

Espacios de Señal

Tema 2

Jaime Laviada

Área de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Oviedo

Índice I

1 Introducción

- ¿Qué es una señal?
- Algunas clasificaciones de señales

2 Espacios Vectoriales

- Definición
- Operaciones en espacios vectoriales
- Combinaciones lineales
- Bases
- Teorema de la mejor aproximación

3 Espacios de señal

- Bases y combinaciones lineales
- Ejemplos
- Espacios de señal de interés



Índice II

- 4 Otras clasificaciones de señales
 - Señales a derechas e izquierdas
 - Señales reales/imaginarias
 - Señales pares/impares
 - Señales hermíticas/antihermíticas
- 5 Parámetros de interés de una señal
- 6 Operaciones básicas con señales



Índice

- 1 Introducción
 - ¿Qué es una señal?
 - Algunas clasificaciones de señales
- 2 Espacios Vectoriales
- 3 Espacios de señal
- 4 Otras clasificaciones de señales
- 5 Parámetros de interés de una señal
- 6 Operaciones básicas con señales



Introducción

- Para entender que es un espacio de señal, en primer lugar de conocer el concepto de señal.

¿Qué es una señal?

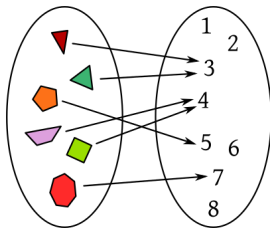
Cualquier función de una o más variables independientes que porta o contiene alguna información sobre el comportamiento o la naturaleza de algún fenómeno y que puede ser almacenada, presentada o manipulada.

- Aspectos clave:
 - Desde un punto de vista matemático, se representan como una función.
 - Están asociadas a algún fenómeno.
 - Transportan información.



Pero, ¿qué es una función?

- Conviene repasar el concepto de función. ¿Qué es una función?
- Una función es una aplicación de un conjunto en otro.



- Matemáticamente se representa como:

$$a : K_1 \rightarrow K_2$$
$$\tau \rightarrow a(\tau)$$



Pero, ¿qué es una función? - II

- Matemáticamente se representa como:

$$\begin{aligned}a &: K_1 \rightarrow K_2 \\ \tau &\mapsto a(\tau)\end{aligned}$$

- En esta asignatura, consideraremos que los conjuntos K_1 y K_2 son conjuntos de números.
 - Los habituales serán los números naturales, los enteros, los reales y los complejos, denotados por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.
 - Conceptos idénticos pueden extenderse a espacios de varias dimensiones sin más que considerar los conjuntos $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \equiv \mathbb{N}^2$ y equivalentes.
 - En estos casos, habría variables variables de partida, p.ej., (τ_1, τ_2) .



Pero, ¿qué es una función? - III

- Matemáticamente se representa como:

$$\begin{aligned}a &: K_1 \rightarrow K_2 \\ \tau &\mapsto a(\tau)\end{aligned}$$

- La variable τ se la denomina **variable independiente**:
 - En el caso de un conjunto de partida sea $\mathbb{Z}$, se denotará por $\tau \equiv n$ y la función por $x(n)$.
 - En el caso de un conjunto de partida sea $\mathbb{R}$, se denotará, en general, por $\tau \equiv x$ y la función por $f(x)$
 - Es habitual que estas funciones representen tiempo o espacio, permitiendo una notación incluso más específica $x \equiv t$ o $x \equiv z$.



Tipos de señales

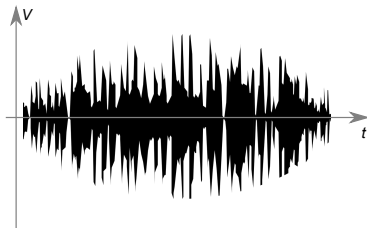
- Se pueden establecer diversas clasificaciones de la señal en función de múltiples parámetros:
 - Señales de **variable continua** (VC) - Señales de **variable discreta** (VD)
 - Señales **reales** - Señales **complejas**
 - Señales **unidimensionales** - Señales **multidimensionales**
 - Señales **escalares** - Señales **vectoriales**



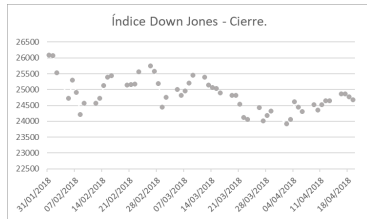
Señales de variable continua y discreta

- La clasificación entre señales de variable continua (VC) o discreta (VD) se basa en la naturaleza de la variable independiente:
- Variable continua: El conjunto de partida K_1 no es numerable.
- Típicamente $\tau \in \mathbb{R}$, luego $\tau \equiv x$.
- Variable discreta: El conjunto de partida K_1 es numerable.
- Típicamente $\tau \in \mathbb{Z}$, luego $\tau \equiv n$.

Ejemplo: Señal de voz



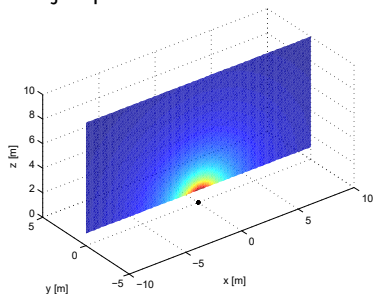
Ejemplo: Valores de cierre en bolsa



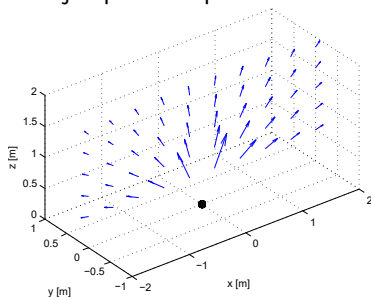
Señales escalares y vectoriales

- La clasificación entre señales escalares y vectoriales depende de la magnitud física que representa $a(\tau)$.
- Señal **escalar**: el conjunto de salida, K_2 , está compuesto por escalares (p.ej., $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)
- Señal **vectorial**: el conjunto de salida, K_2 , está compuesto por vectores (p.ej., $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{C}^3$)

Ejemplo: Potencial eléctrico



Ejemplo: Campo eléctrico



- En la asignatura sólo trabajaremos con señales escalares.

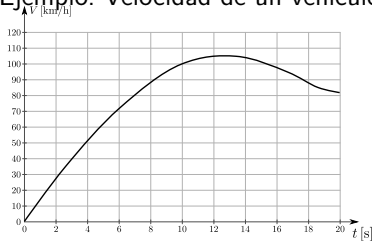


Señales reales y complejas

- La clasificación entre señales reales y complejas se basa en el conjunto de salida K_2 .

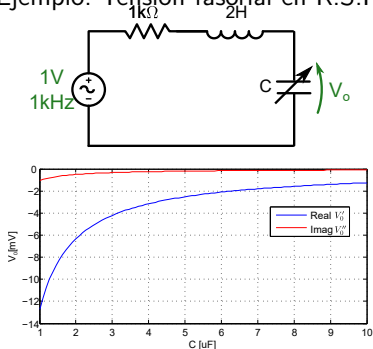
Señal **real**: $K_2 \subseteq \mathbb{R}$

Ejemplo: Velocidad de un vehículo



Señal **compleja**: $K_2 \subseteq \mathbb{C}$

Ejemplo: Tensión fasorial en R.S.P.



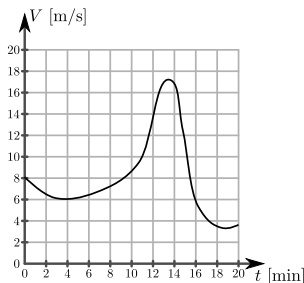
- Un telecomunicaciones las señales pasobanda y los campos electromagnéticos se representan habitualmente mediante señales complejas.



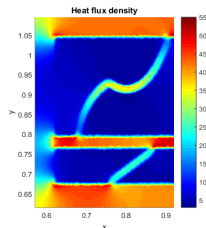
Señales unidimensionales y multidimensionales

- La clasificación entre señales unidimensionales y multidimensionales se basa también en el número de variables independientes:
- Señal **unidimensional**: la señal depende de una única variable $a(\tau)$
- Señal **multidimensional**: la señal depende de varias variables independientes. Por ejemplo, $a(\tau_1, \tau_2)$.

