

La Delta de Dirac

Tema 5

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

Índice I

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Interpretación física
- 4 Relación con la función escalón
- 5 Operaciones con distribuciones
 - Derivada de funciones discontinuas y distribuciones
 - Convolución de distribuciones
 - Propiedad relevante de las distribuciones
 - Producto de distribuciones
- 6 Resumen de propiedades de $\delta(x)$



Índice

- 1 **Introducción**
- 2 Definición
- 3 Interpretación física
- 4 Relación con la función escalón
- 5 Operaciones con distribuciones
- 6 Resumen de propiedades de $\delta(x)$



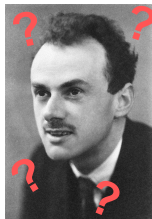
Introducción

- Paul Dirac, premio Nobel en mecánica cuántica, buscaba una función $g(x)$ que cumpliera la siguiente relación para toda función $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = f(0)$$

descubriendo que dicha función no existe.

- Decidió por ello, crear un “objeto matemático”, al que denominó “función impropia” que cumpliera ese objetivo.
- El matemático Laurent Schwartz, medalla Fields, crearía más tarde la conocida como Teoría de Distribuciones para dar una base sólida a dicho problema.



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = f(0)$$

$$\delta(x)$$



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición**
- 3 Interpretación física
- 4 Relación con la función escalón
- 5 Operaciones con distribuciones
- 6 Resumen de propiedades de $\delta(x)$



Definición

La Delta de Dirac

La Delta de Dirac es un “objeto matemático” que se define por sus propiedades cuando opera sobre una integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

- Este “objeto matemático” está definido de manera rigurosa en el contexto de la **Teoría de Distribuciones**.
- En la asignatura, con el objetivo de centrarnos en la aplicación práctica, se verá una versión simple, obviando los detalles más obtusos, pero funcional de este “objeto matemático”.
 - Esta es la versión que habitualmente se define en física e ingeniería.



Operaciones variable independiente

- Es posible demostrar que la notación “tipo función” $\delta(x)$, si bien no preferida en matemáticas, permite evaluar con agilidad un gran número de problemas de ingeniería.
 - Esta notación es compatible con **escalados y traslaciones de la variable independiente**.

Operaciones variable independiente

Es sencillo demostrar, mediante cambios de variable, que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(ax - x_0) dx = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x_0}{a}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{1}{|a|} \delta\left(x - \frac{x_0}{a}\right) \right] dx$$

Por tanto, las dos siguientes funciones se comportan de igual forma bajo una integral:

$$\delta(ax - x_0) = \frac{1}{|a|} \delta\left(x - \frac{x_0}{a}\right)$$

(esta igualdad se interpreta en el sentido de las distribuciones)

Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Interpretación física**
- 4 Relación con la función escalón
- 5 Operaciones con distribuciones
- 6 Resumen de propiedades de $\delta(x)$



La delta de Dirac como límite de una sucesión de funciones

- Aunque no existe ninguna función que cumpla

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad \forall f(x)$$

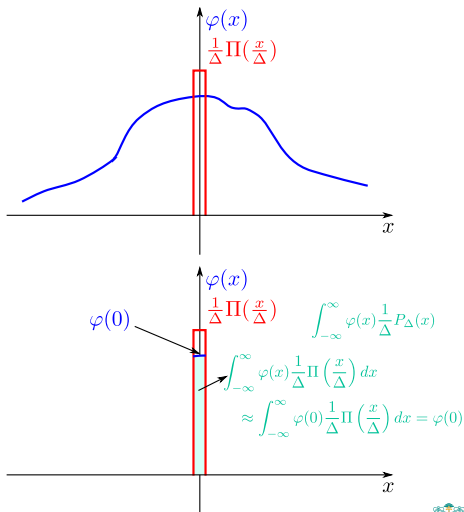
es intuitivo demostrar que para toda $f(x)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [n\Pi(nx)] dx = f(0).$$

- Se dice en estos casos que la sucesión de funciones

$$p_n(x) = n\Pi(nx)$$

converge, en el sentido de las distribuciones, a $\delta(x)$.



Interpretación física

Función impulsiva

- El comportamiento de $\delta(x)$, es equiparable al de un **impulso producido en un tiempo infinitesimal**.
- En física e ingeniería, este tipo de función generalizada se interpreta como si en un único punto (temporal o espacial) estuviese concentrada toda la masa, carga u otra cantidad física.
- Por este motivo, se dice que el soporte de $\delta(x)$ es un único punto $x = 0$.
- Las unidades son las del inverso del diferencial dx .



