

Señales de VC de partida importantes

Tema 4

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

Índice I

- 1 Introducción
- 2 Señales aperiódicas
- 3 Señales periódicas
- 4 Exponenciales complejas



Índice

- 1 **Introducción**
- 2 Señales aperiódicas
- 3 Señales periódicas
- 4 Exponenciales complejas



Introducción

- Durante este bloque (temas 4, 5, 6 y 7) temas nos centraremos en señales de variable continua (VC).
- En este tema veremos algunas de las principales señales de VC básicas que se utilizan en ingeniería.
- Clasificaremos estas señales entre aperiódicas $S(\mathbb{R})$ y periódicas $P(X_0)$.



Índice

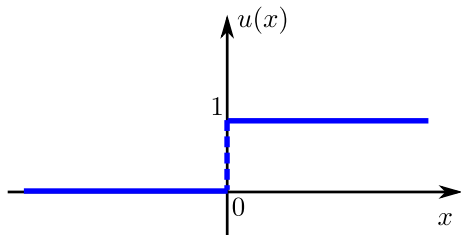
- 1 Introducción
- 2 Señales aperiódicas**
- 3 Señales periódicas
- 4 Exponenciales complejas



Escalón unitario o función de Heaviside

- La señal **escalón unitario** o **función de Heaviside** se define como:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



- Nótese que intencionadamente no se ha definido el valor en $x = 0$.
- Se cumple la propiedad :

$$f(x) * u(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$$

es decir, la convolución con dicha señal se comporta como un integrador.

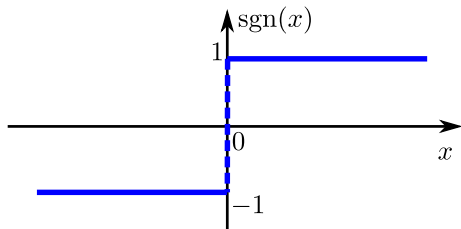
- Otros autores (p. ej., Emilio) utilizan la notación $\Gamma(x) = u(x)$.



Función signo

- La **función signo** se define como:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



- Nótese que intencionadamente no se ha definido el valor en $x = 0$.
- Se cumplen las siguientes relaciones:

$$\text{sgn}(x) = 2u(x) - 1 = u(x) - u(-x)$$

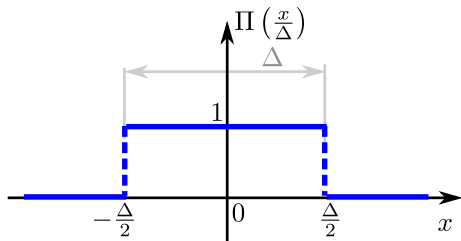
$$\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}, \text{ si } x \neq 0$$



Pulso unidad

- La señal **pulso unidad** se define matemáticamente como:

$$\Pi\left(\frac{x}{\Delta}\right) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{\Delta}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\Delta}{2} \end{cases}$$



- Nótese que intencionadamente no se ha definido el valor en los puntos de cambio de valor.
- Se cumple la propiedad :

$$f(x) * \Pi\left(\frac{x}{\Delta}\right) = \int_{x-\frac{\Delta}{2}}^{x+\frac{\Delta}{2}} f(x') dx'$$

es decir, se comporta como un promedio de la señal.



Pulso unidad

- Otros autores (p. ej., Oppenheim) utilizan la notación $\Pi(x) = P_1(x)$.

Ejercicio

Expresa $P_{\Delta}(x)$ en función de la señal $\Pi(x)$

Ejercicio

Expresa $\Pi\left(\frac{x}{\Delta}\right)$ en función de la señal $u(x)$

Ejercicio

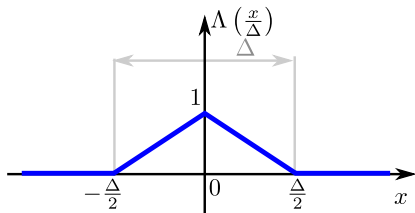
Calcule y represente $\Pi\left(\frac{x}{A}\right) * \Pi\left(\frac{x}{B}\right)$



