

Operadores y Sistemas

Tema 3

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

1 Introducción

2 Aplicaciones entre espacios de señal

- Funcionales
- Formas bilineales
- Operadores
- Resumen de aplicaciones sobre espacios de señal



- 3 Sistemas
 - Ejemplos de sistemas
 - Propiedades básicas de los sistemas
 - Linealidad
 - Invarianza
 - Memoria
 - Invertibilidad
 - Causalidad
 - Estabilidad
 - Interconexiones entre sistemas
- 4 Operador Convolución
 - Definición señales aperiódicas
 - Ejemplo
 - Definición señales periódicas



Índice III

- Propiedades de la convolución



- 5 Operador correlación
 - Correlación cruzada
 - Ejemplo



Índice

- 1 **Introducción**
- 2 Aplicaciones entre espacios de señal
- 3 Sistemas
- 4 Operador Convolución
- 5 Operador correlación

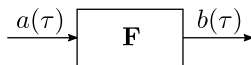


Introducción

¿Qué es un sistema?

- Un sistema es cualquier proceso que transforma un conjunto de señales (**señales de entrada**) en un conjunto de señales (**señales de salida**) diferente o igual al inicial.
- Este proceso se puede entender como una **caja negra** que transforma las señales de entrada en señales de salida.
- Desde un punto de vista matemático se caracterizan mediante **operadores**.

En esta asignatura nos centraremos en sistemas que tienen **una sola entrada** y **una sola salida**.



Índice

1 Introducción

2 Aplicaciones entre espacios de señal

- Funcionales
- Formas bilineales
- Operadores
- Resumen de aplicaciones sobre espacios de señal

3 Sistemas

4 Operador Convolución

5 Operador correlación



Aplicaciones sobre espacios vectoriales

- Los operadores son un tipo particular de aplicaciones entre conjuntos de elementos arbitrarios (espacios).
- Además de los operadores, hay varias aplicaciones más que toman como espacio de partida uno o varios espacios vectoriales
 - Funcionales.
 - Formas bilineales
 - Operadores
- Intentaremos obviar, en lo posible, los conceptos algebraicos más complejos o abstractos, pero manteniendo en consideración aquellos conceptos básicos.



Funcionales

- Los **funcionales** son una aplicación que asigna un escalar a cada elemento de un espacio vectorial:

$$\begin{aligned} F : \mathcal{V}_{\mathcal{K}} &\rightarrow \mathcal{K} \\ \vec{a} &\mapsto \alpha = F[\vec{a}] \end{aligned}$$

- Si trabajamos en un espacio de señal, básicamente **asigna un número** (real o complejo) **a cada función**.
- Un funcional se dice que es **lineal** si cumple:

$$F[\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}] = \alpha F[\vec{a}] + \beta F[\vec{b}], \text{ con } \alpha, \beta \in \mathcal{K}, \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}}$$

- Ejemplo:** la norma de un espacio vectorial, la energía de una señal o las distribuciones (ver tema 5).



Formas bilineales y multilineales

- Una **forma bilineal** es una aplicación que asigna un escalar a un par de elementos de dos espacios vectoriales:

$$F : \mathcal{V}_{\mathcal{K}_1} \times \mathcal{W}_{\mathcal{K}_2} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$$
$$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \alpha = F[\vec{a}, \vec{b}]$$

- Además, se deben cumplir una serie de **propiedades de linealidad** para cada argumento.
 - Dichas propiedades se pueden consultar en el libro de Emilio.
- Típicamente los espacios de partida son los mismos** $\mathcal{V}_{\mathcal{K}_1} = \mathcal{W}_{\mathcal{K}_2} = \mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ y $\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K}$.
- Las formas **multilineales** son similares pero con un mayor número de espacios de partida.
- Ejemplo:** el producto escalar.



Operadores

- Un **operador** es una aplicación entre dos espacios vectoriales:

$$\mathbf{F} : \mathcal{V}_{\mathcal{K}_1} \rightarrow \mathcal{W}_{\mathcal{K}_2}$$

$$\vec{a} \mapsto \vec{b} = \mathbf{F}[\vec{a}]$$

- También existen operadores **bivariantes** o multivariantes (dos o más entradas).
 - No serán objeto de estudio de la asignatura.
- Un caso habitual es que los espacios de partida y llegada sean iguales $\mathcal{V}_{\mathcal{K}_1} = \mathcal{W}_{\mathcal{K}_2} = \mathcal{V}_{\mathcal{K}}$.
 - Veremos casos en los que esto no se cumple.
- Un operador se dice que es **lineal** si

$$\mathbf{F}(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) = \alpha \mathbf{F}(\vec{a}) + \beta \mathbf{F}(\vec{b}), \text{ con } \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}}, \mathbf{F}(\vec{a}), \mathbf{F}(\vec{b}) \in \mathcal{W}_{\mathcal{K}}, \alpha, \beta \in \mathcal{K}$$

donde se asume que se usa el mismo cuerpo de escalares en ambos espacios vectoriales



Ejemplos de operadores

- Algunos **ejemplos**:

$$b(\tau) = \mathbf{F}(a(\tau)) = a(\tau)^2$$

$$g(x) = \mathbf{F}(f(x)) = |f(x)|$$

$$g(x) = \mathbf{F}(f(x)) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'$$

$$g(x) = \mathbf{F}(f(x)) = f(2 - 3x)$$

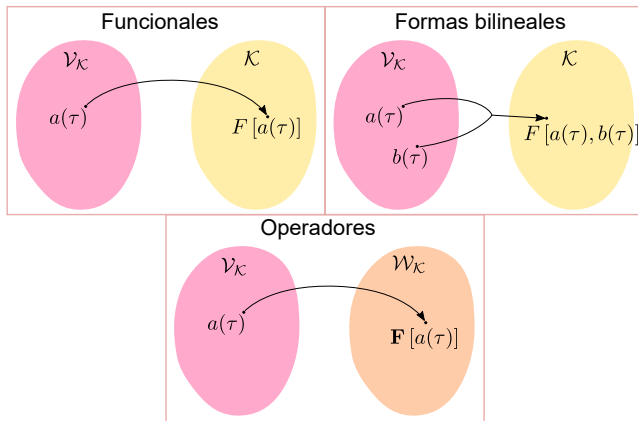
$$y(n) = \mathbf{F}(x(n)) = \begin{cases} 2x(n) & n \leq 0 \\ 3x(n) & n > 0 \end{cases} \quad y(n) = \mathbf{F}(x(n)) = x(n) + \sin(2\pi n)$$

- No sólo los sistemas, sino también las **transformadas** de señales podrán ser descritas por operadores.