Ejemplo: Velocidad del viento



Ejemplo: Densidad de flujo de calor



- Un campo en física (es decir, una distribución espacio-temporal de una magnitud) será siempre una señal multidimensional.



Índice

- 1 Introducción
- 2 Espacios Vectoriales
 - Definición
 - Operaciones en espacios vectoriales
 - Combinaciones lineales
 - Bases
 - Teorema de la mejor aproximación
- 3 Espacios de señal
- 4 Otras clasificaciones de señales
- 5 Parámetros de interés de una señal



¿Por qué estudiar espacios de señal?

- Para poder entender en detalle la teoría de transformadas, es necesario conocer que son los **espacios de señal**.
- Son tipos de **espacios vectoriales** y, por tanto, podremos aplicar todos los conceptos de espacios vectoriales.
- ¿Qué es un espacio vectorial?
 - Son conjuntos de elementos, denominados **vectores**, en los que se definen varias operaciones.
 - Al conjunto de elementos, denominado **espacio de partida**, lo denominaremos por $\mathcal{V}$.
 - Algunas de las operaciones requieren también un **cuerpo**, que denotaremos por $\mathcal{K}$. A sus elementos se les denomina **escalares**.
 - El espacio vectorial resultante se denomina espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathcal{K}$ de escalares, y se denota por $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$.



Espacios vectoriales

Operaciones necesarias para definir un espacio vectorial:

- **Operación interna** (suma):

$$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

dicha operación debe cumplir las propiedades conmutativa, asociativa, de elemento neutro $\vec{0}$ y elemento opuesto $-\vec{a}$.

- **Operación externa** con respecto al cuerpo de escalares (producto con un escalar):

$$\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

$$(\alpha, \vec{a}) \mapsto \vec{b} = \alpha \vec{a}$$

dicha operación debe cumplir las propiedades asociativa, existencia de elemento neutro, distributiva respecto de la suma de escalares y distributiva respecto de la suma de vectores.



Espacios vectoriales

- Ya podemos intuir que dichas operaciones se pueden realizar con funciones/señales, lo que nos permitirá utilizar la estructura de espacio vectorial, donde los espacios vectores serán funciones/señales.

$$\vec{a} \equiv f(x) \text{ ó } \vec{a} \equiv x(n)$$



Definiciones de interés en espacios vectoriales

Sobre un espacio vectorial se pueden definir diversas operaciones adicionales:

- Norma.
- Distancia.
- Producto escalar.

En general, asumiremos que el cuerpo de los escalares es el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o el de los números complejos $\mathbb{C}$.



Definiciones de interés en espacios vectoriales

Norma: permite medir el tamaño de los elementos del espacio vectorial.

$$\begin{aligned}\|\cdot\| : \mathcal{V}_{\mathcal{K}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{a} &\mapsto \alpha = \|\vec{a}\|\end{aligned}$$

Esta operación debe cumplir las siguientes propiedades:

- $\|\vec{a}\| \geq 0$ y $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
- $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ (desigualdad triangular)
- $\|\alpha \vec{a}\| = |\alpha| \|\vec{a}\|$, con $\alpha \in \mathcal{K}$.



Definiciones de interés en espacios vectoriales

Métrica: regla que nos permite medir “distancias” entre dos elementos. Como consecuencia, nos permite diferenciar entre dos elementos del conjunto.

$$\begin{aligned}d : \mathcal{V}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{V}_{\mathcal{K}} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{a}, \vec{b}) &\mapsto \alpha = d(\vec{a}, \vec{b})\end{aligned}$$

Esta operación debe cumplir las siguientes propiedades:

- $d(\vec{a}, \vec{b}) \geq 0$
- $d(\vec{a}, \vec{b}) = d(\vec{b}, \vec{a})$
- $d(\vec{a}, \vec{a}) = 0$

Es habitual definir la denominada métrica natural o **métrica inducida por la norma** como:

$$d(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a} - \vec{b}\|$$



Producto escalar - Definición

- Una posible operación adicional, de especial interés, es el **producto escalar**:

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V}_{\mathcal{K}} \times \mathcal{V}_{\mathcal{K}} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\vec{a}, \vec{b}) &\mapsto \alpha = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle\end{aligned}$$

- Esta operación debe cumplir las siguientes propiedades:
 - Linealidad por la izquierda: $\langle \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}, \vec{c} \rangle = \alpha \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \beta \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$
 - Linealidad conjugada por la derecha:
 $\langle \vec{a}, \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} \rangle = \beta^* \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \gamma^* \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$
 - Hermiticidad: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle^*$
 - Definida positiva: $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0$, y $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$



Producto escalar - Consideraciones

- A partir del producto escalar, se puede construir una **norma inducida por el producto escalar**:

$$\|\vec{a}\| = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle^{\frac{1}{2}}$$

a menos que se especifique lo contrario, usaremos esta norma y su distancia asociada.

- Un espacio vectorial, dotado de producto escalar se denomina **espacio prehilbert**.
- Al escalar $\alpha = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ se le denomina **proyección** de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.
 - “Mide cuanto” de $\vec{a}$ hay en $\vec{b}$.
 - Si dicha proyección es 0, se dice que los vectores son **ortogonales**, $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Combinaciones lineales

- Definidas las operaciones de suma y producto con un escalar, podemos definir el concepto de **combinación lineal**.

$$\{\vec{a}_m\}_M \Rightarrow \sum_{m=1}^M \alpha_m \vec{a}_m = \vec{b} \in \mathcal{V}_K$$

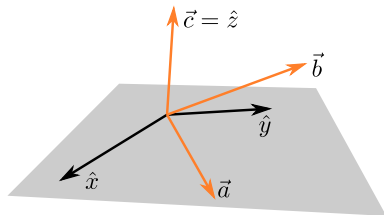
- Diremos que un conjunto de M vectores $\{\vec{a}_m\}_M$ es **linealmente independiente** si:

$$\{\vec{a}_m\}_M \text{ linealmente independientes} \Rightarrow \sum_{m=1}^M \alpha_m \vec{a}_m = \vec{0} \text{ sii } \alpha_m = 0 \forall m$$

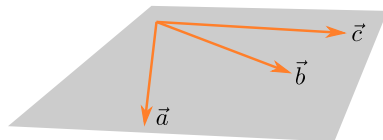
es decir, un elemento no se puede expresar como una combinación lineal del resto.



Independencia lineal



Independencia lineal en $\mathbb{R}^3$



Dependencia lineal en $\mathbb{R}^3$



Bases de espacios vectoriales - I

- Un conjunto de M vectores $\{\vec{e}_m\}_M$ del espacio vectorial $\mathcal{V}_K$ es una base del mismo si:
 - Los vectores $\{\vec{e}_m\}_M$ son linealmente independientes.
 - Cualquier elemento del espacio vectorial es una combinación lineal de la base

$$\forall \vec{a} \in \mathcal{V}_K, \exists \{\alpha_m\}_M \text{ t.q. } \vec{a} = \sum_{m=1}^M \alpha_m \vec{e}_m$$

- Se denomina **dimensión** de un **espacio vectorial** al número de elementos de la base:
 - Inicialmente asumiremos que esta dimensión es **finita**, y posteriormente generalizaremos el concepto a espacios vectoriales de dimensión **infinita**.



Bases de espacios vectoriales - II

- Si los elementos de la base $\{\vec{e}_m\}_M$ son ortogonales, se dice que la base es **ortogonal**.
 - Si, además, $\|\vec{e}_m\| = 1$, se dice que la base es **ortonormal**, donde se ha asumido la norma inducida por el producto escalar.
- Si trabajamos con una base ortogonal, los coeficientes de cualquier combinación lineal (coordenadas) pueden calcularse como:

$$\vec{a} = \sum_{m=1}^M \alpha_m \vec{e}_m, \text{ con } \alpha_m = \frac{1}{\|\vec{e}_m\|^2} \langle \vec{a}, \vec{e}_m \rangle$$

- A menos que se especifique lo contrario, de aquí en adelante se asumirá la norma inducida por el producto escalar.



