

Capítulo 3.

Problemas de dos partículas con solución analítica.

En mecánica cuántica, lo mismo que en mecánica clásica, la dinámica de un sistema de dos partículas que se atraen o repelen mutuamente se puede reducir a la suma de dos problemas independientes de una partícula. Por una parte, el sistema se desplaza solidariamente como si toda la masa estuviera concentrada en un sólo punto: **el centro de masas**. Por otra parte el movimiento relativo de una partícula respecto de la otra, que se describe como la rotación y vibración de una masa ficticia sometida a un potencial de campo central. Lamentablemente, esta reducción a problemas de una partícula no se puede extender, en general, a los sistemas de tres o más cuerpos. Por lo tanto, el átomo hidrogenoide será el primero y último de los problemas de estructura electrónica para los que dispondremos de una solución analítica.

El problema de dos cuerpos en mecánica

clásica: Sean dos partículas de masa m_1 y m_2 , situadas en $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$, respecto de un sistema de referencia arbitrario. También podemos describir el sistema empleando la posición del **centro de masas** (CM) y la posición relativa:

$$\vec{R}_{\text{CM}} = \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (1)$$

donde $M = m_1 + m_2$. De aquí,

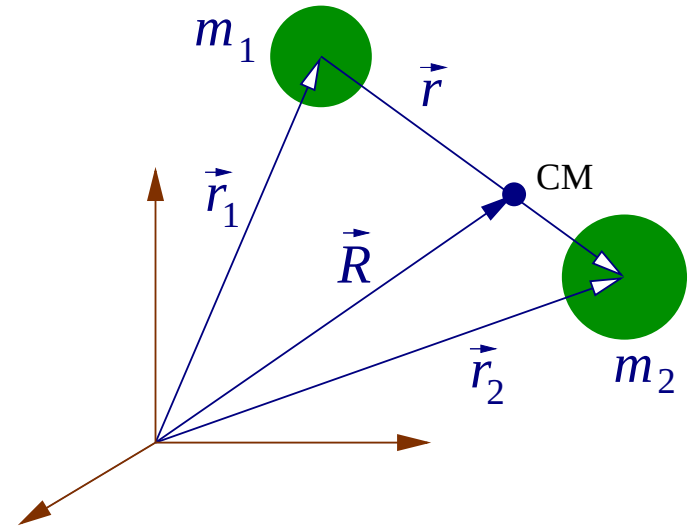
$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M} \vec{r}. \quad (2)$$

La energía cinética del sistema es igualmente simple empleando $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ o empleando $\vec{R}$ y $\vec{r}$:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2, \quad \Longleftrightarrow \quad T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu}, \quad (3)$$

donde $\vec{P} = M \dot{\vec{R}}$ y $\vec{p} = \mu \dot{\vec{r}}$ son momentos lineales. La **masa efectiva**, μ , es una propiedad del sistema que depende de la relación de masas de ambos cuerpos:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m_1 = m_2 & \Rightarrow \mu = m_1/2, \\ m_1 \gg m_2 & \Rightarrow \mu \approx m_2. \end{cases} \quad (4)$$



El problema de dos cuerpos en mecánica cuántica: Podemos transcribir la solución clásica sin más que transformar P^2 en $\hat{P}^2$ y p^2 en $\hat{p}^2$:

$$\hat{T} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{\hat{p}^2}{2\mu} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\vec{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\vec{r}}^2. \quad (5)$$

El movimiento del centro de masas corresponde a la traslación del sistema, y suele tratarse mediante un modelo sencillo, como el de la partícula en la caja. Más importante es el movimiento interno: habitualmente el potencial de interacción sólo depende de la distancia mutua entre las dos partículas y el Hamiltoniano del movimiento interno es

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\vec{r}}^2 + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + \frac{\hat{l}^2}{2\mu r^2} + V(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{l}^2}{2\mu r^2} + V(r). \quad (6)$$

El movimiento interno es, en este caso, un problema de campo central, ya que $[\hat{H}, \hat{l}^2] = [\hat{H}, \hat{l}_z] = [\hat{l}^2, \hat{l}_z] = 0$. La función de onda interna es separable en una parte radial y otra angular, $\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)Y(\vartheta, \varphi)$, de modo que:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + V(r) \right\} R(r) = ER(r), \quad (7)$$

$$\hat{l}^2 Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{l,m}, \quad \hat{l}_z Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = m\hbar Y_{l,m}, \quad (8)$$

donde $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$ son armónicos esféricos, $l = 0, 1, 2, \dots$ es el número cuántico angular, y $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$ el número cuántico azimutal.