La delta de Dirac como límite de una sucesión de funciones- II

- Además de las funciones pulso, es posible encontrar otras **sucesiones** de funciones $p_1, p_2, \dots$ que tienen como **límite** (en el sentido de las distribuciones) la **distribución delta de Dirac**.
- Algunos ejemplos de interés, además de las funciones pulso, son la **función sinc** y la **gaussiana**:

$$p_n(x) = n\Pi(nx) \quad p_n(x) = \frac{n}{\pi} \operatorname{sinc}(nx) \quad p_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$$

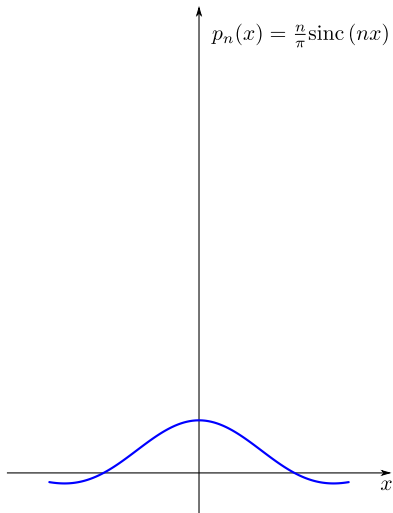
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_n(x) dx = f(0).$$



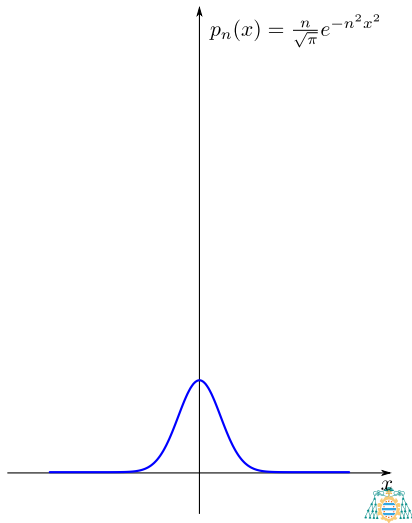
La delta de Dirac como límite de una sucesión de funciones- III

$$p_n(x) = \frac{n}{\pi} \operatorname{sinc}(nx)$$

$$n = 1$$



$$p_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$$

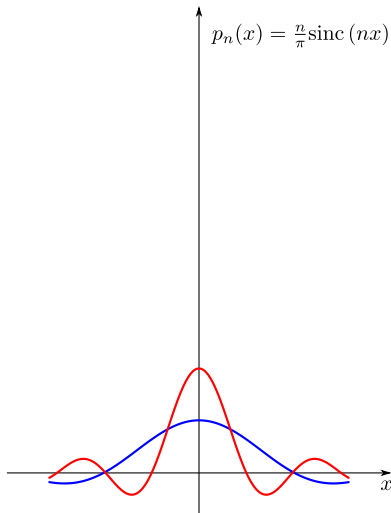


La delta de Dirac como límite de una sucesión de funciones- III

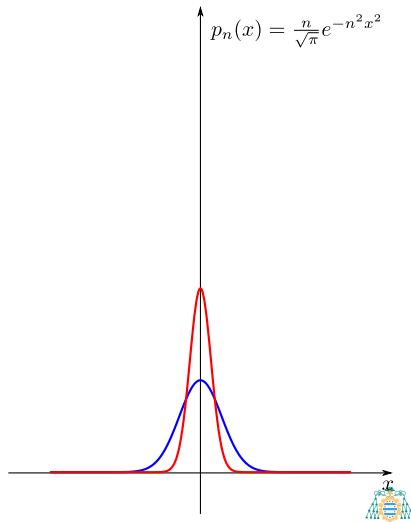
$$p_n(x) = \frac{n}{\pi} \operatorname{sinc}(nx)$$