Espacios vectoriales de dimensión infinita

- Si el número de elementos de la base es infinito, se dirá que el espacio vectorial es de **dimensión infinita**
- En estos casos, si la base es **numerable**, se notará por $\{\vec{e}_m\}_M \rightarrow \{\vec{e}_m\}$ y las combinaciones lineales vendrán dadas por:

$$\{\vec{e}_m\} \text{ ortogonal} \rightarrow \vec{a} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \vec{e}_m, \text{ con } \alpha_m = \frac{1}{\|\vec{e}_m\|^2} \langle \vec{a}, \vec{e}_m \rangle$$

si bien la convergencia no está garantizada (ver siguiente transparencia).

- Si la base es **no numerable**, se pueden generalizar la mayor parte de conceptos, aunque en estos casos ya no se podrán representar combinaciones lineales mediante series:

$$\{\vec{e}_\xi\} \text{ ortogonal} \rightarrow \vec{a} = \mathbf{CL} [\alpha_\xi \vec{e}_\xi], \text{ con } \alpha_\xi = \frac{1}{\|\vec{e}_\xi\|^2} \langle \vec{a}, \vec{e}_\xi \rangle,$$

siendo **CL** un operador que represente de alguna forma la combinación lineal de todos los elementos de la base y ξ algún tipo de índice sin definir.

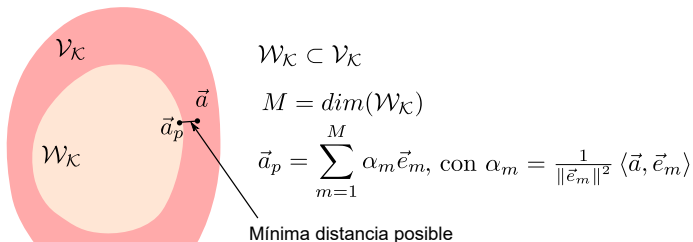


El Teorema de la Mejor Aproximación

- Sea $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ un espacio de señal, $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$ un subespacio de $\mathcal{V}_{\mathcal{K}}$, y $\{\vec{e}_m\}$ una base ortogonal de $\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$. La mejor aproximación, en términos de la distancia inducida por la norma natural, para $\vec{a} \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}}$ como $\vec{a}_p = \sum_m \alpha_m \vec{e}_m \in \mathcal{W}_{\mathcal{K}}$ se obtienen sii:

$$\alpha_m = \frac{1}{\|\vec{e}_m\|^2} \langle \vec{a}, \vec{e}_m \rangle$$

- Es importante observar que el coeficiente α_m no depende del resto de α_n . De este modo, estos coeficientes siguen siendo válidos si se añaden o quitan elementos de la base $\{\vec{e}_m\}$.
- La prueba a este teorema se encuentra en los apéndices.



Índice

- 1 Introducción
- 2 Espacios Vectoriales
- 3 Espacios de señal**
 - Bases y combinaciones lineales
 - Ejemplos
 - Espacios de señal de interés
- 4 Otras clasificaciones de señales
- 5 Parámetros de interés de una señal
- 6 Operaciones básicas con señales



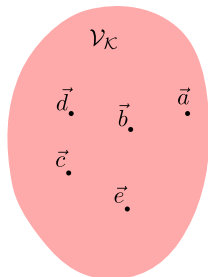
Espacios de señales

- Puesto que la **suma** de funciones se puede realizar elemento a elemento $b(\tau) = a_1(\tau) + a_2(\tau)$ y el **producto con un escalar** cualquiera también $b(\tau) = \alpha a(\tau)$, se pueden formar también espacios vectoriales mediante conjuntos de funciones.

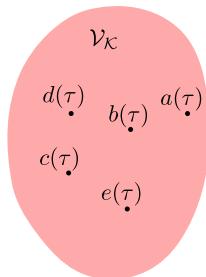
$$\vec{a} \equiv a(\tau)$$

- Dichos espacios, denominados **espacios de señales**, podrán ser extendidos con productos escalares, normas y distancias.

Espacio vectorial



Espacio de señales



==



Combinaciones lineales en espacios de señales

- Se pueden diferenciar tres casos de combinaciones lineales en función de la naturaleza del espacio de señal.

Dimensión finita	Dimensión infinita y base numerable	Dimensión infinita y base no numerable
$\{e_m(\tau)\}_M$ ortogonal $a(\tau) = \sum_{m=1}^M \alpha_m e_m(\tau)$ $\alpha_m = \frac{1}{\ e_m(\tau)\ ^2} \langle a(\tau), e_m(\tau) \rangle$	$\{e_m(\tau)\}$ ortogonal $a(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e_m(\tau)$ $\alpha_m = \frac{1}{\ e_m(\tau)\ ^2} \langle a(\tau), e_m(\tau) \rangle$	$\{e_\xi(\tau)\} = \{e(\tau; \xi)\}$ ortogonal $a(\tau) = \int_{\xi} \alpha(\xi) e(\tau; \xi) d\xi$ $\alpha(\xi) = \frac{1}{\ \tilde{e}(\tau; \xi)\ ^2} \langle a(\tau), e(\tau; \xi) \rangle$

- Aún nos faltaría definir el producto escalar.



Ejemplos de espacios de señal - I

Series de Taylor como funciones base

Sabemos que cualquier función $f(x) \in \mathcal{C}^\infty$ se puede expandir como:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m x^m$$

Por tanto, los monomios x^m forman una base ya que es trivial comprobar que son linealmente independientes



Ejemplos de espacios de señal - II

Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev de primera especie se definen como:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Es posible demostrar que estos polinomios son una base ortonormal que permite expandir cualquier función continua y derivable a trozos, definida en el intervalo $[-1,1]$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T_n(x)$$

- En esta asignatura definiremos típicamente los espacios de señales, y su álgebra correspondiente, en función de si son de variable continua o discreta y de si las señales son periódicas o no.



Ejemplos de espacios de señal - III

Ejercicio

Calcule una base para las señales de variable discreta definidas en el intervalo $-3 \leq n \leq 3$

¿Cuál es la dimensión del espacio?



Señales aperiódicas de variable continua

- En esta asignatura nos centraremos en **4 espacios de señal**, cada uno de ellos con su propio álgebra.
- Señales, en general complejas, **aperiódicas de variable continua** definidas en el intervalo $(-\infty, \infty)$
- Se denotan por $S(-\infty, \infty)$ o $S(\mathbb{R})$ y, por tanto, la variable independiente es real.
- Producto escalar:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx$$



Señales periódicas de VC - I

- El segundo espacio de señal de interés lo forman las **señales periódicas de variable continua**.

Definición de señal periódica de VC

Una señal de variable continua es periódica cuando sus características se repiten de forma continuada cada cierto valor de la variable independiente.

Al menor de dichos valores de repetición se le denomina **periodo fundamental** y, en VC, se denotará por X_0 .

$$f_0(x + X_0) = f_0(x), \forall x \text{ con } X_0 \in \mathbb{R}^+$$

Nótese que una señal de periodo X_0 también será una señal de periodo mX_0 , con $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.



Señales periódicas de VC - II

Ejercicio

Compruebe la validez de las operaciones internas y externas:

- 1 $g_0(x) = f_{0,1}(x) + f_{0,2}(x)$, con $f_{0,1}(x), f_{0,2}(x)$ de periodo X_0
- 2 $g_0(x) = \alpha f_0(x)$, con $f_0(x)$ de periodo X_0 y $\alpha \in \mathbb{C}$

A este espacio vectorial se le designará por $P(X_0)$.



Señales periódicas de VC - III

Ejercicio

Dada una señal $f_{0,1}(x)$ de periodo $X_{0,1}$ y otra $f_{0,2}(x)$ de periodo $X_{0,2}$:

- 1 ¿Bajo que condiciones la señal $g_0(x) = f_{0,1}(x) + f_{0,2}(x)$ será periódica?
- 2 Si los periodos fundamentales de las señales anteriores son $X_{0,1} = mX_0$ y $X_{0,2} = nX_0$, con $X_0 \in \mathbb{R}^+$ y $m, n \in \mathbb{N}^+$ ¿Cuál será el periodo fundamental g_0 ?