Resumen aplicaciones sobre espacios de señal

- A continuación se resumen, algunas aplicaciones sobre **espacios de señal**, en su forma más habitual:



- Los espacios vectoriales podrán ser $S(\mathbb{R})$, $P(X_0)$, $D(\mathbb{Z})$, $D(N_0)$, etc.
- El cuerpo de los escalares $\mathcal{K}$ será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.



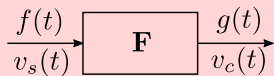
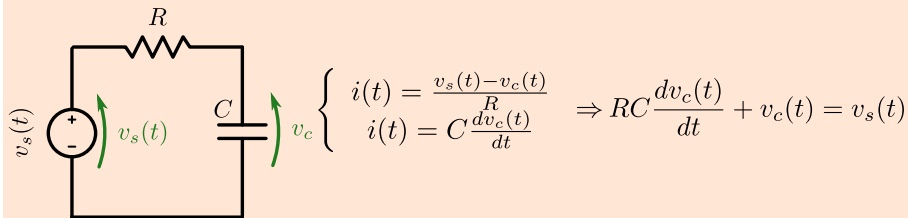
Índice

- 1 Introducción
- 2 Aplicaciones entre espacios de señal
- 3 **Sistemas**
 - Ejemplos de sistemas
 - Propiedades básicas de los sistemas
 - Linealidad
 - Invarianza
 - Memoria
 - Invertibilidad
 - Causalidad
 - Estabilidad
 - Interconexiones entre sistemas



Ejemplo - Circuito eléctrico

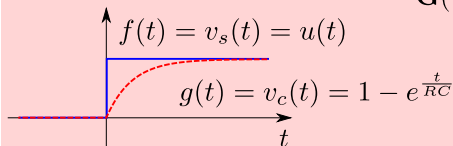
Circuito RC



Notación con operadores

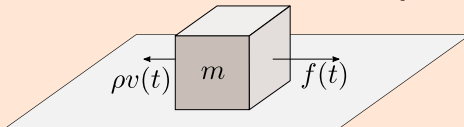
$$\mathbf{G}(\cdot) = RC \frac{d}{dt}(\cdot) + (\cdot) \quad \mathbf{G}(v_c(t)) = v_s(t)$$

$$v_c(t) = \mathbf{F}(v_s(t)) \text{ con } \mathbf{F} = \mathbf{G}^{-1}$$

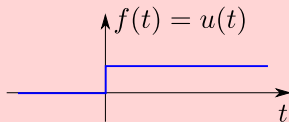
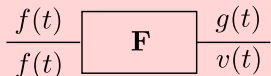


Ejemplo - Fuerza sobre un cuerpo

Aceleración de un cuerpo



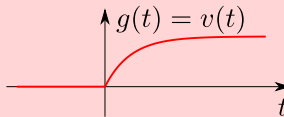
$$\begin{cases} ma(t) = f(t) - \rho v(t) \\ a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow m \frac{dv(t)}{dt} + \rho v(t) = f(t)$$



Notación con operadores

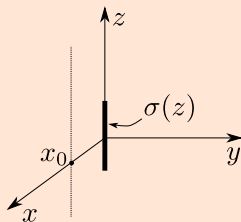
$$\mathbf{G}(\cdot) = m \frac{d}{dt}(\cdot) + \rho(\cdot) \quad \mathbf{G}(v(t)) = f(t)$$

$$v(t) = \mathbf{F}(f(t)) \text{ con } \mathbf{F} = \mathbf{G}^{-1}$$



Ejemplo - Potencial eléctrico

Potencial creado por una distribución de carga lineal

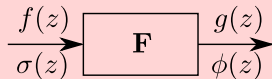


Potencial en una línea a altura x_0

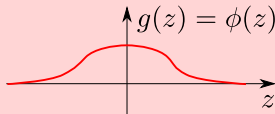
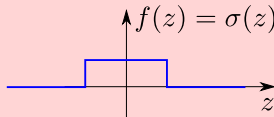
$$\phi(x_0, y=0, z) = \phi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\sigma(z')}{R(z, z')} dz'$$

$$R(z, z') = \sqrt{(z - z')^2 + x_0^2}$$

Notación con operadores



$$\mathbf{F}(\cdot) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int (\cdot) \frac{1}{R(z, z')} dz' \quad \phi(z) = \mathbf{F}(\sigma(z))$$



Ejemplo - Dinero en una cuenta bancaria

Dinero en una cuenta bancaria con intereses



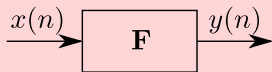
$y(n)$, dinero al principio del año n

$x(n)$, dinero ahorrado al final del año n

r , tasa de interés

$$y(n+1) = (1+r)y(n) + x(n)$$

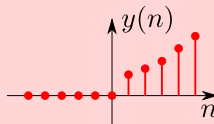
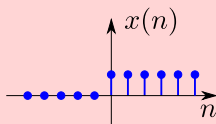
Notación con operadores



$$\mathbf{F}^{-1}(\cdot) = \mathbf{I}(\cdot) - (1+r)\mathbf{D}_{-1}(\cdot)$$

$$x(n) = \mathbf{F}^{-1}(y(n))$$

$$y(n) = \mathbf{F}(x(n))$$



$\mathbf{I}(\cdot)$, operador identidad

$\mathbf{D}_m(\cdot)$, operador desplazamiento a la derecha

Propiedades básicas de los sistemas

- A continuación estudiaremos las **propiedades básicas de los sistemas**.
- Es importante observar que dichas propiedades se deben cumplir para **todas** las señales.
- Basta encontrar un contraejemplo para demostrar que un sistema no cumple una propiedad.



Sistemas lineales

- Se dice que un sistema es lineal si **preserva las combinaciones lineales** con los mismos pesos:

$$\left. \begin{array}{l} a_1(\tau) \rightarrow b_1(\tau) \\ a_2(\tau) \rightarrow b_2(\tau) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\alpha a_1(\tau) + \beta a_2(\tau) \rightarrow \alpha b_1(\tau) + \beta b_2(\tau)}$$

- La propiedad de linealidad también se define de la misma forma para el **operador** que describe el sistema.
- Si un sistema es lineal, asumiendo **funciones de buen comportamiento**, también lo será para una combinación lineal continua (integral):

$$\mathbf{F} : a(\tau) = \int_{\xi} \alpha(\xi) e(\tau; \xi) d\xi \rightarrow b(\tau) = \mathbf{F}[a(\tau)] = \int_{\xi} \alpha(\xi) \mathbf{F}[e(\tau; \xi)] d\xi$$

- En algunos ámbitos, esta propiedad se denomina **superposición**.