Triángulo unidad

- La señal **triángulo unidad** de ancho Δ se define matemáticamente como:

$$\Lambda\left(\frac{x}{\Delta}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\Delta}|x| & |x| \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



- Se relaciona con la función pulso mediante la convolución:

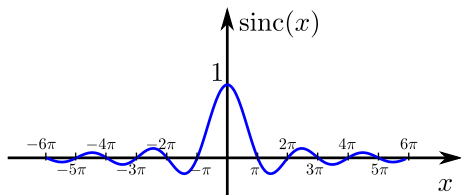
$$\Pi\left(\frac{x}{\Delta}\right) * \Pi\left(\frac{x}{\Delta}\right) = \Delta \Lambda\left(\frac{x}{2\Delta}\right)$$



Función sinc o seno cardinal

- La función **sinc** o seno cardinal se define como:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



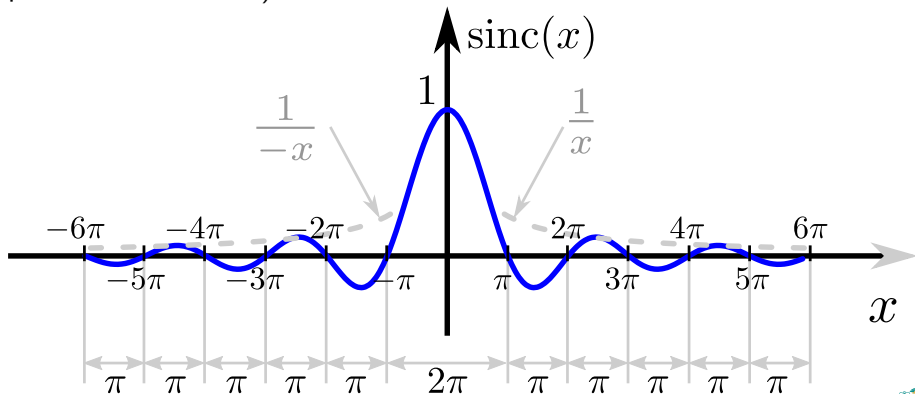
- En muchos textos también se define como $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, a veces llamada función sinc normalizada.
- Es importante observar que esta función tiene **nullos** en las posiciones

$$\text{sinc}(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = n\pi, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$



Función sinc o seno cardinal

La función sinc o seno cardinal, aunque ahora no sea fácil intuir su significado, jugará un papel fundamental en la asignatura (y en buena parte de la titulación).



Índice

- 1 Introducción
- 2 Señales aperiódicas
- 3 Señales periódicas**
- 4 Exponenciales complejas



Señales sinusoidales

- Las señales periódicas por excelencia son las señales sinusoidales, es decir, el **seno** y el **coseno**.

$$f_0(x) = A \sin(\xi_0 x + \varphi_0) \text{ o } f_0(x) = A \cos(\xi_0 x + \varphi_0)$$

- El término A representa la **amplitud** de las señales.
- En estas señales, el término multiplicando a la variable independiente ξ_0 es la **pulsación angular**.
 - El **periodo fundamental** de la señal es $X_0 = \frac{2\pi}{\xi_0}$.
 - La **frecuencia** de la señal viene dada por $\frac{\xi_0}{2\pi} = \frac{1}{X_0}$.



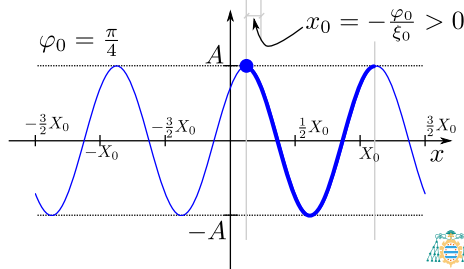
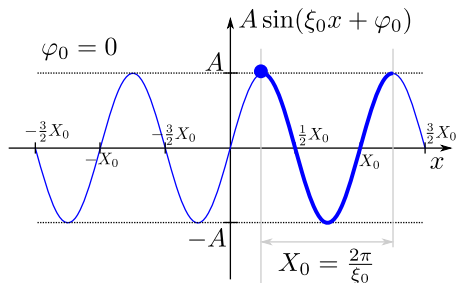
Señales sinusoidales

- La **fase de la señal** φ_0 controla el desplazamiento de la variable independiente:

$$f_0(x) = A \sin(\xi_0 x + \varphi_0) = A \sin\left(\xi_0 \left(x + \frac{\varphi_0}{\xi_0}\right)\right) = A \sin(\xi_0(x - x_0))$$

donde $x_0 = -\frac{\varphi_0}{\xi_0}$.