El rotor rígido: Aunque no es la manera más correcta de abordarlo, vamos a aprovechar las ecuaciones anteriores para examinar el problema de dos masas que rotan libremente manteniendo una distancia relativa fija: $r = r_0 = \text{const.}$. En este caso no existe energía cinética asociada a la variación de r ni tampoco energía potencial y, por lo tanto, toda la energía es rotacional y la función de onda es un armónico esférico:

$$\hat{H}Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \frac{\hat{l}^2}{2\mu r_0^2} Y_{lm} = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} l(l+1) Y_{lm}. \quad (9)$$

La costumbre en este contexto es cambiar el nombre de l por el de **número cuántico rotacional**, $J = 0, 1, 2, \dots$, y escribir la energía como

$$E_J = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} J(J+1) = hBJ(J+1), \quad \text{donde} \quad B = \frac{h}{8\pi^2 \mu r_0^2} [=] s^{-1} \quad (10)$$

y B es la **constante rotacional**. Puesto que sólo J y no m influye en la energía, los niveles del rotor rígido tienen una degeneración $g_J = 2J + 1$. La interacción con un fotón de frecuencia $h\nu = E_{J'} - E_J$ produce una transición entre los niveles $J \rightarrow J'$ sólo si $\Delta J = \pm 1$.

El rotor rígido sirve como modelo simple para el movimiento de los núcleos de una molécula diatómica bajo la influencia del campo eléctrico promedio creado por los electrones.

Unidades atómicas: Las ecuaciones mecanocuánticas relacionadas con la estructura electrónica se simplifican notablemente si trabajamos en un sistema de coordenadas en las que $\hbar$, e (la carga del electrón en valor absoluto), m_e (masa del electrón) y $4\pi\epsilon_0$ se toman como unidad. La tabla reproduce las principales unidades del sistema junto con su equivalencia en el sistema internacional:

Propiedad	unidad	equivalencia S.I.	nombre
Carga elemental	e	$1.602176462 \times 10^{-19} \text{ C}$	—
Masa	m_e	$9.10938188 \times 10^{-31} \text{ kg}$	—
Momento angular	$\hbar$	$1.054571596 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$	—
Constante eléctrica	$4\pi\epsilon_0$	$1.112650056 \times 10^{-10} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$	—
Longitud	$a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/m_e e^2$	$0.5291772083 \times 10^{-10} \text{ m}$	bohr
Energía	$E_h = e^2/4\pi\epsilon_0 a_0$	$4.35974381 \times 10^{-18} \text{ J}$	hartree

El sistema de unidades atómicas es coherente y homogéneo. Todos los cálculos se realizan consistentemente en unidades atómicas y los resultados finales se convierten a la unidad que sea necesaria. Para encontrar la unidad atómica de cualquier propiedad basta con combinar e , m_e , $\hbar$, $4\pi\epsilon_0$, a_0 o E_h apropiadamente hasta conseguir la magnitud deseada. Así, la unidad atómica de tiempo sería $\hbar/E_h$, equivalente a $2.418884324 \times 10^{-17} \text{ s}$.

Algunos físicos cuánticos prefieren como unidad de energía 1 rydberg = 1 Ry = $1/2$ hartree.

El átomo hidrogenoide: Se trata de un átomo o ion de número atómico Z (masa m_N y carga $+Ze$) que cuenta con un único electrón (masa m_e y carga $-e$). La interacción entre ambos está dominada por la fuerza de Coulomb, de modo que el hamiltoniano es

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 + \frac{\hat{l}^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}. \quad (11)$$

Se trata, por tanto, de un problema de campo central, y la función radial se obtendrá resolviendo

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \right\} R(r) = ER(r) \quad (12)$$

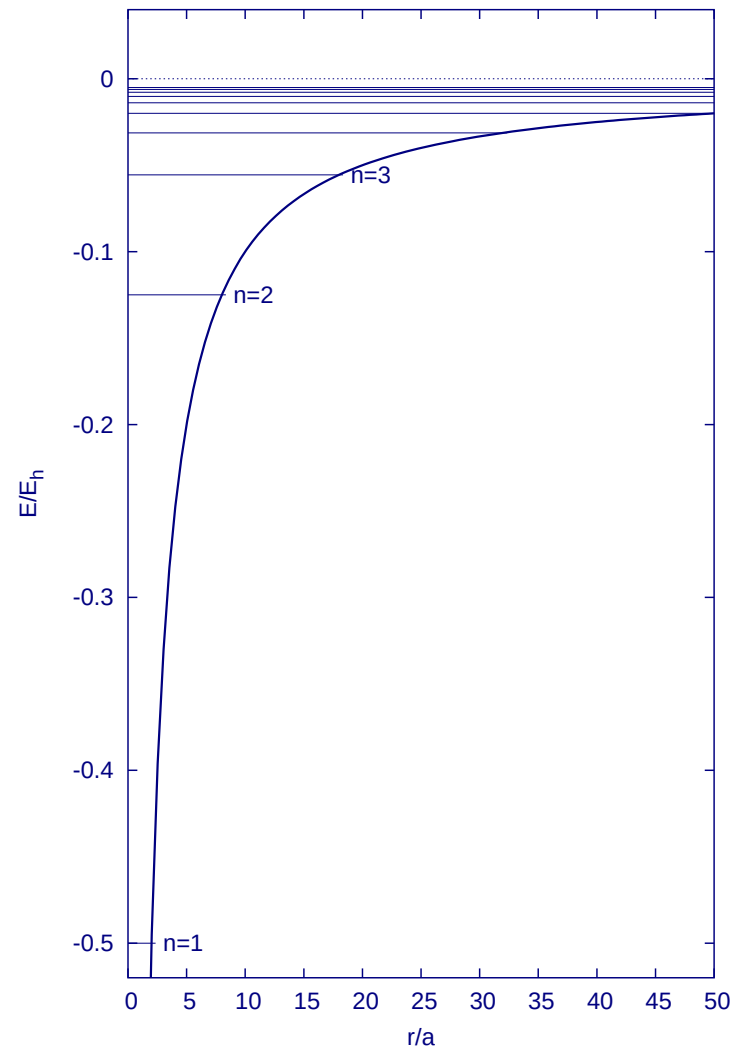
La resolución de esta ecuación sigue las técnicas que ya vimos en el problema del oscilador armónico y el momento angular. El resultado es que existen dos clases de soluciones: (a) un continuo de estados con $E > 0$, que representan un electrón dispersado por el núcleo, pero no ligado permanentemente a éste; y (b) un conjunto discreto, aunque infinito, de estados ligados con energía:

$$E_n = -\frac{Z^2}{2n^2} \left(\frac{\mu e'^4}{\hbar^2} \right) = -\frac{Z^2}{2n^2} \left(\frac{e'^2}{a} \right) = -\frac{Z^2}{2n^2} E'_h \quad \text{para } n = 1, 2, \dots, \quad (13)$$

donde $e' = e/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$, $a = \hbar^2/\mu e'^2$, y $E'_h = e'^2/a$. Debemos observar que, en el átomo de hidrógeno

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} = \frac{m_e}{1 + m_e/m_p} = \frac{m_e}{1 + 0.00544617} = 0.9994557 m_e, \quad (14)$$

y, por lo tanto, es aceptable el error que se comete al considerar $\mu \approx m_e$. Esta aproximación de **masa nuclear infinita** da lugar a que $a = a_0 \equiv 1$ bohr, y $E'_h = E_h \equiv 1$ hartree.



Estados ligados del átomo de hidrógeno:

- Sólo el número cuántico principal afecta a la energía, pero no l ni m .
- Hay ligaduras entre los valores posibles de los números cuánticos. Principal: $n = 1, 2, 3, \dots$. Angular: $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Azimutal: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.
- La degeneración asociada a lm es $\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$.
- Todas las transiciones $n_1 \rightarrow n_2$ están permitidas: $\bar{\nu}(n_1 \rightarrow n_2) = Z^2 R_H (1/n_2^2 - 1/n_1^2)$, donde $R_H = e'^2/2ach$ es la **constante de Rydberg**. Las transiciones con un n_1 común forman una **serie espectral**: Lyman ($n_1 = 1$), Balmer ($n_1 = 2$), Paschen ($n_1 = 3$), Brackett ($n_1 = 4$). Para el átomo de hidrógeno, en la aproximación de masa infinita $R_\infty = 109737.31568549(83) \text{ cm}^{-1}$, o $hcR_\infty = 13.60569172(53) \text{ eV} = 2.17987190(17) \times 10^{-18} \text{ J}$.

La función radial responde a la forma

$$R_{nl}(r) = - \left\{ \frac{4Z^3}{n^4 a^3} \frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3} \right\}^{1/2} \left(\frac{2Zr}{na} \right)^l \exp \left\{ -\frac{Zr}{na} \right\} L_{n+l}^{2l+1} \left(\frac{2Zr}{na} \right), \quad (15)$$

donde $L_q^s(\rho)$ es una **función asociada de Laguerre**, relacionada con los **polinomios de Laguerre**:

$$L_q^s(\rho) = \frac{d^s L_q(\rho)}{d\rho^s} \quad \text{siendo} \quad L_q(\rho) = e^\rho \frac{d^q}{d\rho^q} (e^{-\rho} \rho^q). \quad (16)$$

Una forma explícita de las funciones asociadas de Laguerre que nos interesan es:

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+l} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!} \rho^k. \quad (17)$$

Las funciones radiales satisfacen la condición de ortonormalización:

$$\int_0^\infty R_{nl}(r) R_{n'l}(r) r^2 dr = \delta_{n,n'}. \quad (18)$$

Las funciones de onda hidrogenoides reciben el nombre de **orbitales** (R. E. Mulliken):

$$|nlm\rangle = \psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (19)$$

Ocasionalmente, en lugar de utilizar el armónico complejo Y_{lm} , se emplean sus combinaciones reales S_{lm} . Empero, tales **orbitales reales** ya no son, en general, funciones propias de $\hat{l}_z$.