Sistemas lineales

Ejercicio

Analice la linealidad de los siguientes sistemas:

$$1 \quad g(x) = K \frac{df(x)}{dx} \quad \mathbf{F}[\cdot] = K \frac{d[\cdot]}{dx}$$

$$2 \quad g(x) = K |f(x)| \quad \mathbf{F}[\cdot] = K |\cdot|$$

$$3 \quad y(n) = x(n) + K \quad \mathbf{F}[\cdot] = \cdot + K$$

$$4 \quad y(n) = x(n) - x(n-1) \quad \mathbf{F}[\cdot] = \cdot - \mathbf{D}_1[\cdot]$$

$$5 \quad y(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si } x(0) \neq x(1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio

Demuestre que si un sistema es lineal, entonces si su entrada es nula, su salida también es nula:

$$a(\tau) = 0 \rightarrow b(\tau) = 0$$

Sistemas invariantes

- Se dice que un sistema es **invariante** si un desplazamiento sobre la variable independiente de la señal de entrada produce el mismo desplazamiento sobre la señal de salida:

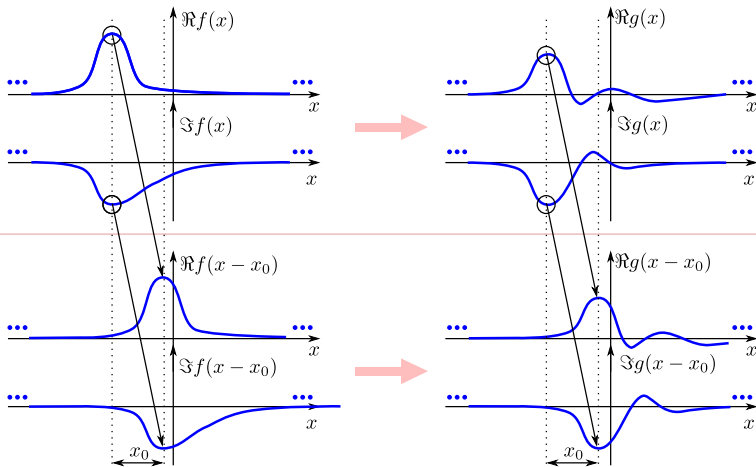
$$a(\tau) \rightarrow b(\tau) \Rightarrow a(\tau - \tau_0) \rightarrow b(\tau - \tau_0)$$

- Como consecuencia, **su comportamiento no depende del origen de coordenadas**.
- En el dominio del tiempo, esta definición se puede interpretar como que **las propiedades del sistema no cambian con el tiempo**.



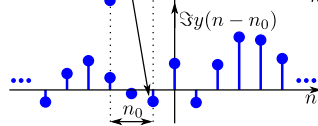
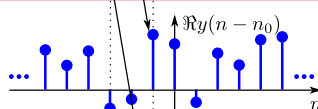
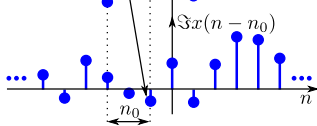
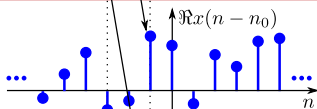
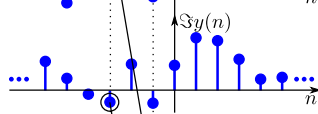
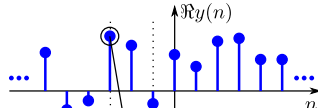
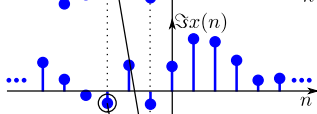
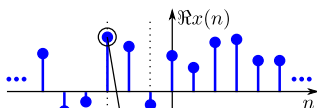
Sistemi invariantes

Invarianza - Variable continua



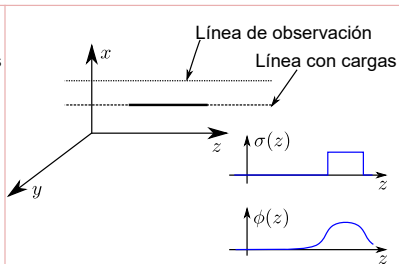
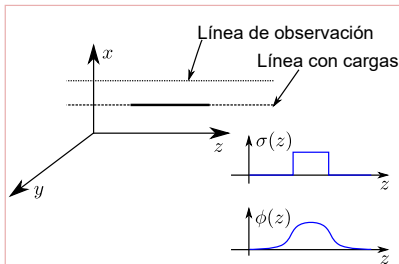
Sistemas invariantes

Invarianza - Variable discreta

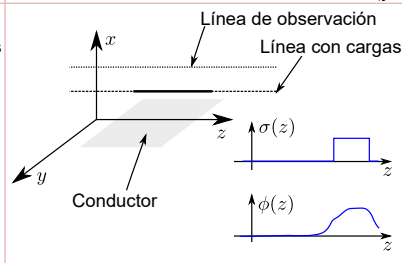
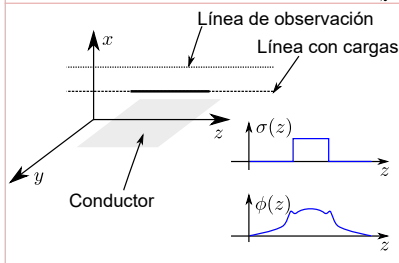


Sistemas invariantes

Invariante (espacio libre)



No Invariante (inhomogéneo)



Sistemas invariantes

Ejercicio

Analice la invarianza de los siguientes sistemas:

$$\textcircled{1} \quad g(t) = \mathbf{F}[f(t)], \quad \mathbf{F}[f(t)] = \begin{cases} f(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad y(n) = x(n) + p(n), \quad p(n) \in D(\mathbb{Z})$$

$$\textcircled{3} \quad y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$$



Sistemas con/sin memoria

- Diremos que un sistema es sin **memoria** cuando la salida en cada valor de la variable independiente sólo depende de la entrada en dicho valor.

$$b(\tau_0) = \mathbf{F}[a(\tau_0)], \forall \tau_0$$

es decir, la salida el instante τ_0 sólo depende del valor de la entrada en τ_0 .