Señales periódicas de VC - III

Ejercicio

Dada una señal $f_{0,1}(x)$ de periodo $X_{0,1}$ y otra $f_{0,2}(x)$ de periodo $X_{0,2}$:

- ❶ ¿Bajo que condiciones la señal $g_0(x) = f_{0,1}(x) + f_{0,2}(x)$ será periódica?
- ❷ Si los periodos fundamentales de las señales anteriores son $X_{0,1} = mX_0$ y $X_{0,2} = nX_0$, con $X_0 \in \mathbb{R}^+$ y $m, n \in \mathbb{N}^+$ ¿Cuál será el periodo fundamental g_0 ?

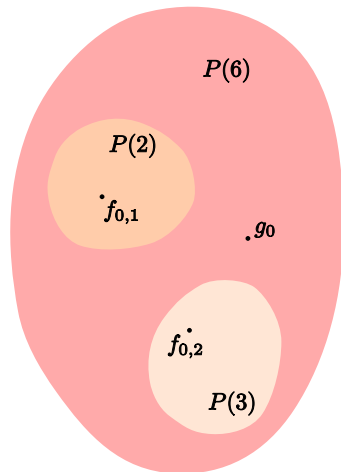
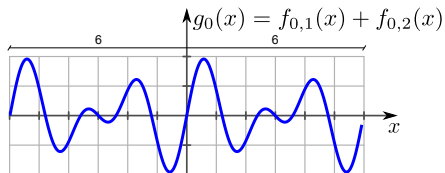
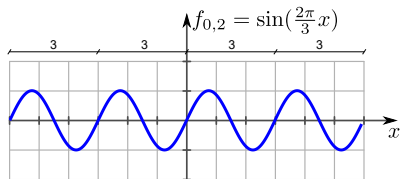
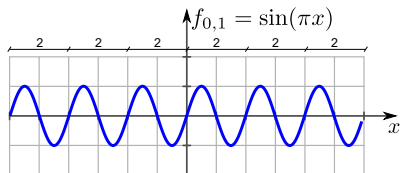
Solución

La señal $f_{0,1}(x)$ tendrá periodo $X_{0,1}$ pero también $2X_{0,1}$, $3X_{0,1}$, etc. Del mismo modo, la señal $f_{0,2}(x)$ tendrá periodo $X_{0,2}$, $2X_{0,2}$, $3X_{0,2}$, etc. por tanto, deben existir $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $pX_{0,1} = qX_{0,2}$.

Esta condición es equivalente a pedir que **la relación entre periodos sea un número racional** $\frac{X_{0,1}}{X_{0,2}} \in \mathbb{Q}$

En el apartado 2, el periodo fundamental de la señal suma será $\text{m.c.m.}(m, n)X_0$

Señales periódicas de VC - IV



Señales periódicas de VC - V

- De este modo, el segundo espacio de señal de interés lo forman las **señales periódicas de variable continua**, con periodo X_0 .
- Se denotan por $P(X_0)$ y están definidas en todo el eje real $(-\infty, \infty)$.
 - Producto escalar:

$$\langle f_0(x), g_0(x) \rangle = \int_{\langle X_0 \rangle} f_0(x) g_0^*(x) dx$$

- Nótese que $P(X_0) \subseteq P(mX_0)$, con $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.



Señales aperiódicas de VD

- Se definen de manera similar a las aperiódicas de variable continua.
- Se denotan por $D(\mathbb{Z})$ o $D(-\infty, \infty)$ y están definidas en todo el eje real $(-\infty, \infty)$.
 - Producto escalar:

$$\langle x(n), y(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)$$



Señales periódicas de VD - I

- Se definen de manera similar a las periódicas de variable continua.
 - Su estudio en profundidad se aplaza a temas posteriores.

Definición de señal periódica de VD

Una señal de es periódica cuando sus características se repiten con repiten de forma continuada cada cierto valor de la variable independiente.

Al menor de dichos valores de repetición se le denomina **periodo fundamental** y, en VD, se denotará por N_0 .

$$x_0(n + N_0) = x_0(n), \forall n \text{ con } N_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Nótese que una señal de periodo N_0 también será una señal de periodo mN_0 , con $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.



Señales periódicas de VD - II

- El espacio de **señales de VD periódicas** se denotará por $D(N_0)$.
- Se definen de manera similar a las periódicas de variable continua.
- En este caso, el producto escalar que se utilizará será:

$$\langle x_0(n), y_0(n) \rangle = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n) y_0^*(n)$$

- Nótese que, nuevamente, $D(N_0) \subseteq D(mN_0)$, con $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

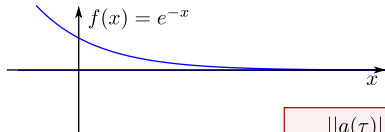


Cuadro resumen de espacios de señal

Variable continua

Señales aperiódicas

$$(S(\mathbb{R})) \quad \langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx$$



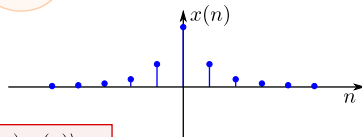
$$\|a(\tau)\|^2 = \langle a(\tau), a(\tau) \rangle$$

$$d(a(\tau), b(\tau)) = \|a(\tau) - b(\tau)\|$$

Variable Discreta

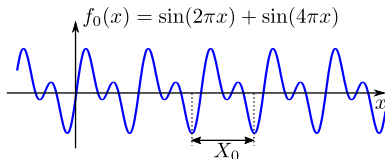
Señales aperiódicas

$$(D(\mathbb{Z})) \quad \langle x(n), y(n) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n)$$



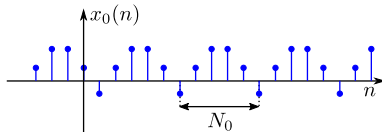
Señales periódicas

$$(P(X_0)) \quad \langle f_0(x), g_0(x) \rangle = \int_{\langle X_0 \rangle} f_0(x)g_0^*(x)dx$$



Señales periódicas

$$(D(N_0)) \quad \langle x_0(n), y_0(n) \rangle = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_0(n)y_0^*(n)$$



Distancia entre señales - Ejemplo

Ejercicio

Represente gráficamente las siguientes señales y calcule la distancia entre ellas:

$$f(x) = \sin x \quad g(x) = \begin{cases} 2 & x = 0 \\ \sin x & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Solución

La distancia entre dos señales que son iguales “**en casi todas partes**” (conjunto de medida cero, típicamente un conjunto de puntos aislados) es cero. Sin embargo, no son iguales a pesar de tener una distancia nula entre ellas.



Índice

- 1 Introducción
- 2 Espacios Vectoriales
- 3 Espacios de señal
- 4 Otras clasificaciones de señales**
 - Señales a derechas e izquierdas
 - Señales reales/imaginarias
 - Señales pares/impares
 - Señales hermíticas/antihermíticas
- 5 Parámetros de interés de una señal



Otras clasificaciones de señales

- Además de las clasificaciones vistas al principio del capítulo, existen otras muchas de especial importancia.
 - Señales a derechas, a izquierdas, de longitud finita y de longitud infinita.
 - Señales reales e imaginarias.
 - Señales pares e impares
 - Señales hermíticas y antihermíticas



Clasificaciones de señales según su dominio

- En función del **dominio de definición**, se pueden establecer las siguientes clasificaciones:

Señales finitas: son las definidas en un cierto intervalo continuo $[a, b]$ o discreto $[N_1, N_2]$.

Señales a derechas: definidas en el intervalo continuo $[a, \infty)$ o discreto $[N_1, \infty)$.

Señales a izquierdas: definidas en el intervalo continuo $(-\infty, b]$ o discreto $(-\infty, N_2]$.

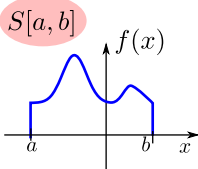
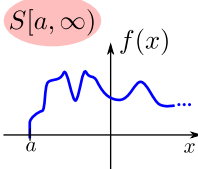
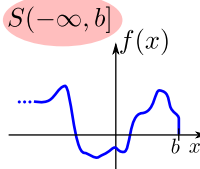
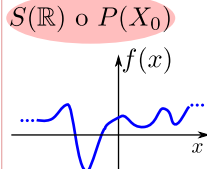
Señales indefinidas: definidas en todo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$.

- Nótese que los tres últimos tipos son de **extensión infinita**.
- Las definiciones anteriores se aplican con el mismo criterio usando como criterio el **soporte de la función** en lugar de su dominio de definición.