Funciones radiales hidrogenoides: ($\rho = 2Zr/na$)

$$(1s) : R_{10}(r) = (Z/a)^{3/2} 2e^{-\rho/2}, \quad (20)$$

$$(2s) : R_{20}(r) = (Z/2a)^{3/2} (2 - \rho) e^{-\rho/2}, \quad (21)$$

$$(2p) : R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} (Z/2a)^{3/2} \rho e^{-\rho/2}, \quad (22)$$

$$(3s) : R_{30}(r) = (Z/a)^{3/2} \frac{1}{9\sqrt{3}} (6 - 6\rho + \rho^2) e^{-\rho/2}, \quad (23)$$

$$(3p) : R_{31}(r) = (Z/a)^{3/2} \frac{1}{9\sqrt{6}} (4 - \rho) \rho e^{-\rho/2}, \quad (24)$$

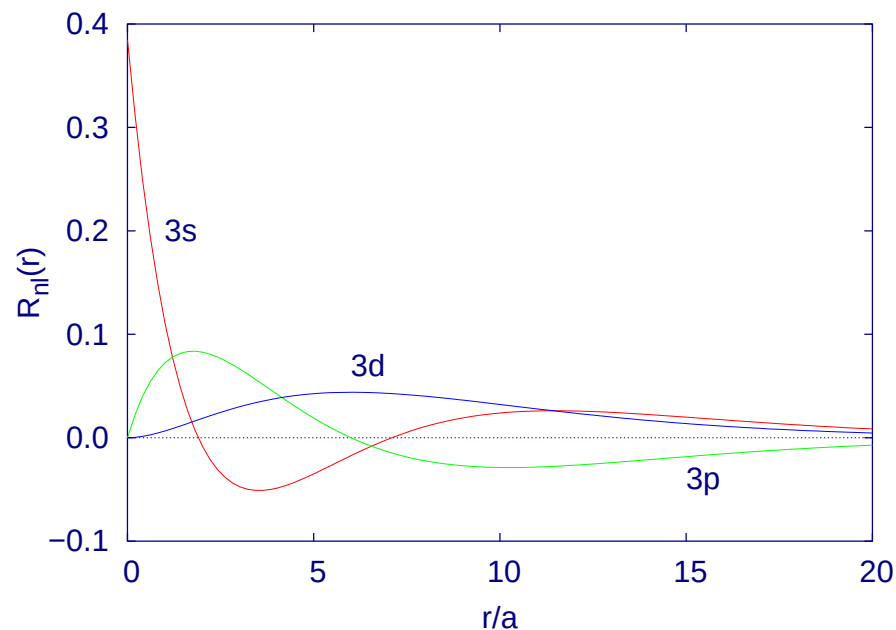
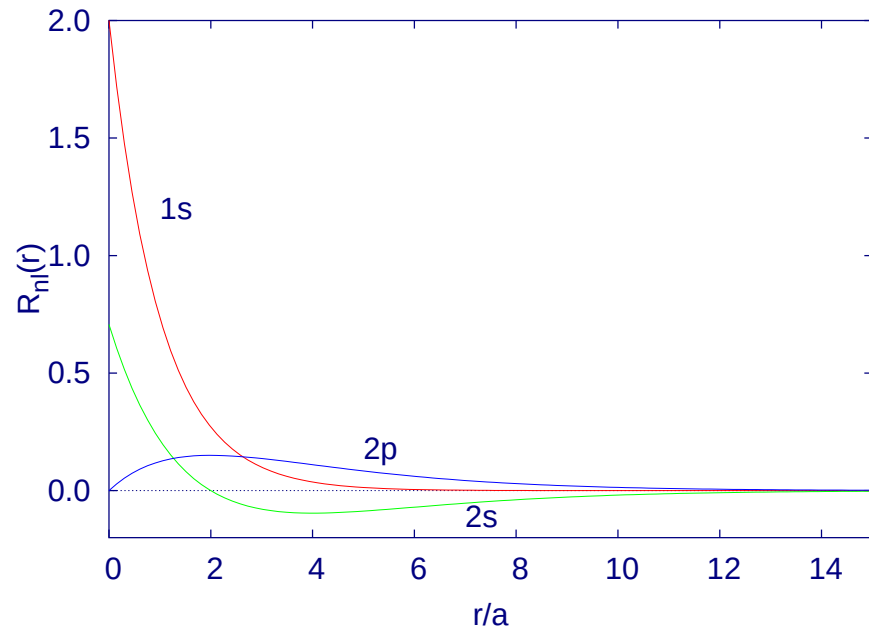
$$(3d) : R_{32}(r) = (Z/a)^{3/2} \frac{1}{9\sqrt{30}} \rho^2 e^{-\rho/2}, \quad (25)$$

$$(4s) : R_{40}(r) = \frac{1}{96} (Z/a)^{3/2} (24 - 36\rho + 12\rho^2 - \rho^3) e^{-\rho/2}, \quad (26)$$

$$(4p) : R_{41}(r) = \frac{1}{32\sqrt{15}} (Z/a)^{3/2} (20 - 10\rho + \rho^2) \rho e^{-\rho/2}, \quad (27)$$