- $\varphi_0 > 0$ desplaza a la izquierda (adelanto de la señal)
- $\varphi_0 < 0$ desplaza a la derecha (retraso de la señal)



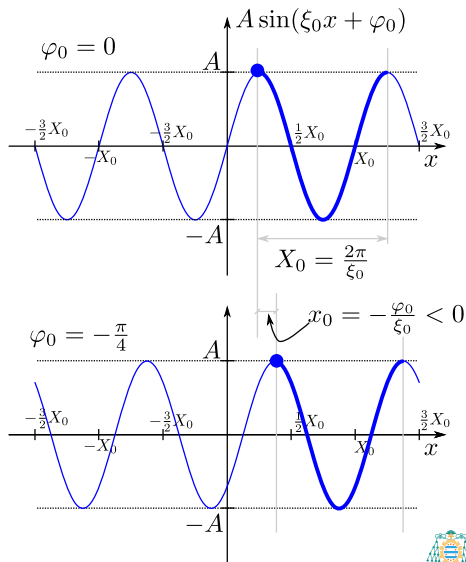
Señales sinusoidales

- La **fase de la señal** φ_0 controla el desplazamiento de la variable independiente:

$$f_0(x) = A \sin(\xi_0 x + \varphi_0) = A \sin\left(\xi_0 \left(x + \frac{\varphi_0}{\xi_0}\right)\right) = A \sin(\xi_0(x - x_0))$$

donde $x_0 = -\frac{\varphi_0}{\xi_0}$.

- $\varphi_0 > 0$ desplaza a la izquierda (adelanto de la señal)
- $\varphi_0 < 0$ desplaza a la derecha (retraso de la señal)



Señales sinusoidales

- Dependiendo de si la variable independiente representa **tiempo o espacio**, tendremos una serie de **notaciones estándar**

	Tiempo		
	Notación habitual	Denominación	Unidades
Periodo (X_0)	T_0	Periodo	s
Pulsación angular (ξ_0)	ω_0	Pulsación angular	rad/s
Frecuencia	f_0	Frecuencia	Hz= s^{-1}

	Espacio		
	Notación habitual	Denominación	Unidades
Periodo (X_0)	λ	Longitud de onda	m
Pulsación angular (ξ_0)	k_0, β_0	Número de onda	rad/m
Frecuencia	-	-	m^{-1}



Señales sinusoidales

Ejercicio

Calcule el producto escalar de un seno y un coseno

$$\langle \cos(\xi_0 x), \sin(\xi_0 x) \rangle$$

Ejercicio

Calcule la energía por periodo de las señales senoidales del ejercicio anterior $E_0[f_0(x)] = \int_{\langle x_0 \rangle} |f(x)|^2 dx$

Ejercicio

Evalúe que condiciones deben cumplir las pulsaciones $\xi_{0,1}$ y $\xi_{0,2}$ para que:

$$\langle \sin(\xi_{0,1} x), \sin(\xi_{0,2} x) \rangle = 0$$

Exponenciales de exponente imaginario

- Las exponenciales de exponente imaginario toman la forma:

$$f_0(x) = e^{j(\xi_0 x + \varphi_0)}$$

- Estas exponenciales pueden descomponerse como una combinación lineal de señales sinusoidales mediante la fórmula de Euler:

$$f_0(x) = e^{j(\xi_0 x + \varphi_0)} = \cos(\xi_0 x + \varphi_0) + j \sin(\xi_0 x + \varphi_0)$$

- Nótese que $e^{j(\xi_0 x + \varphi_0)} \in P(X_0)$ con $X_0 = \frac{2\pi}{\xi_0}$.
- La descomposición en módulo/fase o parte real/imaginaria es directa:

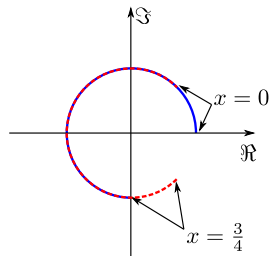
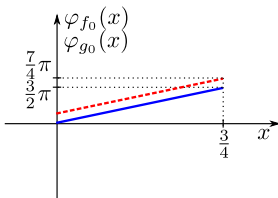
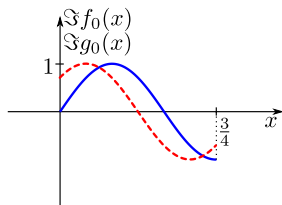
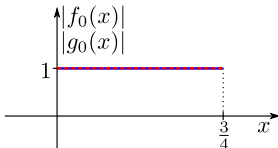
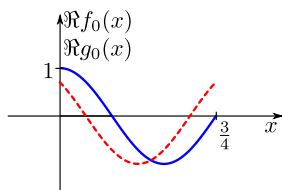
$$\begin{aligned} |e^{j(\xi_0 x + \varphi_0)}| &= 1 & \varphi_{f_0} &= \xi_0 x + \varphi_0 \\ \Re \{ e^{j(\xi_0 x + \varphi_0)} \} &= \cos(\xi_0 x + \varphi_0) & \Im \{ e^{j(\xi_0 x + \varphi_0)} \} &= \sin(\xi_0 x + \varphi_0) \end{aligned}$$



Exponenciales de exponente imaginario

$$f_0(x) = e^{j2\pi x} \quad \text{rango } 0 < x < \frac{3}{4}$$

$$g_0(x) = e^{j(2\pi x + \frac{\pi}{4})}$$



Índice

- 1 Introducción
- 2 Señales aperiódicas
- 3 Señales periódicas
- 4 Exponenciales complejas**



Exponencial compleja

- Las **exponenciales complejas** forman parte fundamental de la asignatura:

$$f(x) = Fe^{s_0 x}, s_0, F \in \mathbb{C}$$

- Para comprender su comportamiento, es conveniente descomponerlas en parte real/imaginaria o en módulo/fase:

$$\begin{aligned} s_0 &= s'_0 + js''_0 \\ F &= |F|e^{j\varphi_F} \end{aligned} \Rightarrow f(x) = \underbrace{|F|e^{s'_0 x}}_{\in S(\mathbb{R})} \underbrace{e^{j(s''_0 x + \varphi_F)}}_{\in P(X_0)}$$

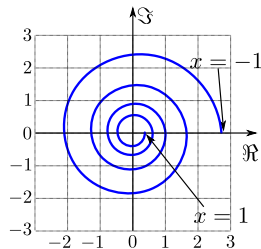
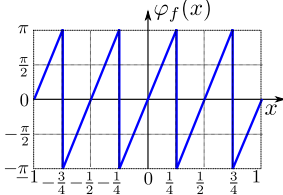
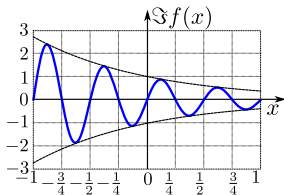
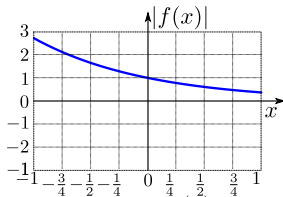
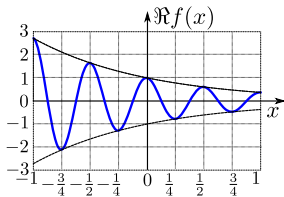
El primer término se corresponde a una **exponencial real** $|F|e^{s'_0 x}$ y el segundo a una **exponencial imaginaria** $e^{j(s''_0 x + \varphi_F)}$

- En función de la parte real del exponente, la señal puede ser periódica ($s'_0 = 0$) o aperiódica ($s'_0 \neq 0$).



Exponencial compleja

$$f(x) = e^{(-1+j4\pi)x} \quad \text{rango } -1 < x < 1$$



Exponencial compleja

$$f(x) = e^{(1+j4\pi)x} \quad \text{rango } -1 < x < 1$$