- Por ejemplo, un sistema que modela la tensión (entrada) y la corriente (salida) en una resistencia, será un sistema sin memoria:

$$i(t) = \frac{v(t)}{R}$$

- Sin embargo, un sistema que modela la corriente (entrada) y la tensión (salida) en un condensador, será un sistema con memoria:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t') dt'$$

pues se necesitan todos los valores pasados de la corriente para determinar la tensión actual.



Sistemas con/sin memoria

Ejercicio

Analice la propiedad de memoria de los siguientes sistemas:

1 $g(x) = f(x)^2$, $\mathbf{F}[\cdot] = (\cdot)^2$

2 $g(x) = f(2x)$

3 $y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$

4 $y(n) = x(n) - x(n-1)$



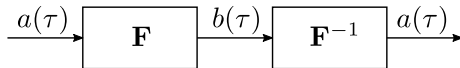
Invertibilidad

- Diremos que un sistema es **invertible** si existe otro sistema tal que, aplicada la señal del primero nos devuelve la entrada al primer sistema.

$\mathbf{F}$ es invertible si $\exists \mathbf{F}^{-1}$ tal que $\mathbf{F}^{-1} [\mathbf{F} [a(\tau)]] = a(\tau), \forall a(\tau)$

- Esta definición es equivalente a decir que un sistema es invertible si distintas entradas proporcionan distintas salidas.

$$a_1(\tau) \neq a_2(\tau) \Rightarrow b_1(\tau) \neq b_2(\tau), \forall a_1(\tau), a_2(\tau); \forall \tau$$



Invertibilidad

Ejercicio

Analice la propiedad de invertibilidad de los siguientes sistemas:

❶ $g(x) = \frac{df(x)}{dx}$

❷ $g(x) = f(2x)$

❸ $y(n) = x(n)^2$

❹ $y(n) = \sum_{m=-\infty}^n x(m)$



Causalidad

- La definición de sistema **causal** es, desde un punto de vista práctico, sólo interesante para sistemas (continuos o discretos) que manejen señales en el **dominio del tiempo**.
- Diremos que un sistema es **causal** cuando el valor de salida en un cierto valor de la variable independiente τ_0 sólo depende del valor de la entrada en valores anteriores o iguales a dicho valor:

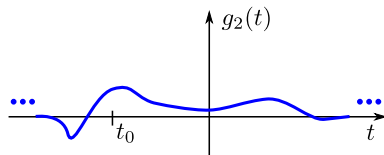
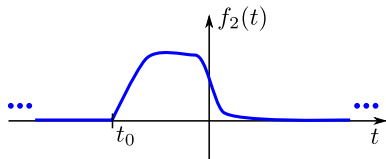
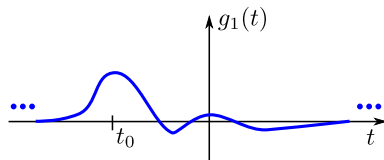
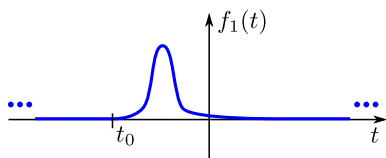
$$b(\tau_0) = \mathbf{F}[a(\tau \leq \tau_0)], \forall \tau_0$$

- Como consecuencia, si dos señales son iguales hasta un instante τ_0 , la salida del sistema también será igual hasta dicho instante.
- Todo sistema sin memoria será un sistema causal.



Causalidad

El siguiente sistema sería no causal pues $f_1(t) = f_2(t) = 0, \forall t < t_0$ pero sin embargo $g_1(t) \neq g_2(t), \forall t < t_0$



Causalidad

Ejercicio

Analice la propiedad de causalidad de los siguientes sistemas:

❶ $g(x) = f(x - 1)$

❷ $g(x) = f(x + 1)$

❸ $y(n) = \sum_{m=n-2}^{n+2} x(m)$

❹ $y(n) = x(n) + \cos(5,2\pi n)$



Estabilidad

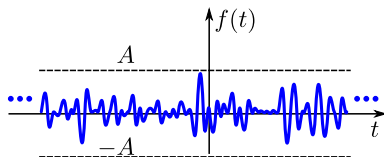
- Un sistema se dice que es **estable** si para toda entradas acotada produce una salida acotada:

$$\forall a(\tau) \text{ tal que } |a(\tau)| \leq A, \forall \tau \Rightarrow \exists B \text{ tal que } |b(\tau)| \leq B, \forall \tau; A, B \in \mathbb{R}^+$$

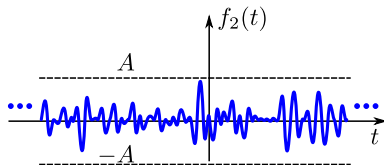
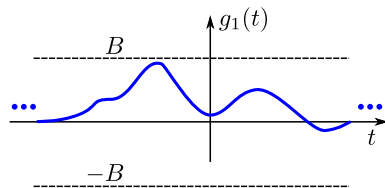
- Desde un punto de vista físico esta propiedad es muy interesante y objeto de estudio.
 - Un sistema inestable (p.ej., un circuito electrónico) podría dar lugar a una señal que dañase otros componentes. Además, podría ocasionar una salida de fuerte amplitud frente a señales bajas indeseadas (p.ej. ruido).



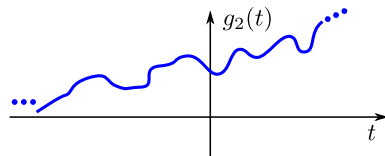
Estabilidad



Estable



No estable



Estabilidad

Ejercicio

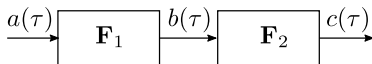
Analice la propiedad de estabilidad de los siguientes sistemas:

- 1 $y(n) = nx(n)$
- 2 El sistema de depósito a plazo fijo
- 3 $g(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$
- 4 $g(x) = e^{f(x)}$



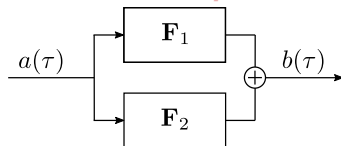
Interconexiones básicas entre sistemas

Sistemas en serie (cascada)



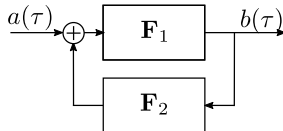
$$c(\tau) = \mathbf{F}_2 [b(\tau)] = \mathbf{F}_2 [\mathbf{F}_1 [a(\tau)]]$$