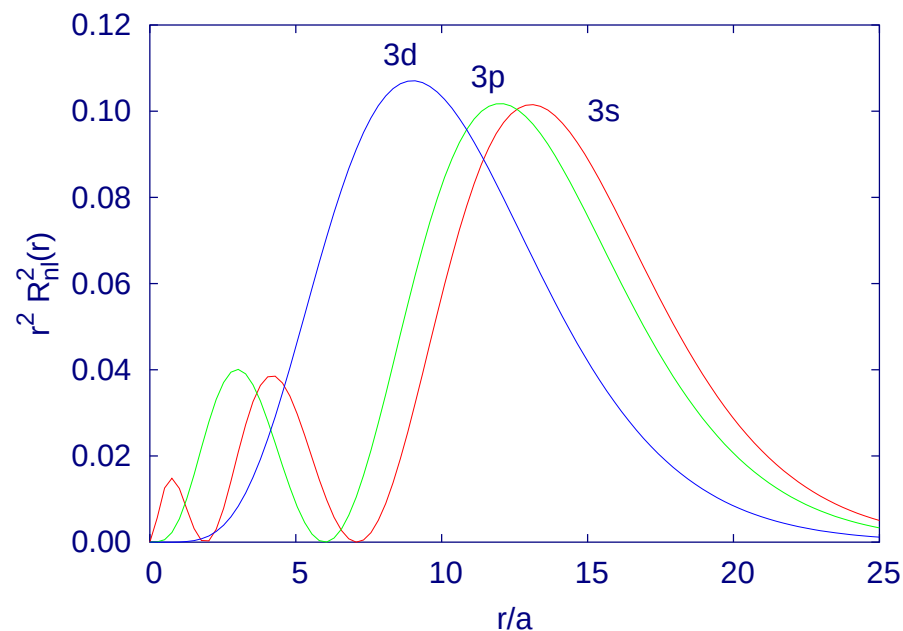
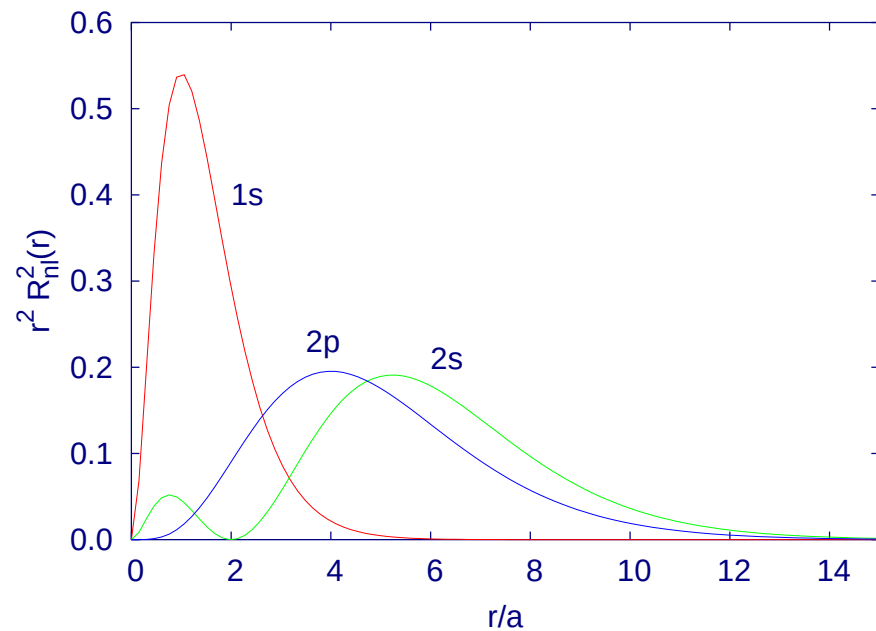
$$(4d) : R_{42}(r) = \frac{1}{96\sqrt{5}} (Z/a)^{3/2} (6 - \rho) \rho^2 e^{-\rho/2}, \quad (28)$$

$$(4f) : R_{43}(r) = \frac{1}{96\sqrt{35}} (Z/a)^{3/2} \rho^3 e^{-\rho/2}. \quad (29)$$



Funciones radiales del hidrógeno:

- Las funciones s , $R_{n0}(r)$, tienen un máximo en el núcleo, donde comienzan con una derivada radial negativa (**cúspide**). La función $R_{n0}(r)$ tiene $n - 1$ nodos radiales, que producen la ortogonalidad entre funciones.
- Las funciones con $l > 0$ tienen un nodo en el origen, y $n - l$ nodos en total.
- La **densidad electrónica** es $|\psi_{nlm}|^2 = R_{nl}^2 |Y_{lm}|^2$. En el estado fundamental, $|n = 1, l = m = 0\rangle$, la densidad electrónica presenta un máximo anguloso en la posición nuclear, y decae exponencialmente al alejarnos del núcleo.



