta de Dirac como base
- 3 La delta de Dirac y los SL



La Delta de Dirac como base de $S(\mathbb{R})$

- Recordemos que, en base a las propiedades de la delta de Dirac:

$$f(x) = f(x) * \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x') \delta(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x - x') dx'$$

- Por otro lado, hemos visto que una base de un espacio de señales no numerable, viene dada por la expresión:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(x') e(x; x') dx'$$

comparando ambas expresiones llegamos a un importante resultado.

Base de deltas de Dirac

La colección de funciones $\{\delta(x - x')\}$ juega un papel similar a una base del espacio de señales $S(\mathbb{R})$

$$e(x; x') = \delta(x - x')$$

donde los coeficientes de la combinación lineal para cualquier función $f(x)$ vienen dados por:

$$\alpha(x') = f(x')$$

Índice

- 1 Introducción
- 2 La Delta de Dirac como base
- 3 La delta de Dirac y los SL
 - Sistemas lineales
 - Sistemas lineales e invariantes - Respuesta al impulso
 - Relación de las propiedades SLI y la respuesta al impulso



Sistemas lineales

- Teniendo en cuenta la base de deltas de Dirac, la salida de un sistema lineal vendrá dada por:

$$g(x) = \mathbf{F}(f(x)) = \mathbf{F}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\delta(x-x')dx'\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\mathbf{F}(\delta(x-x'))dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')h(x;x')dx'$$

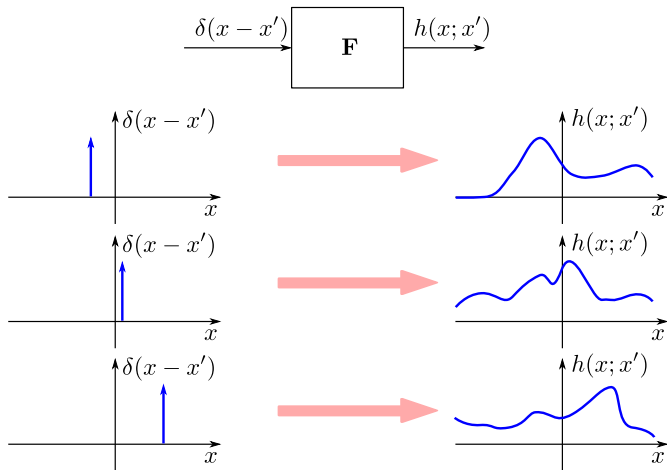
Colección de respuestas al impulso

Un operador lineal $\mathbf{F}$ se podrá caracterizar como un operador integral de tipo:

$$\mathbf{F}(\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cdot) h(x;x')dx'$$

siendo $\boxed{h(x;x') = \mathbf{F}(\delta(x-x'))}$ la **colección de respuestas al impulso**.

Sistemas lineales



- Nótese que la respuesta al impulso depende, en general, del instante en el que se aplique.



Sistemas lineales

Ejercicio

Calcule la colección de respuestas al impulso $h(x; x')$ para los siguientes sistemas:

$$\textcircled{1} \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(x-2y)^2} dy$$

$$\textcircled{3} \quad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-y^2} dy$$

Solución

$$\textcircled{1} \quad h(x; x') = \begin{cases} \delta(x - x') & x' \geq 0 \\ 0 & x' < 0 \end{cases} = u(x) \delta(x - x') = u(x') \delta(x - x')$$

$$\textcircled{2} \quad h(x; x') = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y - x') e^{-(x-2y)^2} dy = e^{-(x-2x')^2}$$

$$\textcircled{3} \quad h(x; x') = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x' - y) e^{-y^2} dy = e^{-(x-x')^2}$$

Sistemas lineales e invariantes

- En el caso de un sistema lineal e invariante (SLI), la respuesta al impulso será siempre la misma, con independencia del instante en el que se aplica, salvo por el correspondiente traslado:

$$\delta(x) \rightarrow h(x) = \mathbf{F}(\delta(x))$$

$$\delta(x - x') \rightarrow h(x; x') = \mathbf{F}(\delta(x - x')) = h(x - x')$$

Respuesta al impulso

Consecuentemente, en un SLI la salida vendrá dada por:

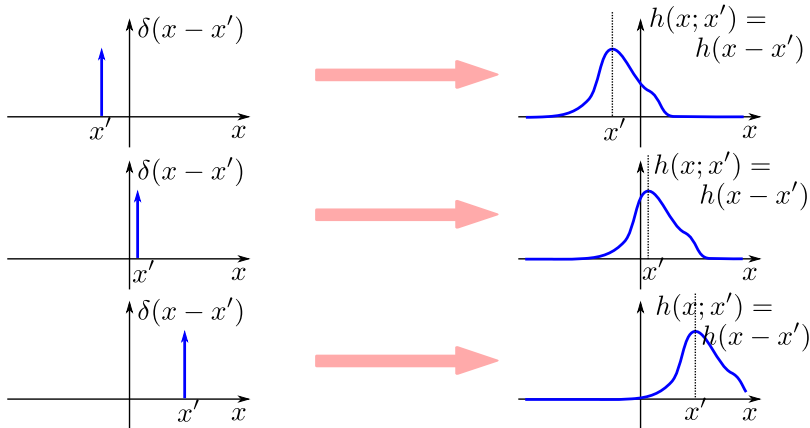
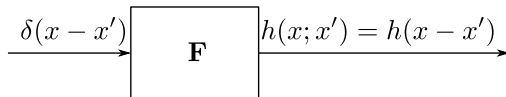
$$g(x) = \mathbf{F}(f(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')h(x; x')dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')h(x - x')dx'$$

es decir,

$$g(x) = f(x) * h(x)$$

donde $h(x)$ es la **respuesta al impulso del sistema**.

Sistemas lineales e invariantes



Propiedades de los SLI

Propiedades de los SLI

- Como hemos visto, los SLI vienen descritos por la convolución de la entrada con la respuesta al impulso.

$$g(x) = f(x) * h(x)$$

y, por tanto, **los SLI heredan las propiedades de la convolución.**

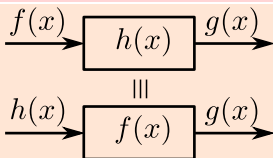
- Además, las **propiedades** de los SLI (memoria, causalidad, estabilidad, etc.) se pueden calcular a partir de su **respuesta al impulso.**



Combinaciones de SLI

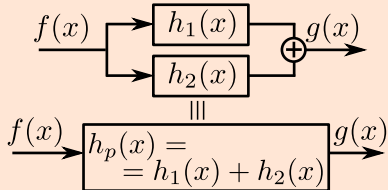
Conmutatividad

$$f(x) * h(x) = h(x) * f(x)$$



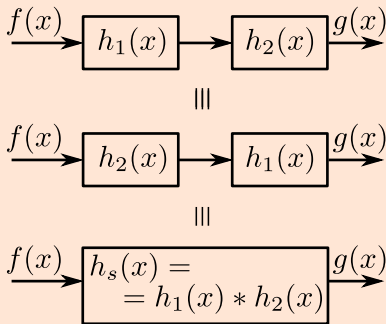
Distributividad

$$\begin{aligned} f(x) * h_1(x) + f(x) * h_2(x) &= \\ &= f(x) * (h_1(x) + h_2(x)) \end{aligned}$$



Asociatividad

$$\begin{aligned} (f(x) * h_1(x)) * h_2(x) &= \\ (f(x) * h_2(x)) * h_1(x) &= \\ f(x) * (h_1(x) * h_2(x)) \end{aligned}$$



Propiedades de los SLI - Memoria

- Un SLI está completamente caracterizado por la respuesta al impulso $h(x)$, lo cual nos hace preguntarnos ¿qué respuesta al impulso caracterizaría a un sistema sin memoria?