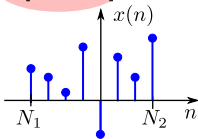
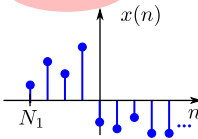
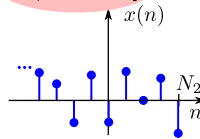
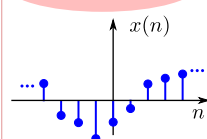


Clasificaciones de señales según su dominio

VC

Finitas**A derechas****A izquierdas****Indefinidas**

VD

 $D[N_1, N_2]$  $D[N_1, \infty)$  $D(-\infty, N_2]$  $D(\mathbb{Z})$ o $D(N_0)$ 

Señales reales e imaginarias

Señal real: una señal $a_r(\tau)$ es real si cumple la igualdad $a_r(\tau) = a_r^*(\tau)$. En estas señales, la parte imaginaria es cero.

Señal imaginaria: una señal $a_i(\tau)$ es imaginaria si cumple la igualdad $a_i(\tau) = -a_i^*(\tau)$. En estas señales, la parte real es cero.

Toda señal $a(\tau)$ puede descomponerse como suma de una señal real y una imaginaria:

$$a(\tau) = a_r(\tau) + a_i(\tau) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_r(\tau) = \frac{1}{2} [a(\tau) + a^*(\tau)] \\ a_i(\tau) = \frac{1}{2} [a(\tau) - a^*(\tau)] \end{array} \right\}$$

(ver demostración en el Apéndice E.1 del libro de Emilio)



Señales pares e impares

Señal par: una señal $a_e(\tau)$ es par si cumple la igualdad $a_e(\tau) = a_e(-\tau)$.

- Tienen pues simetría respecto al eje de ordenadas.

Señal impar: una señal $a_o(\tau)$ es impar si cumple la igualdad $a_o(\tau) = -a_o(-\tau)$.

- Tienen pues antisimetría respecto al eje de ordenadas

Toda señal $a(\tau)$ puede descomponerse como suma de una señal par e impar:

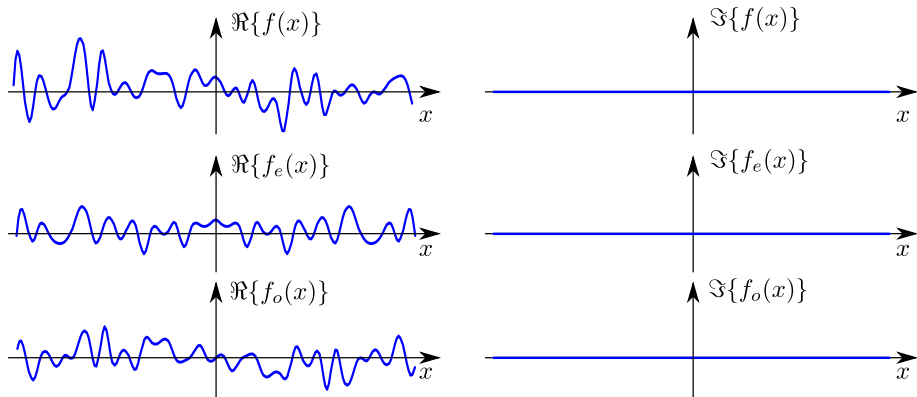
$$a(\tau) = a_e(\tau) + a_o(\tau) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_e(\tau) = \frac{1}{2} [a(\tau) + a(-\tau)] \\ a_o(\tau) = \frac{1}{2} [a(\tau) - a(-\tau)] \end{array} \right\}$$

(ver demostración en el Apéndice E.1 del libro de Emilio)



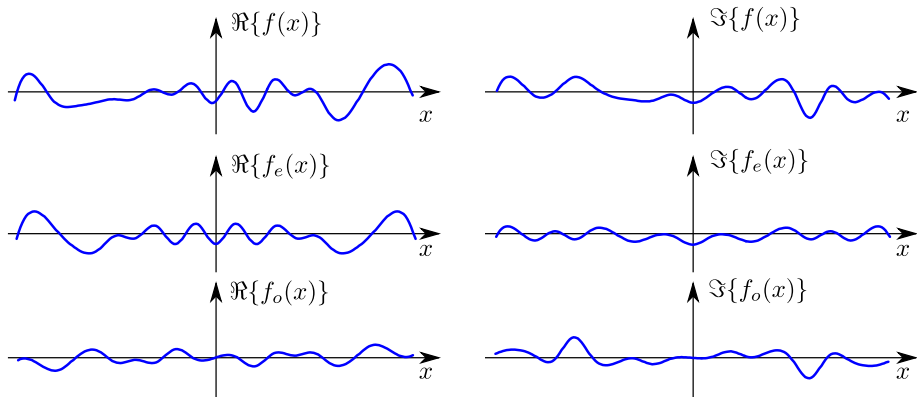
Señales pares e impares

Ejemplo de señal real descompuesta en parte par e impar.



Señales pares e impares

Ejemplo de señal compleja descompuesta en parte par e impar.



Señales pares e impares

Ejercicio

Demuestre que para una señal de variable continua, derivable y par, se cumple que $f'(0) = 0$.

Ejercicio

Demuestre que para una señal de variable continua e impar, se cumple que $f(0) = 0$.



Señales pares e impares

Ejercicio

Calcule y dibuje la parte par e impar de la señal de variable discreta:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$



Señales hermíticas y antihermíticas

Señales hermítica: una señal $a_h(\tau)$ es hermítica si $a_h(\tau) = a_h^*(-\tau)$.

- Consecuentemente su parte real es par y su parte imaginaria es impar.

Señales antihermítica: una señal $a_{ah}(\tau)$ es antihermítica si

$$a_{ah}(\tau) = -a_{ah}^*(-\tau).$$

- Consecuentemente su parte real es impar y su parte imaginaria es par.

Toda señal $a(\tau)$ puede descomponerse como suma de una señal hermítica y antihermítica:

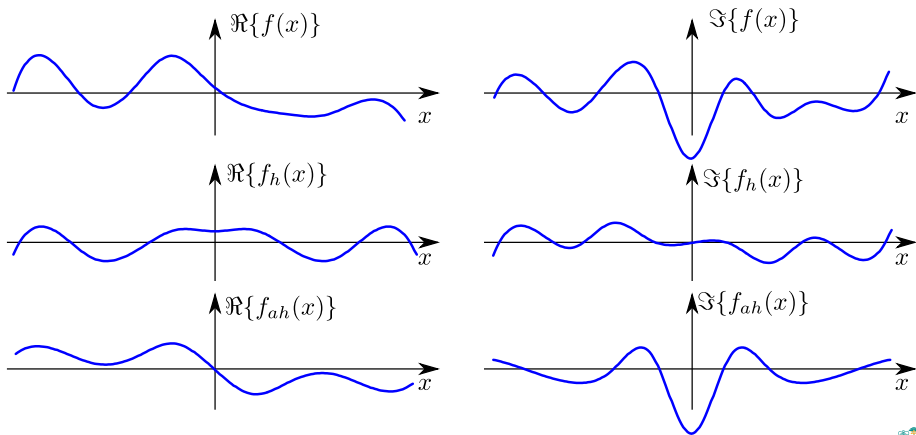
$$a(\tau) = a_h(\tau) + a_{ah}(\tau) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_h(\tau) = \frac{1}{2} [a(\tau) + a^*(-\tau)] \\ a_{ah}(\tau) = \frac{1}{2} [a(\tau) - a^*(-\tau)] \end{array} \right\}$$

(ver demostración en el Apéndice E.1 del libro de Emilio)



Señales hermíticas y antihermíticas

Descomposición de una señal compleja en sus partes hermítica y antihermítica.