$$n = 1$$

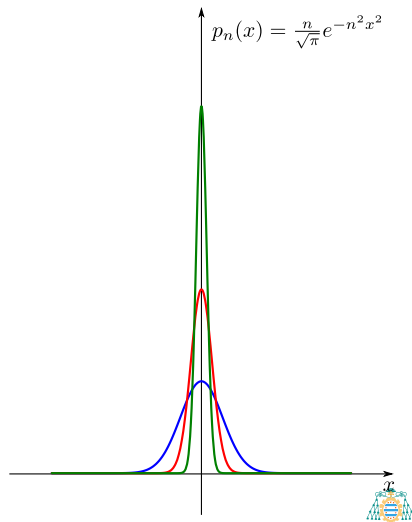
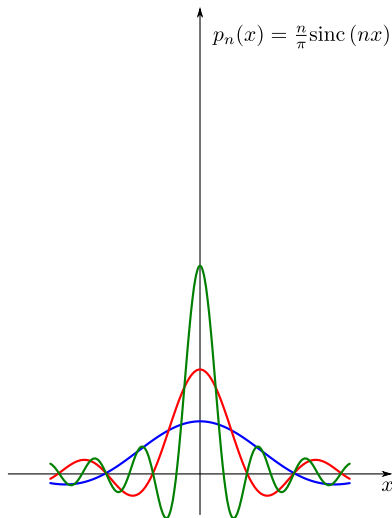
$$n = 2$$



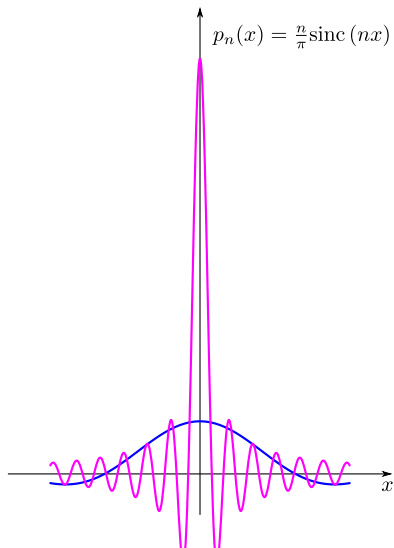
$$p_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$$



La delta de Dirac como límite de una sucesión de funciones- III



La delta de Dirac como límite de una sucesión de funciones- III

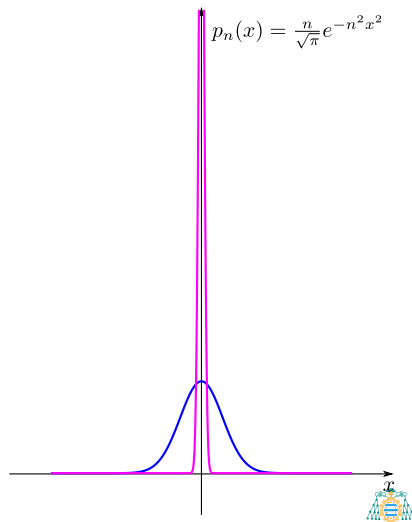


$$n = 1$$

$$n = 2$$

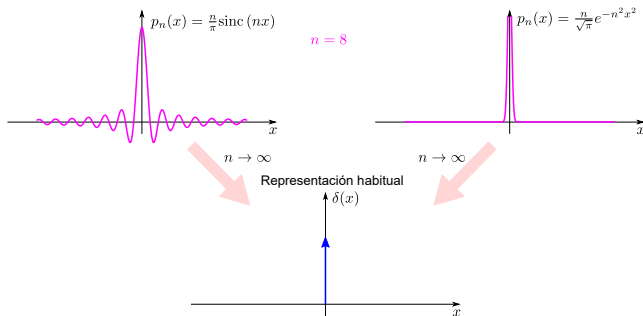
$$n = 4$$

$$n = 8$$



Representación

- Debido a su interpretación como impulso, es habitual representar la delta de Dirac mediante una **flecha**.
- En ocasiones se cambia el tamaño de la flecha dependiendo de la constante que multiplique a $\delta(x)$.



Ejercicios operaciones básicas

Ejercicio

Calcule las siguientes operaciones relacionadas con la función generalizada $\delta(x)$. Dibuje además la distribución involucrada.