Distribución radial de probabilidad, $r^2 R_{nl}^2(r)$, del hidrógeno:

- Dado un intervalo $r \in [r_i, r_f]$, el área bajo la curva proporciona la probabilidad total de hallar el electrón en ese rango de distancias respecto del núcleo.
- Obsérvese que $(rR_{nl})^2$ es siempre nula en el origen, incluso para los orbitales s , pero eso es sólo debido a que estamos incluyendo el elemento de volumen en la definición.
- Las funciones con un n común tienen su región de máxima densidad a distancias muy similares. Esto origina una **estructura de capas**. Los orbitales con $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ originan las capas K, L, M, N, ...
- La distancia a la que se encuentra el máximo de rR_{nl} se denomina **radio más probable**: $r_{mp}(nl)$.

Orbitales hidrogenoides reales:

$$(1s) : \quad \psi_{1s,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{3/2} e^{-Zr/a}, \quad (30)$$

$$(2s) : \quad \psi_{2s,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{3/2} \left(2 - \frac{Zr}{a} \right) e^{-Zr/2a}, \quad (31)$$

$$(2p_x) : \quad \psi_{2p,x} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{5/2} r \sin \theta \cos \varphi e^{-Zr/2a}, \quad (32)$$

$$(2p_y) : \quad \psi_{2p,y} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{5/2} r \sin \theta \sin \varphi e^{-Zr/2a}, \quad (33)$$

$$(2p_z) : \quad \psi_{2p,z} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{5/2} r \cos \theta e^{-Zr/2a}, \quad (34)$$

$$(3s) : \quad \psi_{3s,0} = \frac{1}{81\sqrt{3\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{3/2} \left(27 - 18\frac{Zr}{a} + 2\frac{Z^2 r^2}{a^2} \right) e^{-Zr/3a}, \quad (35)$$

$$(3p_x) : \quad \psi_{3p,x} = \frac{2}{81\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{5/2} \left(6 - \frac{Zr}{a} \right) r \sin \theta \cos \varphi e^{-Zr/3a}, \quad (36)$$

$$(3p_y) : \quad \psi_{3p,y} = \frac{2}{81\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{5/2} \left(6 - \frac{Zr}{a} \right) r \sin \theta \sin \varphi e^{-Zr/3a}, \quad (37)$$

$$(3p_z) : \quad \psi_{3p,z} = \frac{2}{81\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{5/2} \left(6 - \frac{Zr}{a} \right) r \cos \theta e^{-Zr/3a}, \quad (38)$$

$$(3d_{z^2}) : \quad \psi_{3d,z^2} = \frac{1}{81\sqrt{6\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{7/2} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) e^{-Zr/3a}, \quad (39)$$

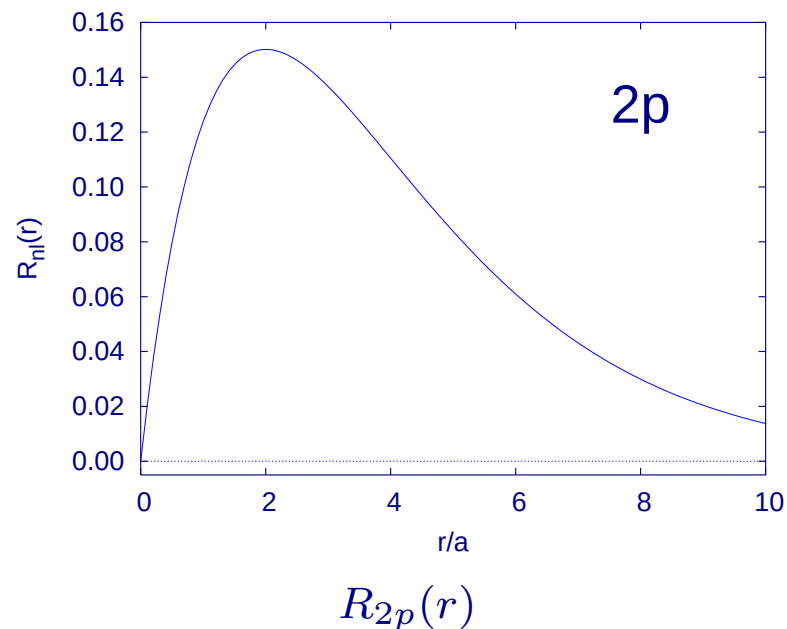
$$(3d_{xz}) : \quad \psi_{3d,xz} = \frac{2}{81\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{7/2} r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \varphi e^{-Zr/3a}, \quad (40)$$

$$(3d_{yz}) : \quad \psi_{3d,yz} = \frac{2}{81\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{7/2} r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi e^{-Zr/3a}, \quad (41)$$