Señales hermíticas y antihermíticas

Ejercicio

Demuestre que si se considera una señal **hermítica** $a_h(\tau)$, entonces **su módulo $|a_h(\tau)|$ es una señal par y su fase $\varphi_{a_h}(\tau)$ es una señal impar.**

Ejercicio

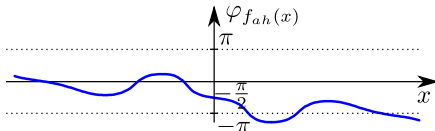
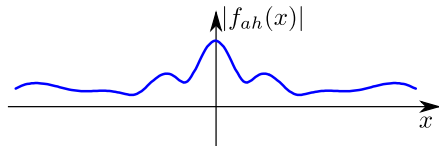
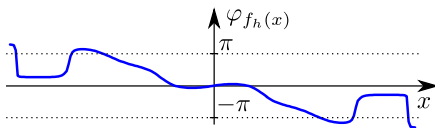
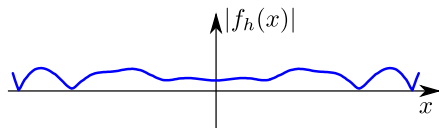
Demuestre que si se considera una señal **antihermítica** $a_{ah}(\tau)$, entonces **su módulo $|a_{ah}(\tau)|$ es una señal par y su fase $\varphi_{a_{ah}}(\tau)$ cumple la siguiente propiedad:**

$$\varphi_{a_{ah}}(\tau) = \pm\pi - \varphi_{a_{ah}}(-\tau).$$



Señales hermíticas y antihermíticas

Módulo y fase (desenrollada) de las señales hermítica y antihermítica del ejemplo anterior.



Señales hermíticas y antihermíticas

Ejercicio

Compruebe que para una señal antihermítica, sólo existen dos posibles valores para $\varphi_{ah}(0)$. ¿Cuáles son dichos valores?



Índice

- 1 Introducción
- 2 Espacios Vectoriales
- 3 Espacios de señal
- 4 Otras clasificaciones de señales
- 5 Parámetros de interés de una señal**
- 6 Operaciones básicas con señales
- 7 Apéndices



Parámetros de interés de una señal

- Además del periodo de una señal, existen otra serie de parámetros que son de importancia. Entre ellos:
 - Valor medio, $\langle a(\tau) \rangle$
 - Potencia instantánea $p_a(\tau) = \mathbf{P}[a(\tau)]$
 - Energía, $E[a(\tau)]$
 - Potencia media, $\langle \mathbf{P}[a(\tau)] \rangle$

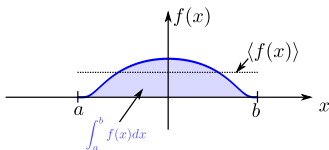


Valor medio de una señal

Longitud finita

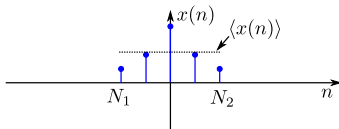
Variable continua

$$S(a, b) \quad \langle f(x) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



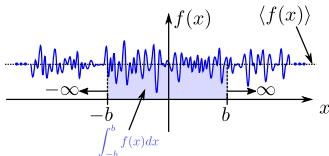
Variable Discreta

$$D[N_1, N_2] \quad \langle x(n) \rangle = \frac{1}{N_2 - N_1 + 1} \sum_{n=N_1}^{N_2} x(n)$$

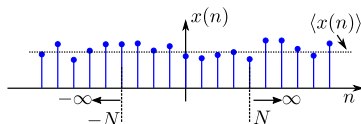


Longitud infinita

$$S(\mathbb{R}) \quad \langle f(x) \rangle = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2b} \int_{-b}^b f(x) dx$$



$$D(\mathbb{Z}) \quad \langle x(n) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)$$



Valor medio de una señal

- En el caso de **señales periódicas** y, por tanto, de duración infinita, **la definición anterior sigue siendo válida** pero se puede simplificar ya que es sencillo demostrar que:

$$\langle f_0(x) \rangle = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2b} \int_{-b}^b f_0(x) dx = \frac{1}{X_0} \int_{\langle X_0 \rangle} f_0(x) dx$$

$$\langle x_0(n) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n) = \frac{1}{N_0} \sum_{\langle N_0 \rangle} x_0(n)$$

- También es trivial demostrar que para señales complejas:

$$\langle a(\tau) \rangle = \Re \{ \langle a(\tau) \rangle \} + j \Im \{ \langle a(\tau) \rangle \} \in \mathbb{C}$$

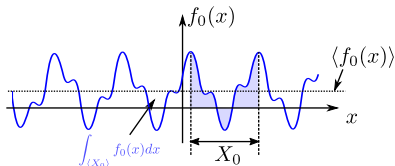


Valor medio de una señal

Longitud infinita

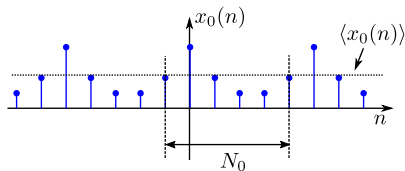
Variable continua

$$P(X_0) \quad \langle f_0(x) \rangle = \frac{1}{X_0} \int_{\langle X_0 \rangle} f_0(x) dx$$



Variable Discreta

$$D(N_0) \quad \langle x_0(n) \rangle = \frac{1}{N_0} \sum_{\langle N_0 \rangle} x_0(n)$$



Valor medio de una señal

Ejercicio

Calcule el valor medio de la siguiente señal compleja:

$$f(x) = |\sin(2\pi x)| + j |\cos(4\pi x)|$$



Potencia y energía de una señal -VC

- La mayoría de sistemas físicos responden a la **energía** de la señal más que a su forma de onda.
- La **potencia** es la energía por unidad de tiempo.
- En el caso de variable continua:

Magnitud	Longitud finita	Longitud infinita
Potencia instantánea	$\mathbf{P}[f(x)] = f(x) ^2 = f(x)f^*(x)$	
Energía	$E[f(x)] = \int_a^b \mathbf{P}[f(x)] dx$	$E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}[f(x)] dx$
Potencia media	$\langle \mathbf{P}[f(x)] \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b \mathbf{P}[f(x)] dx$	$\langle \mathbf{P}[f(x)] \rangle = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2b} \int_b^b \mathbf{P}[f(x)] dx$



Potencia y energía de una señal - VD

- En el caso de **variable discreta**, la formulación es análoga:

Magnitud	Longitud finita	Longitud infinita
Potencia instantánea	$\mathbf{P}[x(n)] = x(n) ^2 = x(n)x^*(n)$	
Energía	$E[x(n)] = \sum_{n=N_1}^{N_2} \mathbf{P}[x(n)]$	$E[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}[x(n)]$
Potencia media	$\langle \mathbf{P}[x(n)] \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=N_1}^{N_2} \mathbf{P}[x(n)]$ $N = N_2 - N_1 + 1$	$\langle \mathbf{P}[x(n)] \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \mathbf{P}[x(n)]$



Potencia y energía de señales periódicas

- De manera análoga a lo que ocurría antes, las expresiones para la potencia media se pueden simplificar para el caso de señales periódicas:

$$\langle \mathbf{P}[f_0(x)] \rangle = \frac{1}{X_0} \int_{\langle X_0 \rangle} |f(x)|^2 dx$$

$$\langle \mathbf{P}[x(n)] \rangle = \frac{1}{N_0} \sum_{\langle N_0 \rangle} |x(n)|^2$$

- Según las definiciones anteriores, una señal periódica tendrá una energía infinita.
 - Se puede no obstante definir la **energía por periodo**:

$$E_0[f_0(x)] = \int_{\langle X_0 \rangle} |f(x)|^2 dx \quad E_0[x_0(n)] = \sum_{\langle N_0 \rangle} |x(n)|^2.$$

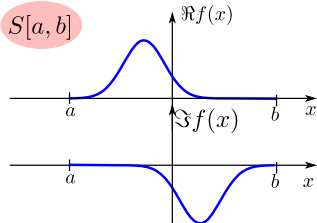
- Nota:** Esta definición es diferente a la que viene en las tablas y el libro de Emilio.