1 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx$

2 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)dx$

3 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-2)dx$

4 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(2-x)dx$

5 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(2x-1)dx$

6 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-2x-1)dx$



Ejercicios operaciones básicas

Ejercicio

Calcule las siguientes operaciones relacionadas con la función generalizada $\delta(x)$. Dibuje además la distribución involucrada.

$$① \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx$$

$$② \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)dx$$

$$③ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-2)dx$$

$$④ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(2-x)dx$$

$$⑤ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(2x-1)dx$$

$$⑥ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-2x-1)dx$$

Solución

$$① f(0)$$

$$② f(0)$$

$$③ f(2)$$

$$④ f(2)$$

$$⑤ \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$⑥ \frac{1}{2}f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Ejercicios operaciones básicas

Ejercicio

Una función se dice que es par si $f(x) = f(-x)$. Demuestre que la función generalizada $\delta(x)$ es equivalente, en el sentido de las distribuciones, a $\delta(-x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)dx$$

Se dirá por tanto, por analogía con las funciones, que la función generalizada $\delta(x)$ es una distribución par.

Solución

Mediante un simple cambio de variable

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(-x)dx = - \int_{\infty}^{-\infty} \varphi(-y)\delta(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(-y)\delta(y)dy = \varphi(0)$$



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Interpretación física
- 4 Relación con la función escalón**
- 5 Operaciones con distribuciones
- 6 Resumen de propiedades de $\delta(x)$



Relación con la función escalón

- Aplicando las propiedades de la Delta de Dirac, es sencillo comprobar que:

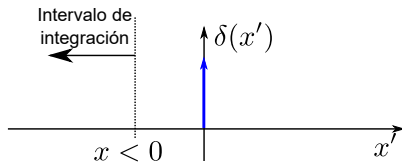
$$\int_{-\infty}^x \delta(x') dx' = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = u(x)$$

- Se dice por tanto que la función salto unidad es la primitiva de la delta de Dirac.
- Consecuentemente, la derivada de la función de Heaviside es:

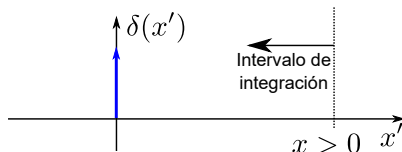
$$u'(x) = \delta(x)$$



Relación con la función escalón



$$\int_{-\infty}^x \delta(x') dx' = 0$$



$$\int_{-\infty}^x \delta(x') dx' = 1$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^x \delta(x') dx' = u(x)}$$



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Interpretación física
- 4 Relación con la función escalón
- 5 Operaciones con distribuciones
 - Derivada de funciones discontinuas y distribuciones
 - Convolución de distribuciones
 - Propiedad relevante de las distribuciones
 - Producto de distribuciones



Derivada de funciones discontinuas

- Es posible demostrar que el resultado anterior, relacionando la derivada de un escalón y la delta de Dirac, se puede generalizar a cualquier **función discontinua**.

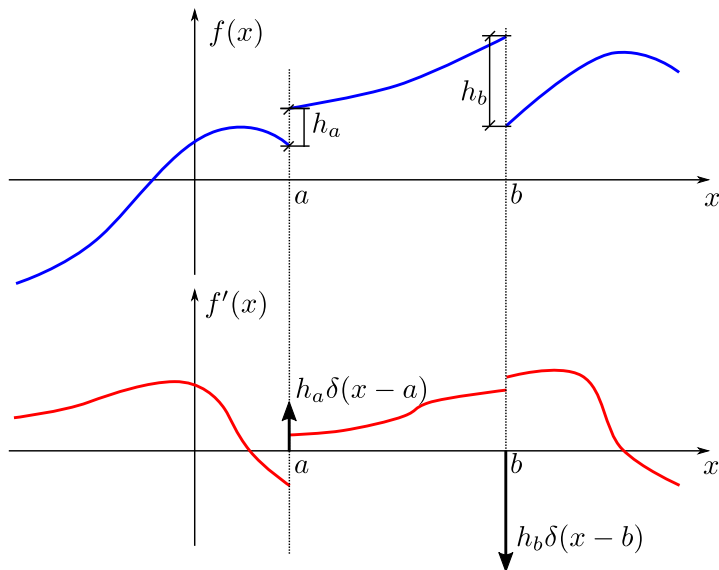
Derivada de funciones discontinuas

- Una función, de buen comportamiento, con discontinuidades finitas a izquierda y derecha **tendrá por derivada en los puntos de discontinuidad una distribución delta de Dirac de amplitud igual a la del salto**.
- La aplicación de este tipo de derivadas a funciones convencionales se conoce como **derivada débil, derivada distribucional o derivada en el sentido de las distribuciones**.