Sistemas en paralelo



$$b(\tau) = \mathbf{F}_1 [a(\tau)] + \mathbf{F}_2 [a(\tau)]$$

Sistemas realimentados



$$b(\tau) = \mathbf{F}_1 [a(\tau) + \mathbf{F}_2 [b(\tau)]]$$



Índice

- 1 Introducción
- 2 Aplicaciones entre espacios de señal
- 3 Sistemas
- 4 Operador Convolución**
 - Definición señales aperiódicas
 - Ejemplo
 - Definición señales periódicas
 - Propiedades de la convolución
- 5 Operador correlación



Introducción a la convolución

- Una de las operaciones más importantes con señales es la operación de **convolución**.
- Esta operación toma dos señales, $a(\tau)$ y $b(\tau)$ y les asigna una nueva señal:

$$c(\tau) = (a * b)(\tau)$$

aunque en ingeniería se suele preferir la notación:

$$c(\tau) = a(\tau) * b(\tau)$$

- Es por tanto un operador bivalente (y, como veremos, **bilineal**).
- Es especialmente relevante, como se verá en temas posteriores, en el ámbito de los sistemas lineales.
- Su definición depende del **espacio de trabajo**.



Señales aperiódicas

- En el caso de señales pertenecientes a $S(\mathbb{R})$, la convolución, a veces conocida también como convolución lineal, se define como:

$$c(x) = f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x')g(x - x')dx'$$

- Para el caso de señales discretas en $D(\mathbb{Z})$, la convolución se define de manera análoga como:

$$c(n) = x(n) * y(n) = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} x(n')y(n - n')$$

- En ambos casos, la convergencia de la/el integral/sumatorio es, en ocasiones, difícil de analizar aunque para la mayor parte de señales habituales se puede considerar que la/el integral/sumatorio es convergente.



Señales aperiódicas

Ejercicio

Dada $f(x)$ y $g(x)$, ambas de soporte finito (i.e., duración finita) entre $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente, calcule el soporte de la función $c(x) = f(x) * g(x)$. Repita el ejercicio para el caso discreto.

Ejercicio

Demuestre que la convolución de una señal $a(\tau)$ con una señal periódica $b_0(\tau)$, en caso de converger, es una señal periódica

$$c_0(\tau) = a(\tau) * b_0(\tau)$$

Se recomienda que realice una demostración para VC y otra para VD.



Descripción pasos

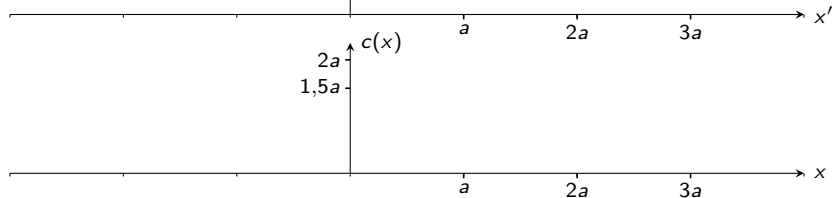
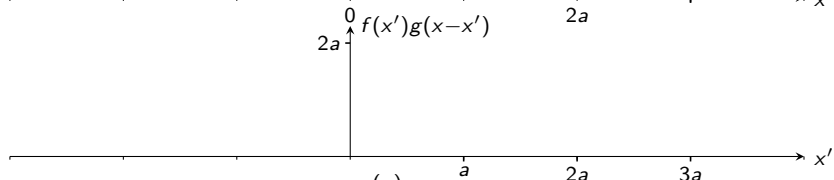
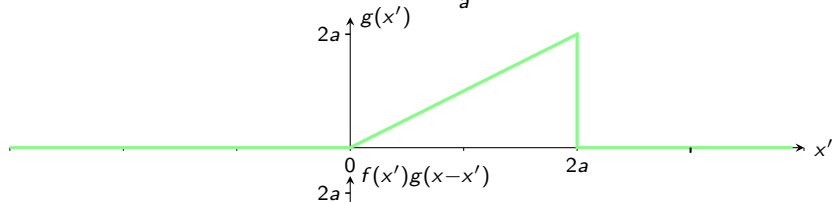
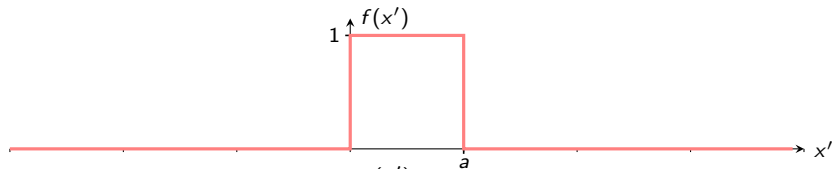
Supongamos que queremos conocer el valor de la convolución para un cierto valor $x = x_0$:

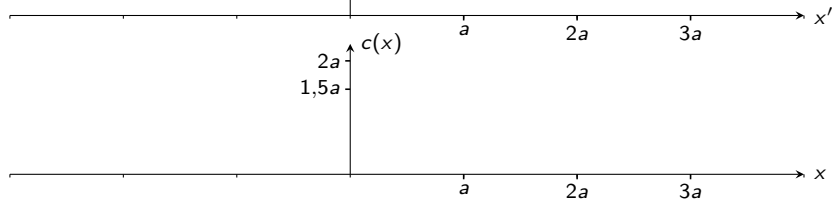
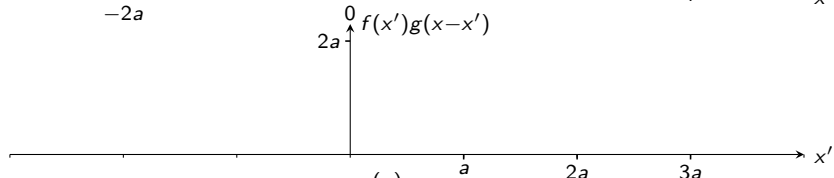
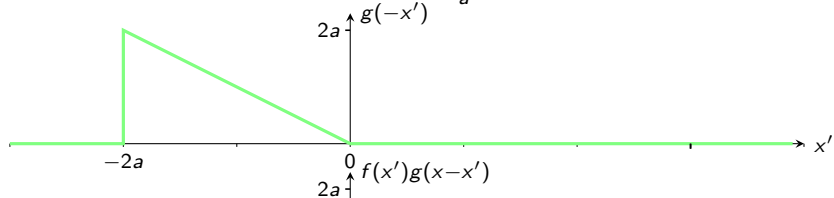
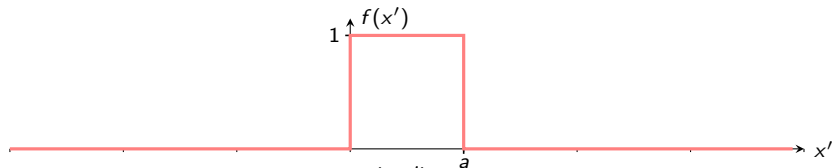
- 1 Debemos reflejar la función $g(x') \rightarrow g(-x')$
- 2 Desplazaremos dicha función una cierta cantidad x_0 ,
 $g(-x') \rightarrow g(x_0 - x')$
- 3 Calcularemos el producto de las funciones $f(x')g(x_0 - x')$
- 4 Calcularemos la integral en todo el soporte de la función producto.