Potencia y energía de señales periódicas

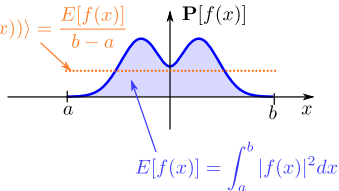
Variable continua

Longitud finita

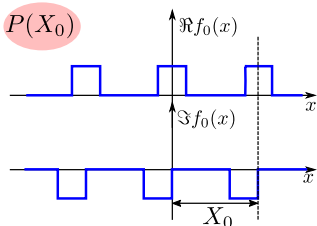


$$P[f(x)] = |f(x)|^2 = |\Re f(x)|^2 + |\Im f(x)|^2$$

$$\langle P(f(x)) \rangle = \frac{E[f(x)]}{b-a}$$

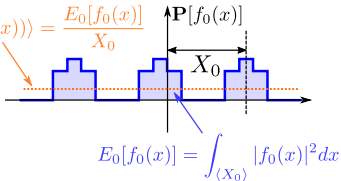


Longitud infinita



$$P[f(x)] = |f_0(x)|^2 = |\Re f_0(x)|^2 + |\Im f_0(x)|^2$$

$$\langle P(f_0(x)) \rangle = \frac{E_0[f_0(x)]}{X_0}$$



Índice

- 1 Introducción
- 2 Espacios Vectoriales
- 3 Espacios de señal
- 4 Otras clasificaciones de señales
- 5 Parámetros de interés de una señal
- 6 Operaciones básicas con señales**
- 7 Apéndices



Operaciones básicas con señales

- Como hemos visto, las operaciones se **suma** y **producto** se realizan de la manera usual, es decir, punto a punto:

$$s(\tau) = a(\tau) + b(\tau) \quad p(\tau) = a(\tau)b(\tau)$$

- Por otro lado, la operación de producto con un escalar también se realiza punto a punto:

$$b(\tau) = Aa(\tau) \text{ con } A = |A|e^{j\varphi_A}$$

- Esta operación se analiza mejor en módulo y fase:

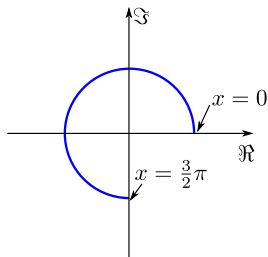
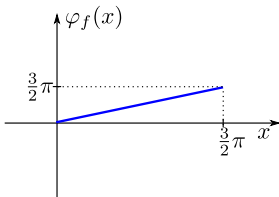
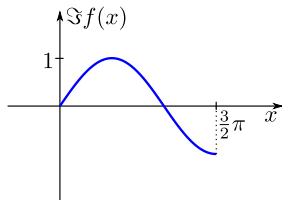
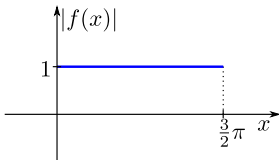
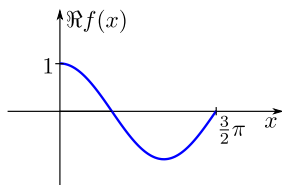
$$|b(\tau)| = |A||a(\tau)| \quad \varphi_b(\tau) = \varphi_a(\tau) + \varphi_A$$

por tanto, la señal será amplificada ($|A| > 1$) o atenuada ($|A| < 1$) además de rotada en el plano complejo.



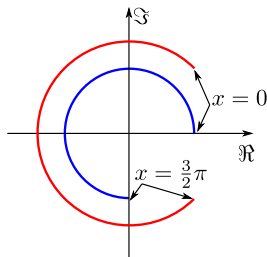
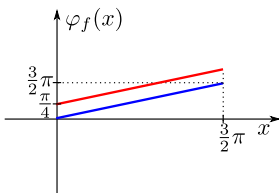
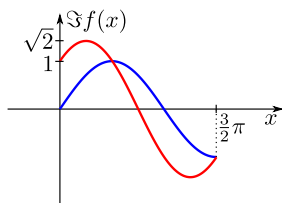
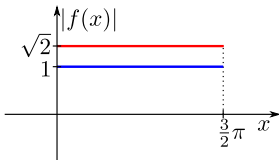
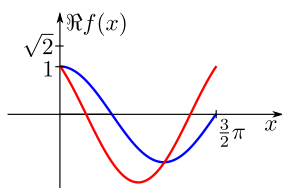
Producto con un escalar

$$f(x) = e^{jx} \text{ con } 0 < x < \frac{3}{2}\pi$$



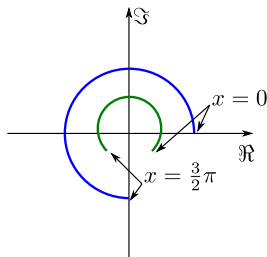
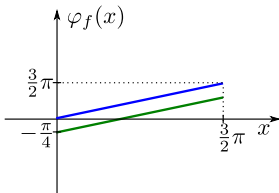
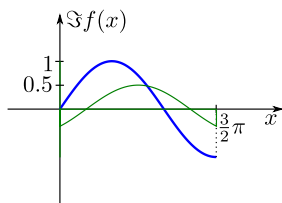
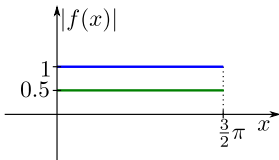
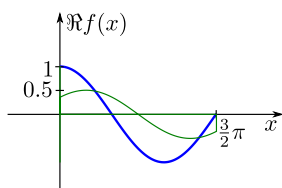
Producto con un escalar

$$g(x) = Af(x) \text{ con } 0 < x < \frac{3}{2}\pi, A = 1 + j = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$



Producto con un escalar

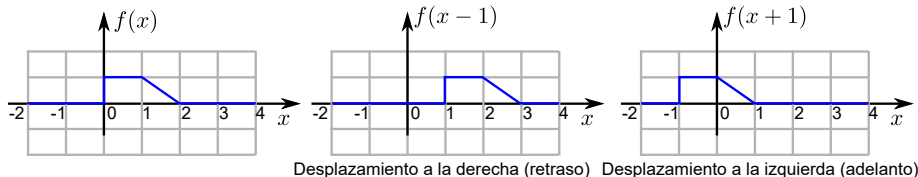
$$g(x) = Af(x) \text{ con } 0 < x < \frac{3}{2}\pi, A = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j) = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$



Desplazamiento

- Desplazamientos:

$$a(\tau) \rightarrow b(\tau) = a(\tau - \tau_0)$$



- Si la variable independiente es el tiempo $x \equiv t$, los desplazamientos a la derecha ($t_0 > 0$) se corresponden con **retrasos** y los desplazamientos a la izquierda ($t_0 < 0$) con **adelantamientos**.

$$t_0 > 0 \Rightarrow \text{retraso}$$

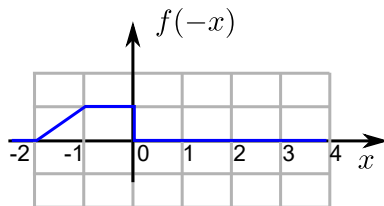
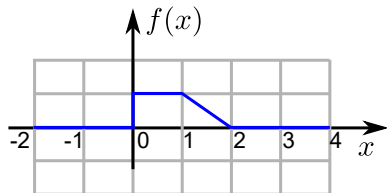
$$t_0 < 0 \Rightarrow \text{adelanto}$$



Abatimientos

- Los **abatimientos** o **reflexiones** son operaciones de **simetría** con respecto al eje de ordenadas:

$$a(\tau) \rightarrow b(\tau) = a(-\tau)$$



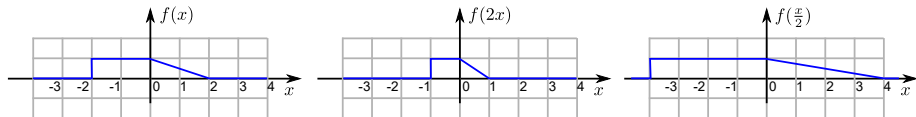
- En VD, la operación es idéntica.



Cambios de escala

- Escalado de la variable independiente
 - Aplazaremos el estudio de VD hasta el Tema 8.
- Para el caso de un escalado positivo:

$$f(x) \rightarrow g(x) = f(ax), a > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 1 & \text{Compresión} \\ a < 1 & \text{Expansión} \end{cases}$$



- Es también posible que $a < 0$, en este caso, la operación es idéntica pero combinada con una reflexión.