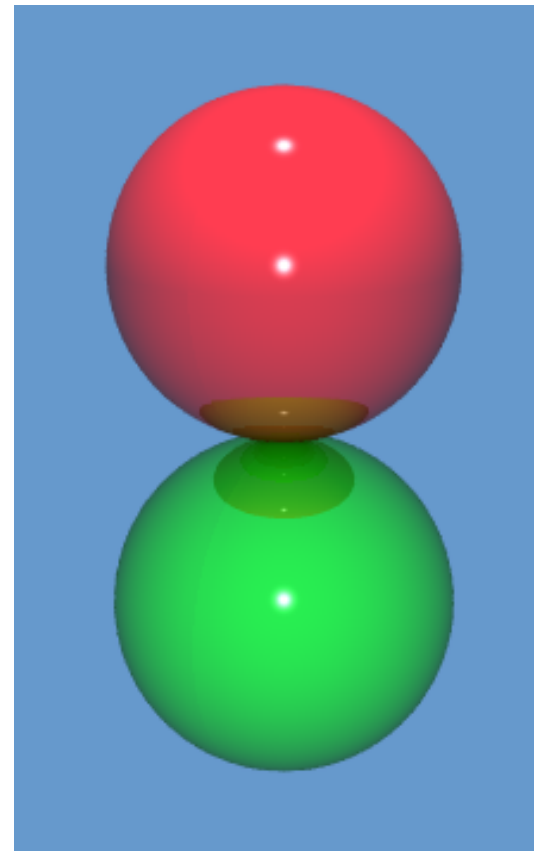
$$(3d_{x^2-y^2}) : \quad \psi_{3d,x^2-y^2} = \frac{1}{81\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{7/2} r^2 \sin^2 \theta \cos 2\varphi e^{-Zr/3a}, \quad (42)$$

$$(3d_{xy}) : \quad \psi_{3d,xy} = \frac{1}{81\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a} \right)^{7/2} r^2 \sin^2 \theta \sin 2\varphi e^{-Zr/3a}. \quad (43)$$

Imagen de los orbitales hidrogenoides reales: $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$ es una función 3D, de modo que necesitaríamos vivir en un mundo 4D para poder dibujarla (de hecho en un mundo 5D si quisiéramos representar los orbitales con su parte compleja). Lo que sí podemos representar son isosuperficies, es decir, las soluciones a una ecuación $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = K$ para el K que queramos.



×

 $Y_{10}(\theta, \varphi)$

=

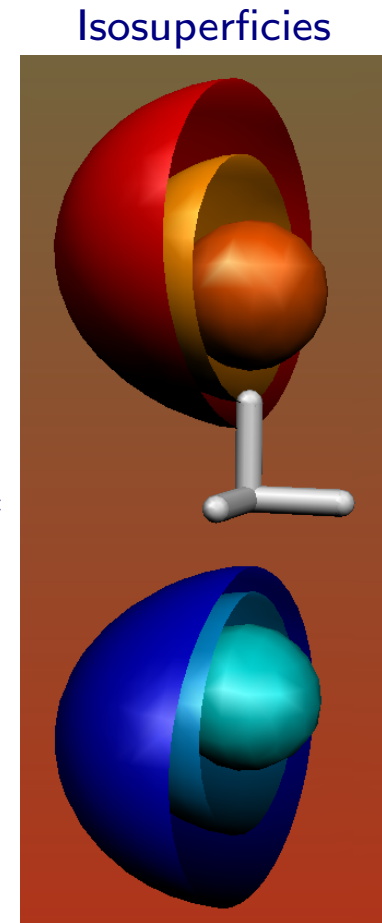
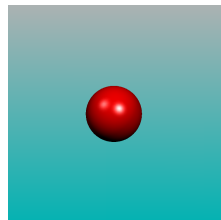
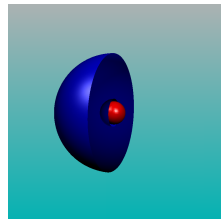
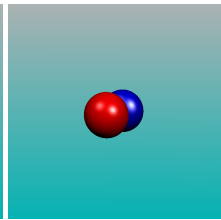
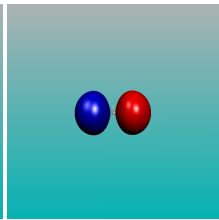
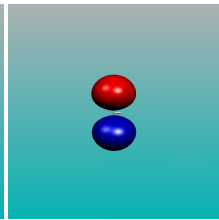
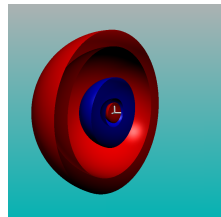
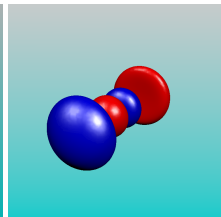
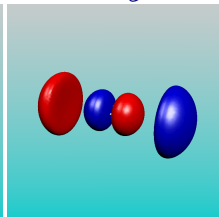
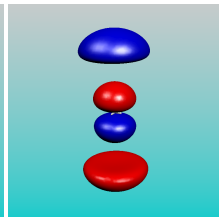
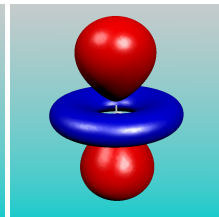
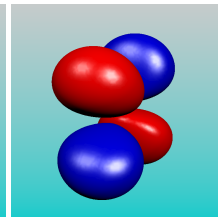
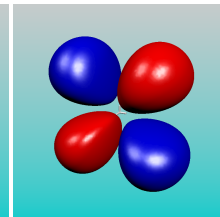
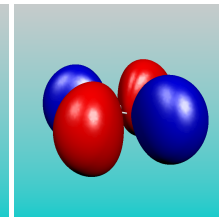
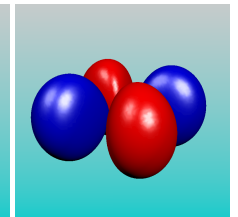
 $\psi_{2pz}(r, \theta, \varphi) = K$