(Ver demostración en Gasquet)



Derivada de funciones discontinuas



Derivada de funciones discontinuas

Ejercicio

Calcule la derivada débil de $f(x) = |x|$

Solución

$$f'(x) = \text{sign}(x)$$



Derivada de la función delta de Dirac

- En ciertas áreas de física e ingeniería, es habitual utilizar no sólo el objeto matemático $\delta(x)$ sino también un objeto que se comporta similar a su **derivada** y que se denota por $\delta'(x)$.
- Para ver una demostración intuitiva, consideremos las funciones $p_\Delta(x) = \frac{1}{\Delta} \Pi(\frac{x}{\Delta})$ que convergen, en el sentido de las distribuciones, a $\delta(x)$ cuando $\Delta \rightarrow 0$.
- La derivada de dichas distribuciones será:

$$p'_\Delta(x) = \frac{1}{\Delta} \left(\delta\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) - \delta\left(x - \frac{\Delta}{2}\right) \right)$$

- Tal y como hicimos con $\delta(x)$, comprobaremos a que valor tiende esta sucesión de funciones bajo el signo integral:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p'_\Delta(x) dx &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta\left(x + \frac{\Delta}{2}\right) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta\left(x - \frac{\Delta}{2}\right) dx \right) \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left(f\left(-\frac{\Delta}{2}\right) - f\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right) = - \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(-\Delta) - f(\Delta)}{2\Delta} = -f'(0) \end{aligned}$$



Derivada de la función delta de Dirac

- A la vista del **paso al límite**, podemos plantear una definición análoga a la de la delta de Dirac:

La derivada de la Delta de Dirac

La derivada de la Delta de Dirac se define mediante su comportamiento bajo la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x - x_0) dx = -f'(x_0)$$

- Este tipo de función, tal y como hemos visto de manera intuitiva, tiene también toda su “energía” concentrada en un punto y, por tanto, también se considera una **función impulsiva**.
- La definición anterior, puede extenderse también a **derivadas de orden superior**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(n)}(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0)$$



Derivada en el sentido de las distribuciones

- Es interesante observar que estas definiciones son compatibles con la integración por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g'(x)dx = \underbrace{f(x)g(x)|_{-\infty}^{\infty}}_0 - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)dx$$

donde en nuestro caso $g(x) = \delta(x)$, la cual se “desvanece” en $\pm\infty$ pues es de soporte finito.

- La fórmula de integración por partes se puede usar para **generalizar el concepto de derivada**, cuando esta aparece dentro de una integral. En este caso, se requiere que o bien la señal a derivar, $g(x)$ tenga soporte finito, o bien $f(x)$ se desvanezca en $\pm\infty$.
 - Además, $f(x)$ debe ser derivable (más detalles en el apéndice de Teoría de Distribuciones).
- En estos casos, se define la **derivada débil, derivada distribucional o derivada en el sentido de las distribuciones** de una función (o distribución) $D(x)$ como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)D'(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)D(x)dx$$



Convolución de distribuciones - I

- La convolución de distribuciones presenta diversos problemas pues no cumple, en general, la propiedad asociativa.
- Sin embargo, para funciones de tipo impulsivo (p.ej., $\delta(x)$, $\delta'(x)$, etc.) se puede aplicar usando la notación habitual dado ciertas propiedades de las distribuciones de soporte finito (ver apéndice).
- Tenemos pues:

$$f(x) * \delta(x - x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x') \delta(x' - x_0) dx' = f(x - x_0)$$

$$\begin{aligned} f(x) * \delta'(x - x_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x') \delta'(x' - x_0) dx' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y - x_0) \delta'(y) dy = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(x - y - x_0)}{dy} \frac{df(u)}{du} \bigg|_{u=x-y-x_0} dy = f'(x - x_0) \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta la regla de la cadena.



Convolución de distribuciones - II

Convolución de distribuciones

$$f(x) * \delta(x - x_0) = f(x - x_0)$$

$$f(x) * \delta'(x - x_0) = f'(x - x_0)$$

$$f(x) * \delta^{(n)}(x - x_0) = f^{(n)}(x - x_0)$$

Estas operaciones también son válidas si $f(x)$ es una distribución de tipo impulsivo.