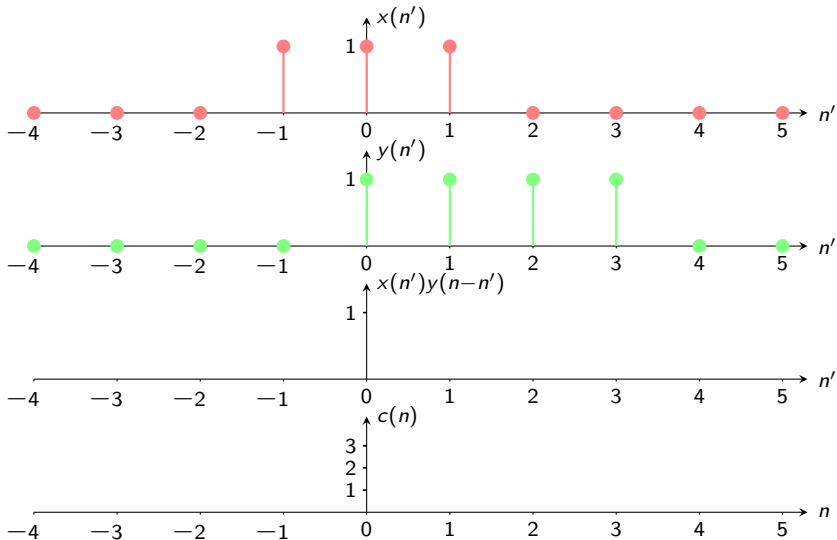
Los **pasos** previos se pueden repetir para diferentes valores de x hasta obtener toda la señal $c(x)$.

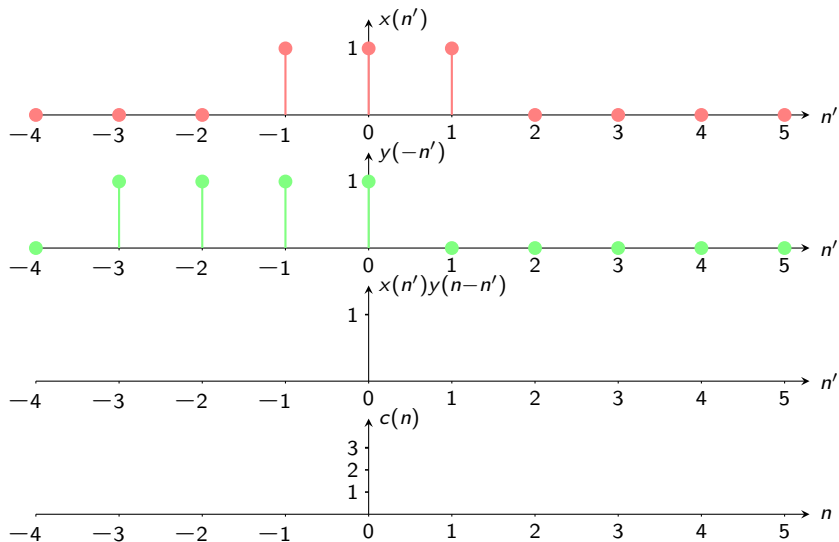
Para el caso discreto, se puede realizar una operativa similar, como se ilustra en los próximos ejemplos











Convolución periódica

- Cuando las dos señales involucradas son periódicas, habitualmente se utiliza otra definición de convolución, conocida como **convolución periódica**, y que para VC está definida como:

$$c_0(x) = f_0(x) * g_0(x) = \int_{\langle x_0 \rangle} f_0(x') g_0(x - x') dx'$$

mientras que para señales de VD se define como:

$$c_0(n) = x_0(n) * y_0(n) = \sum_{n'=\langle N_0 \rangle} x_0(n') y_0(n - n')$$

en ambos casos, el resultado es independiente del intervalo escogido, siempre y cuando tenga como duración un periodo fundamental.



Convolución periódica

- La convolución periódica tendrá especial importancia más adelante cuando veamos las transformadas de señales de variable discreta.
- Además, está estrechamente **relacionada** con la muy popular **convolución circular**, la cual también aparecerá cuando veamos dichas transformadas.
- Adelantaremos brevemente aquí parte de esta matemática:
 - Es habitual que una señal aperiódica de **duración finita** se periodifique:

$$a_{0,p}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a(\tau - m\tau_0)$$

en esos casos, veremos más adelante que en ocasiones es necesario realizar una operación conocida como convolución circular.

- La convolución circular no es más que la convolución periódica utilizando las señales periodificadas:

$$a(\tau) \circledast b(\tau) = a_{0,p}(\tau) * b_{0,p}(\tau)$$



Convolución periódica

Ejercicio

Demuestre que la convolución periódica de dos señales periódicas es también otra señal periódica.



Convolución periódica

Ejercicio

Calcule la convolución periódica entre las señales, $f_0(x)$, de periodo 1, definida en un periodo como: $f_0(x) = x$ ($0 < x \leq 1$) y la función $g_0(x) = \cos(2\pi x)$. Se recomienda que primero dibuje las señales



Convolución periódica

Solución

$$c_0(x) = \int_0^1 x' \cos(2\pi(x-x')) dx' = \cos(2\pi x) \int_0^1 x' \cos(2\pi x') dx' + \sin(2\pi x) \int_0^1 x' \sin(2\pi x') dx'$$