Imagen de los orbitales hidrogenoides reales:

 $1s$  $2s$  $2p_x$  $2p_y$  $2p_z$  $3s$  $3p_x$  $3p_y$  $3p_z$  $3d_{z^2}$  $3d_{xz}$  $3d_{yz}$  $3d_{x^2-y^2}$  $3d_{xy}$

Isosuperficies dibujadas: ± 0.007 u.at. ($1s, 2s, 3s$), ± 0.03 u.at. ($2p_x, 2p_y, 2p_z$), ± 0.005 u.at. ($3p_x, 3p_y, 3p_z$), ± 0.01 u.at. ($3d_{z^2}, 3d_{xz}, 3d_{yz}, 3d_{x^2-y^2}, 3d_{xy}$).

En los orbitales $2s$ y $3s$ se han cortado las superficies externas para dejar ver la estructura nodal interior.

Ejercicios

1. Utiliza la aproximación de masa nuclear infinita, $\mu = m_e$, para expresar en unidades atómicas: (a) el hamiltoniano del átomo hidrogenoide, (b) su energía, (c) la función de onda del estado $1s$.
2. Utilizando constantes fundamentales (h , N_A , c , etc) encuentra la equivalencia entre la unidad atómica de energía (hartree) y las siguientes magnitudes: energía en J; energía molar en J/mol; frecuencia en $\text{s}^{-1} = \text{Hz}$; número de ondas en cm^{-1} .
3. Determina la frecuencia y número de ondas para la transición desde el estado $1s$ al $2p$ del átomo de hidrógeno. Repite el cálculo para los átomos de deuterio y tritio.
4. Determina y dibuja las funciones radiales $R_{4s}(r)$ y $R_{4p}(r)$ del átomo hidrogenoide.
5. ¿Cuál es la diferencia de significado entre densidad electrónica y distribución radial?
6. Calcula, para el estado fundamental $1s_0$ de un átomo hidrogenoide, los valores esperados de los operadores siguientes: $\hat{r}$, $\hat{p}$, $\hat{r}$, $\hat{p}$, $\hat{T}$, $\hat{V}$ y $\hat{H}$. Comprueba que se cumple el teorema del virial, de modo que $\langle \hat{V} \rangle = -2 \langle \hat{T} \rangle$ para un sistema con potencial coulombiano. Repite los cálculos para el estado $2p_z$.
7. Usa la densidad de probabilidad radial del orbital $1s$ para encontrar: (a) la distancia electrón-núcleo más probable; (b) la distancia promedio; (c) la distancia mediana, r_m , definida como la distancia para la que $\mathcal{P}[r < r_m] = 1/2$; y (d) el radio r_{99} tal que $\mathcal{P}[r < r_{99}] = 99\%$.
8. En Mecánica Clásica, la expresión $0 \leq \mu \dot{r}^2 / 2 = E - (V(r) + l^2 / 2\mu r^2) = E - V_{\text{eff}}(r)$ define la región permitida para el movimiento. Los puntos de energía cinética nula, llamados puntos de parada, de retroceso, o puntos apsidales, dan las distancias mínima y máxima que alcanza

la partícula de masa μ del sistema de dos cuerpos para valores dados de E y l . Aplica esta fórmula a un estado ψ_{nlm} del hidrógeno usando las expresiones cuánticas de su energía y momento angular y obtén los hipotéticos puntos de parada en función de n y l . Aplica esta solución al estado $1s$. Calcula, para este estado, la probabilidad de encontrar el sistema en la región clásicamente prohibida.

9. Calcula los valores esperados del operador $\hat{r}$ correspondientes a los estados de los tres primeros niveles de energía y comprueba que satisfacen la expresión general: $\langle \hat{r} \rangle_{nl} = (3n^2 - l(l+1))/2$.
10. Un átomo de hidrógeno muónico es aquél en el que el electrón ha sido sustituido por un muón, μ^- , una partícula de carga idéntica a la del electrón pero masa $m_{\mu^-} = 206.7682657(63)m_e$. Determina, para el estado fundamental $1s$, el radio medio y energía, y compara estos valores con los del átomo de hidrógeno.