Convolución de distribuciones - III

Ejercicio

Calcule las siguientes operaciones

1 $f(x) * \delta(2x - 1)$

2 $\delta(x - 1) * \delta(x + 5)$

3 $\delta(3x - 1) * \delta(-2x + 1)$

4 $f(3x + 1) * \delta(-3x + 1)$



Convolución de distribuciones - IV

Solución

$$\textcircled{1} \quad f(x) * \delta(2x - 1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x') \delta(2x' - 1) dx' = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x') \delta(x' - \frac{1}{2}) dx' = \frac{1}{2} f(x - \frac{1}{2})$$

$$\textcircled{2} \quad \delta(x - 1) * \delta(x + 5) = \delta(x + 4)$$

$\textcircled{3}$ Se debe cumplir la propiedad asociativa para cualquier función $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) * (\delta(3x - 1) * \delta(-2x + 1)) &= (f(x) * \delta(3x - 1)) * \delta(-2x + 1) \\ &= \frac{1}{3} f(x - \frac{1}{3}) * \delta(-2x + 1) = \frac{1}{6} f(x + \frac{1}{6}) = f(x) * \left(\frac{1}{6} \delta(x + \frac{1}{6}) \right) \end{aligned}$$

de lo que se desprende que:

$$\delta(3x - 1) * \delta(-2x + 1) = \frac{1}{6} \delta(x + \frac{1}{6})$$

$$\textcircled{4} \quad f(3x + 1) * \delta(-3x + 1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(3(x - x') + 1) \delta(-3x' + 1) dx' = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} f(3x - 3x' + 1) \delta(x' - \frac{1}{3}) dx' = \frac{1}{3} f(3x)$$

Propiedad relevante de las las distribuciones

- Cuando se trabaja con distribuciones, **algunas ecuaciones admiten soluciones más generalistas** de lo habitual.
- En este contexto, es de **especial relevancia** conocer que la igualdad:

$$xD(x) = C$$

admite la solución

$$D(x) = A\delta(x) + \text{p.v.} \frac{1}{x} C$$

donde A es una constante a determinar y la distribución $\text{p.v.} \frac{1}{x}$, cuando se encuentra bajo una integral debe interpretarse como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{1}{x} dx$$

donde f denota **valor principal de Cauchy**.

- No obstante, en la mayor parte de textos en ingeniería, se da por sentado el valor principal con lo que la ecuación se reduce a:

$$xD(x) = C \Leftrightarrow D(x) = A\delta(x) + \frac{1}{x} C$$



Producto de distribuciones

- El producto de distribuciones no está en general definido.
 - El motivo es que su definición directa no cumple la propiedades habituales del producto de las funciones asociativa de las distribuciones. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} (\delta(x) \times x) \times \text{p.v.} \frac{1}{x} &= 0 \times \text{p.v.} \frac{1}{x} = 0 \\ \text{pero} \quad \delta(x) \times \left(x \times \text{p.v.} \frac{1}{x} \right) &= \delta(x) \times 1 = \delta(x) \end{aligned}$$

- No obstante, **sí se define** el producto de dos distribuciones **cuando** las distribuciones tienen soporte disjunto.
 - Por ejemplo, $\delta(x - x_0)\delta(x - x_1) = 0$, con $x_0 \neq x_1$.
 - No obstante, el producto de dos deltas en la misma posición, p.ej., $\delta(x)\delta(x)$ **no está definido**.



Índice

- 1 Introducción
- 2 Definición
- 3 Interpretación física
- 4 Relación con la función escalón
- 5 Operaciones con distribuciones
- 6 Resumen de propiedades de $\delta(x)$**



Resumen de las propiedades de la Delta de Dirac

A continuación se resumen las **propiedades relevantes** de la delta de Dirac en notación de ingeniería:

$f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0)$	$f(x)\delta'(x-x_0) = f(x_0)\delta'(x-x_0) - f'(x_0)\delta(x-x_0)$
$x\delta(x) = 0$	$x\delta'(x) = -\delta(x)$
$f(x) * \delta(x-x_0) = f(x-x_0)$	$f(x) * \delta'(x-x_0) = f'(x-x_0)$
$\delta(ax-x_0) = \frac{1}{ a }\delta(x-\frac{x_0}{a})$	$\delta'(ax-x_0) = \frac{1}{ a }\frac{1}{a}\delta'(x-\frac{x_0}{a})$
$\delta(x) = \delta(-x)$	$\delta'(x) = -\delta'(-x)$