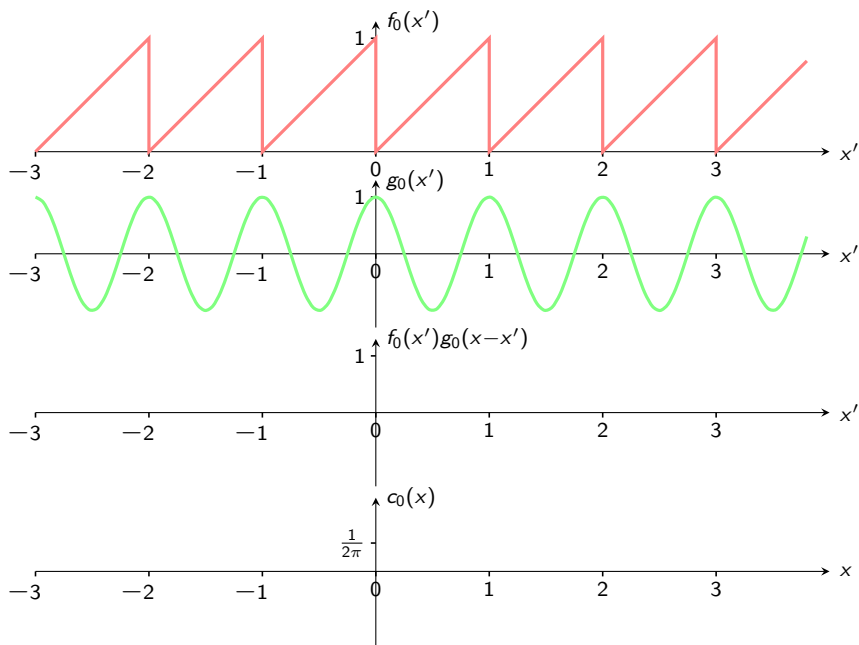
donde se ha aplicado la identidad trigonométrica

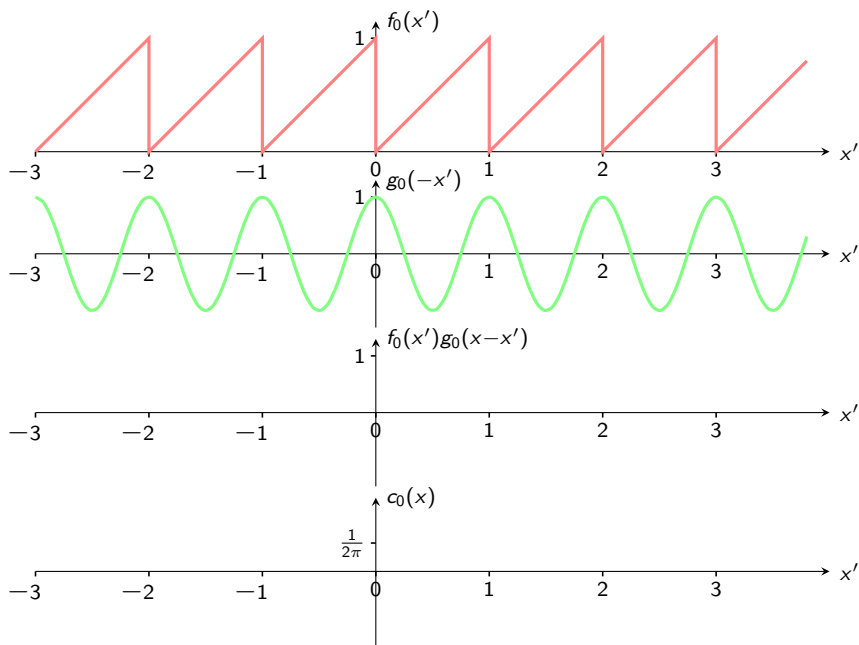
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$. Cada una de estas integrales se puede resolver por partes:

$$\int_0^1 x' \cos(2\pi x') dx' = \frac{1}{2\pi} x' \sin(2\pi x') \Big|_0^1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sin(2\pi x') dx' = 0$$

$$\int_0^1 x' \sin(2\pi x') dx' = \frac{-1}{2\pi} x' \cos(2\pi x') \Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \cos(2\pi x') dx' = -\frac{1}{2\pi}$$

Luego $c_0(x) = -\frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x)$





Convolución periódica

Ejercicio

Calcule la convolución periódica entre las señales, $f_0(x)$, de periodo 1, definida en un periodo como: $f_0(x) = e^x$ ($0 < x \leq 1$) y la función $g_0(x) = \cos(2\pi x)$. Se recomienda que primero dibuje las señales.



Propiedades de la convolución

La convolución, en cualquiera de las formas vistas anteriormente, cumple, para funciones de buen comportamiento, las siguientes **propiedades**:

Conmutativa $a(\tau) * b(\tau) = b(\tau) * a(\tau)$

Asociativa $a(\tau) * [b(\tau) * c(\tau)] = [a(\tau) * b(\tau)] * c(\tau)$

Distributiva $a(\tau) * [b(\tau) + c(\tau)] = a(\tau) * b(\tau) + a(\tau) * c(\tau)$

Para las señales que utilizaremos en la asignatura, podemos asumir que estás propiedades se cumplirán.



Propiedades de la convolución

Ejercicio

Pruebe las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la convolución. Asuma que las funciones son de buen comportamiento en caso necesario para poder aplicar, p. ej., el teorema de Fubini. Así como las dos siguientes propiedades:

a) Si $c(\tau) = a(\tau) * b(\tau)$, entonces

$c(\tau - \tau_0) = a(\tau - \tau_0) * b(\tau) = a(\tau) * b(\tau - \tau_0)$ (propiedad de equivarianza de la traslación)

b) $[\alpha a(\tau)] * b(\tau) = a(\tau) * [\alpha b(\tau)] = \alpha [a(\tau) * b(\tau)],$



Índice

- 1 Introducción
- 2 Aplicaciones entre espacios de señal
- 3 Sistemas
- 4 Operador Convolución
- 5 Operador correlación**
 - Correlación cruzada
 - Ejemplo



Definición de correlación cruzada

- Con el objetivo de medir la **similitud entre dos señales**, se define el operador **correlación-cruzada** o, simplemente, correlación.
- En el caso de señales de variable continua y aperiódicas, esta operación entre dos señales $f(x)$ y $g(x)$ se define como:

$$R_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+x')g^*(x')dx' = \langle f(x'+x), g(x') \rangle$$

- Esta operación es más sofisticada que el producto escalar pues permite tener en cuenta **desfases** entre las señales.
- Es sencillo demostrar que también puede expresarse en función de la **convolución** (cambio de variable $y' = x + x'$):

$$R_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y')g^*(y'-x)dy' = f(x) * g^*(-x)$$



Interpretación de la correlación cruzada

- A efectos de cálculo puede verse igual que una **convolución**, pero conjugando la segunda señal y sin necesidad de voltearla antes de empezar a desplazarla.
- Para entender porque la correlación mide la **similitud** entre señales, además de por su definición en forma de producto escalar, es interesante observar la señal diferencia:

$$z(x) = f(x + x') - g(x)$$

- La energía de la diferencia será:

$$E[z(x)] = E[f(x)] + E[g(x)] - 2\Re\{R_{fg}(x)\}$$

- Cuanto más alta sea la correlación, menos energía tendrá la diferencia $z(x)$, es decir, más parecidas serán las señales $f(x + x')$ y $g(x)$.
- Cuanto más baja sea la correlación, más energía tendrá la diferencia $z(x)$, es decir, menos parecidas serán las señales $f(x + x')$ y $g(x)$.