$$g(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')h(x_0 - x')dx'$$

- De la ecuación anterior se deduce que, en general, para calcular la salida en el instante x_0 , necesitaremos todos los valores de la señal $f(x)$ desde $-\infty$ a $+\infty$.
- Si sólo se utilizase el valor $f(x_0)$, para cualquier función $f(x)$ y cualquier instante x_0 , entonces tendríamos que la función $h(x_0 - x')$ debería tener soporte en un único punto $x' = x_0$.
- La única “función” que cumple dicha propiedad, y que no da lugar a un resultado nulo, es la delta de Dirac, posiblemente escalada.

$$h(x_0 - x') = K\delta(x_0 - x')$$



Propiedades de los SLI - Memoria

Memoria

Un SLI **sin memoria** tendrá una respuesta al impulso de tipo

$$h(x) = K\delta(x), \quad K \in \mathbb{C}$$



Propiedades de los SLI - Causalidad

Causalidad

Si un SLI es **causal**, la salida en un instante dado, sólo puede depender de de los instantes pasados y el actual:

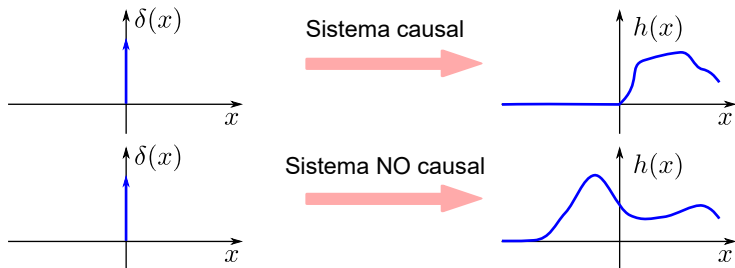
$$g(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')h(x_0 - x')dx' = \int_{-\infty}^{x_0} f(x')h(x_0 - x')dx'$$

la condición anterior, sólo se cumple $\forall f(x)$ y todo x_0 si $h(x_0 - x') = 0, \forall x' > x_0$, o lo que es lo mismo:

$$h(x) = 0, \forall x < 0$$



Propiedades de los SLI - Causalidad



Ejemplo

El sistema con $h(x) = \delta(x - x_0)$ es sólo causal si $x_0 \geq 0$



Propiedades de los SLI - Estabilidad

- La propiedad de estabilidad se demostrará en una práctica de aula.

Estabilidad

Un SLI es **estable** si y sólo si:

$$\text{SLI estable} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| dx < \infty$$

es decir, la norma-1 de la respuesta al impulso es finita, $h(x) \in L^1$ (señal absolutamente integrable).

- Nota: la función **sinc**, aunque no resulte intuitivo, **no es absolutamente integrable** (el libro de Emilio tiene una errata a este respecto).



Propiedades de los SLI - Estabilidad

Ejercicio

Considere el sistema descrito por la siguiente ecuación (un integrador):

$$g(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$$

- 1 Evalúe si es un SLI.
- 2 En caso afirmativo, calcule su respuesta al impulso.
- 3 Evalúe si es estable.



Invertibilidad

Invertibilidad

- Es posible demostrar (ver próximo problema) que si un SLI tiene inverso, entonces el sistema inverso es también un SLI.
- Dicho sistema inverso $h^{-1}(x)$ cumplirá la siguiente propiedad:

$$h(x) * h^{-1}(x) = \delta(x)$$

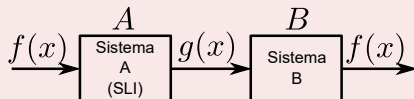


Invertibilidad

Ejercicio

(Basado en el problema 2.50 del Oppenheim)

Considere dos sistemas, A y B, puestos en cascada. Se sabe que el sistema A es un SLI e invertible, siendo B su sistema inverso. Si se denota por $g_1(x)$ y $g_2(x)$ a las salidas del sistema a las entradas $f_1(x)$ y $f_2(x)$, respectivamente:



- 1 Calcule la respuesta del sistema B a la entrada $\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$.
- 2 Calcule la respuesta del sistema B a la entrada $g(x - x_0)$.