Operaciones combinadas

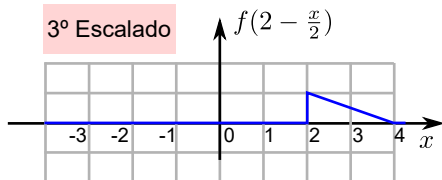
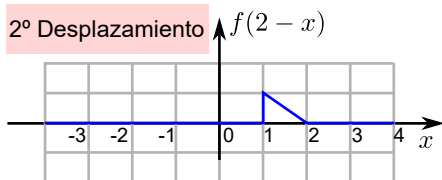
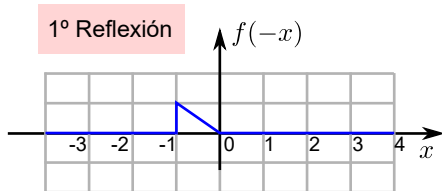
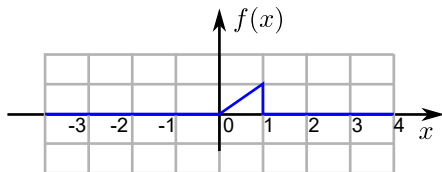
- Todas las operaciones anteriores pueden combinarse dando lugar a transformaciones de la variable independiente del tipo:

$$b(\tau) = a(\alpha\tau - \tau_0)$$

- Se sugiere el siguiente orden:
 - 1 Reflexión
 - 2 Desplazamiento
 - 3 Escalado
- El caso de VD se estudiará en temas posteriores.



Operaciones combinadas



Operaciones combinadas

- Recordemos que se ha aplazado para un estudio posterior:
 - Estudio de señales de variable discreta periódicas.
 - Operaciones básicas con señales de variable discreta, en particular, el escalado de la variable independiente n .



Índice

- 1 Introducción
- 2 Espacios Vectoriales
- 3 Espacios de señal
- 4 Otras clasificaciones de señales
- 5 Parámetros de interés de una señal
- 6 Operaciones básicas con señales
- 7 Apéndices**



Apéndices

Demostración del teorema de la mejor aproximación - I

Consideremos la aproximación dada por $\hat{a}(\tau) = \sum_m \alpha_m e_m(\tau)$, donde $\{e_m(\tau)\}$ es una base ortogonal. De este modo, la distancia (al cuadrado) será:

$$\begin{aligned} E^2 = d^2(a(\tau), \hat{a}(\tau)) &= \|a(\tau) - \hat{a}(\tau)\|^2 = \langle a(\tau) - \hat{a}(\tau), a(\tau) - \hat{a}(\tau) \rangle = \\ &= \|a(\tau)\|^2 + \|\hat{a}(\tau)\|^2 - \langle a(\tau), \hat{a}(\tau) \rangle - \langle \hat{a}(\tau), a(\tau) \rangle = \\ &= \|a(\tau)\|^2 + \sum_m |\alpha_m|^2 \|e_m(\tau)\|^2 - \sum_m \alpha_m^* \langle a(\tau), e_m(\tau) \rangle - \sum_m \alpha_m \langle e_m(\tau), a(\tau) \rangle \end{aligned}$$

Para encontrar el valor óptimo de $\alpha_m = \alpha_{rm} + j\alpha_{im}$, las dos siguientes ecuaciones deben resolverse de manera simultánea:

$$\frac{\partial E^2}{\partial \alpha_{rm}} = 0 \quad \frac{\partial E^2}{\partial \alpha_{im}} = 0$$

(cont.)



Demostración del teorema de la mejor aproximación - II

Teniendo en cuenta que $|\alpha_m|^2 = \alpha_{rm}^2 + \alpha_{im}^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E^2}{\partial \alpha_{rm}} &= 2\alpha_{rm} \|e_m(\tau)\|^2 - \langle a(\tau), e_m(\tau) \rangle - \langle e_m(\tau), a(\tau) \rangle = \\ &= 2\alpha_{rm} \|e_m(\tau)\|^2 - 2\Re \langle a(\tau), e_m(\tau) \rangle = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E^2}{\partial \alpha_{im}} &= 2\alpha_{im} \|e_m(\tau)\|^2 + j \langle a(\tau), e_m(\tau) \rangle - j \langle e_m(\tau), a(\tau) \rangle = \\ &= 2\alpha_{im} \|e_m(\tau)\|^2 - 2\Im \langle a(\tau), e_m(\tau) \rangle = 0\end{aligned}$$

y, consecuentemente,

$$\alpha_{rm} = \frac{1}{\|e_m(\tau)\|^2} \Re \langle a(\tau), e_m(\tau) \rangle \quad \alpha_{im} = \frac{1}{\|e_m(\tau)\|^2} \Im \langle a(\tau), e_m(\tau) \rangle$$

de este modo,

$$\boxed{\alpha_m = \frac{1}{\|e_m(\tau)\|^2} \langle a(\tau), e_m(\tau) \rangle \text{ (c.q.d.)}}$$



Espacios de señales aperiódicas de variable continua

- A lo largo de la asignatura habrá varios espacios de señal que jugarán un papel clave en la definición de ciertas transformaciones y operaciones.
- El espacio más genérico será $S(\mathbb{R})$ que incluye a todas las funciones de variable continua con soporte en $\mathbb{R}$.
- $L^p(\mathbb{R})$ es el espacio de señal de las funciones con soporte en $\mathbb{R}$ y norma- p finita:

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$f(x) \in L^p(\mathbb{R}) \iff \|f(x)\|_p < +\infty$$

- Un caso relevante es la norma- ∞ :

$$\|f(x)\|_{\infty} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f(x)\|_p = \inf \{ C \geq 0 : |f(x)| \leq C, \text{ para casi todo } x \}$$



Espacios de señales aperiódicas de variable continua

- Dos espacios de señal de particular interés son el espacio de las **señales absolutamente integrables** $L^1(\mathbb{R})$ y el espacio de las **señales cuadrado integrables** $L^2(\mathbb{R})$

$$f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \iff \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

$$f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \iff \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$$

- Es importante observar que ni $L^1(\mathbb{R})$ es un subespacio de $L^2(\mathbb{R})$ ni $L^2(\mathbb{R})$ es un subespacio de $L^1(\mathbb{R})$.



Espacios de señales periódicas de variable continua

- Dentro de los espacios de señal de variable continua, serán de especial interés los espacios de señales periódicas, con periodo X_0 como $L_p(X_0)$.
- En este caso, también se definen espacios de **señales de periodo X_0 absolutamente integrables**:

$$L_p^1(X_0) = \left\{ f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } f_0 \text{ tiene periodo } X_0 \text{ y } \int_{\langle X_0 \rangle} |f(x)| dx < +\infty \right\}.$$

- Y también se define, también se definen espacios de **señales de periodo X_0 cuadrado integrables**:

$$L_p^2(X_0) = \left\{ f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } f_0 \text{ tiene periodo } X_0 \text{ y } \int_{\langle X_0 \rangle} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

- En este caso, puesto que el estudio se reduce a un dominio acotado $L_p^2(X_0) \subset L_p^1(X_0)$.



Espacios de señales de variable continua de interés para distribuciones

- Cuando se realice el estudio de distribuciones, será de interés ciertos subespacios de $L^1(\mathbb{R})$.
- El **espacio de funciones de Schwarz** $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ está formado por las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que:
 - Son infinitamente diferenciables, es decir, pertenecen a $C^\infty(\mathbb{R})$
 - Ella y todas sus derivadas son de rápido decrecimiento.
- Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es de rápido decrecimiento si decae más rápido que cualquier polinomio:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^p f(x)| = 0, \forall p \in \mathbb{N}$$

- El espacio de funciones de test $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ incluye todas las funciones infinitamente diferenciables que se desvanecen fuera de un intervalo acotado.

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \text{ soporte}(\varphi) \text{ está acotado}\}$$



Espacios de señales aperiódicas de variable discreta

- En el caso de variable discreta, existen espacios de señales análogos a los anteriores.
- En particular se definen los espacios de señales de **funciones absolutamente sumables y cuadrado integrables** como:

$$\ell^1(\mathbb{Z}) = \left\{ x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } x, \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < +\infty \right\},$$

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \text{ tal que } x, \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < +\infty \right\}.$$

- En la mayoría de textos, se asume que una función de variable discreta está acotada por lo que $\ell^2(\mathbb{Z}) \subset \ell^1(\mathbb{Z})$.
- También se pueden definir el espacios de funciones periódicas, $\ell_p(X_0)$:
 - Puesto que el intervalo es de duración finita y la secuencia es acotada, cualquier suma de módulo, cuadrado u otra potencia siempre convergerá.