Definición de autocorrelación

- La **autocorrelación** se define para el caso en el que ambas señales son iguales:

$$R_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+x')f^*(x')dx' = \langle f(x'+x), f(x') \rangle$$

- Esta operación mide la similitud de una señal con una copia desplazada de ella misma, es decir, nos da una idea de la variación de $f(x)$.
- Por ejemplo, si $|R_f(x_0)|$ es alto, entonces $f(x)$ y $f(x+x_0)$ son muy similares.



Propiedades de la correlación

- La correlación cumple las siguientes **propiedades**:

$$R_{fg}(x) = R_{gf}^*(-x)$$

$$R_f(x) = R_f^*(-x) \text{ señal hermítica}$$

$$z(x) = f(x) \pm g(x) \Rightarrow R_z(x) = R_f(x) + R_g(x) \pm [R_{fg}(x) + R_{gf}(x)]$$

$$R_f(0) = E[f(x)]$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|R_{fg}(x)|^2 \leq E[f(x)] E[g(x)] \quad |R_f(x)| \leq E[f(x)]$$



Incorrelación, ortogonalidad e incoherencia

- Los conceptos de señales **incorreladas**, **ortogonales** e **incoherentes**, son similares aunque tienen pequeños matices.

$$z(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow R_z(x) = R_f(x) + R_g(x) + [R_{fg}(x) + R_{gf}(x)]$$

$$E[z(x)] = E[f(x)] + E[g(x)] + [R_{fg}(0) + R_{gf}(0)]$$

- Incorrelación** entre $f(x)$ y $g(x)$

$$R_{fg}(x) = R_{gf}(x) = 0, \forall x$$

- Ortogonalidad** entre $f(x)$ y $g(x)$

$$R_{fg}(0) = R_{gf}(0) = \langle f(x), g(x) \rangle = 0$$

- Incoherencia** entre $f(x)$ y $g(x)$

$$R_{fg}(0) + R_{gf}(0) = 2\Re\{R_{fg}(0)\} = 0$$

$$R_{fg}(0) = R_{gf}^*(0) \Rightarrow \Re\{R_{fg}(0)\} = \Re\{R_{gf}(0)\}$$

$$R_{fg}(0) = R_{gf}^*(0) \Rightarrow \Im\{R_{fg}(0)\} = -\Im\{R_{gf}(0)\}$$

$$E[z(x)] = E[f(x)] + E[g(x)]$$



Otros tipos de correlación

- Definiciones similares pueden hacerse para **otros espacios de señal** (variable continua y periódicas, variable discreta aperiódicas/periódicas) de manera análoga:

$$R_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+x')g^*(x')dx' = \langle f(x'+x), g(x') \rangle$$

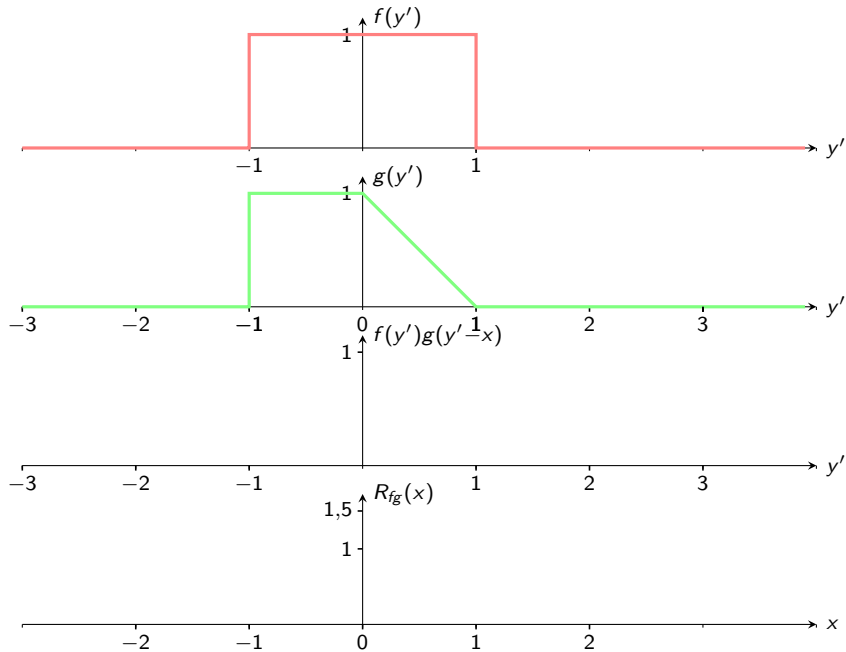
$$R_{f_0g_0}(x) = \int_{\langle X_0 \rangle} f_0(x+x')g_0^*(x')dx' = \langle f_0(x'+x), g_0(x') \rangle$$

$$R_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+m)y^*(m) = \langle x(n+m), y(m) \rangle$$

$$R_{x_0y_0}(n) = \sum_{m=\langle N_0 \rangle} x_0(n+m)y_0^*(m) = \langle x_0(n+m), y_0(m) \rangle$$

- Las **propiedades** de estas correlaciones son idénticas a las ya vistas.
- Ha de tenerse en cuenta que algunos autores prefieren versiones ligeramente modificadas de estas definiciones (p. ej., $R_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x')g(x+x')dx'$) pero que conceptualmente son equivalentes.





Ejemplo

Ejercicio

Calcule analíticamente la correlación mostrada en la anterior animación.

Solución

$$R_{fg}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -2 \\ 2 + 2x + \frac{x^2}{2} & -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{3}{2} + x & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{3}{2} - \frac{x^2}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 \leq x \end{cases}$$



Ejemplo

Caras generadas mediante inteligencia artificial (convolutional neural networks, CNN)



Jaime Laviada (Uniovi)



Tema 3

