

CAPÍTULO VII:

PIEZAS A COMPRESIÓN (PILARES)

7.1. INTRODUCCIÓN

Aunque en la práctica la mayoría de los pilares están sometidos a flexión a la vez que a compresión, es conveniente considerar la compresión como un caso básico.

El término pieza comprimida se utiliza generalmente para describir elementos estructurales sometidos solamente a cargas axiales; este término puede describir pilares (bajo condiciones especiales de carga) pero generalmente se refiere a barras comprimidas con los extremos articulados pertenecientes a celosías, vigas de celosía o elementos de arriostramiento. Si estas piezas además de los esfuerzos axiales están sometidas a momentos flectores, se denominan vigas-pilar.

Este capítulo trata de piezas comprimidas y, por lo tanto, se puede aplicar a muy pocos pilares reales dado que en estos las excentricidades de las cargas y las fuerzas transversales normalmente no son insignificantes. No obstante, los elementos comprimidos representan un caso elemental que permite entender de los efectos de la compresión en el estudio de las vigas-pilar. Dado que la mayoría de las piezas de acero comprimidas son bastante esbeltas, es posible que puedan pandear. En esta lección se describen brevemente las diferentes clases de piezas comprimidas y se explica el comportamiento de los pilares cortos y esbeltos. Además, se muestran las curvas de pandeo utilizadas para el cálculo de pilares esbeltos.

7.2. PILARES CORTOS

Los pilares cortos tienen una esbeltez muy baja de manera que no llega a producirse el pandeo global de la pieza. En estos casos la capacidad de la pieza viene determinada por la resistencia a compresión de la sección transversal, que es función del tipo la sección. En las secciones transversales de clases 1, 2, 3 no se produce pandeo local, de ahí que la resistencia de cálculo a compresión se tome como la resistencia plástica.

$$N_{c,Rd} = N_{pl,Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M0}}$$

Para las secciones transversales de clase 4, el pandeo local en uno o más elementos de la sección transversal impide alcanzar la carga de agotamiento por compresión, y así la resistencia a compresión de la pieza está limitada a la resistencia a pandeo local.

$$N_{c,Rd} = N_{o,Rd} = \frac{A_{eff} \cdot f_y}{\gamma_{M1}}$$

donde A_{eff} es el área eficaz de la sección transversal.

7.3 PILARES ESBELTOS

Los pilares esbeltos tienen dos tipos diferentes de comportamiento. En los pilares muy esbeltos el pandeo elástico es dominante, mientras que para piezas con esbelteces intermedias el pandeo está condicionado por las imperfecciones de la pieza.

Si l_{cr} es la longitud crítica, la carga crítica de Euler N_{cr} es igual a:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\ell_{cr}^2}$$

y es posible definir la tensión crítica de Euler σ_{cr} como:

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\ell_{cr}^2 \cdot A}$$

Introduciendo el radio de giro, $i = \sqrt{I/A}$, y la esbeltez, $\lambda = \ell_{cr}/i$, para el modo significativo de pandeo, la ecuación anterior se transforma en:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

Representando en un gráfico la curva de tensión crítica como una función de la esbeltez, véase figura 1, en la que la línea horizontal representa la plastificación completa de la sección, $\sigma = f_y$, es interesante destacar las diferentes zonas representando el fallo por pandeo, fallo por plastificación y la zona de seguridad.

El punto de intersección P, de las dos curvas representa el valor teórico máximo de la esbeltez de un pilar comprimido para que falle al rebasar el límite elástico. Esta limitación de la esbeltez cuando σ_{cr} es igual al límite elástico del acero viene dada por:

$$\lambda_1 = \pi[E / f_y]^{0,5} = 93,9\varepsilon \quad \text{donde } \varepsilon = [235 / f_y]^{0,5}$$

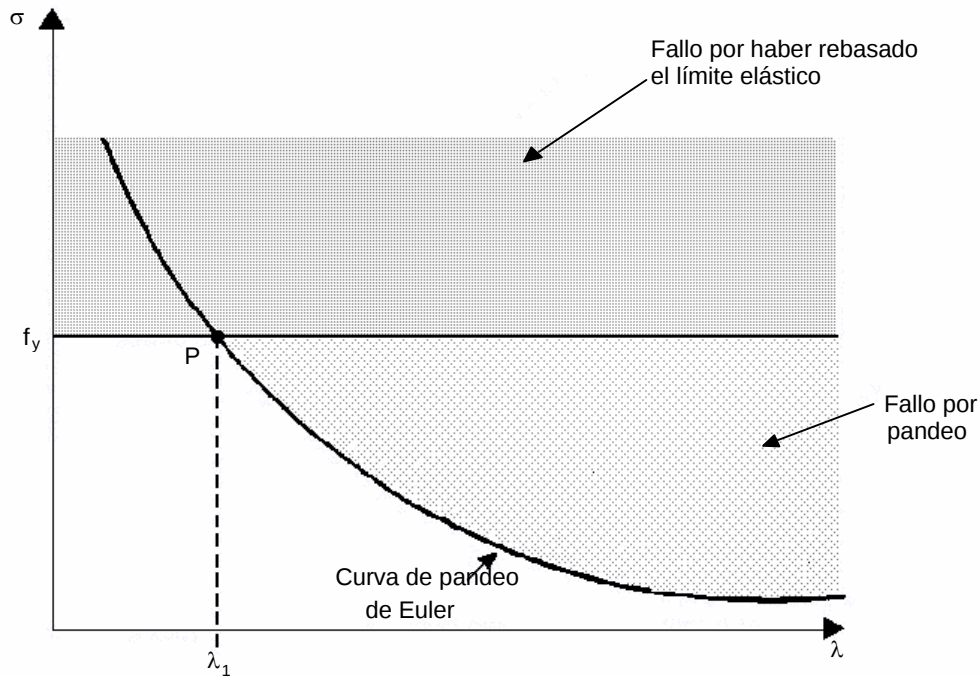


Figura 1 Curva de pandeo de Euler y modos de fallo

Por lo tanto λ_1 es igual a 93,9 para un acero de grado S235, a 86,8 para aceros de grado S275 y 76,4 para aceros de grado S355.

La figura 1 puede dibujarse de nuevo en forma normalizada, véase figura 2, dividiendo la tensión crítica de Euler por el límite elástico (σ_{cr}/f_y) y la esbeltez por la esbeltez límite (λ/λ_1). Este diagrama es muy útil pues puede aplicarse a barras de diferentes esbelteces y límites elásticos.

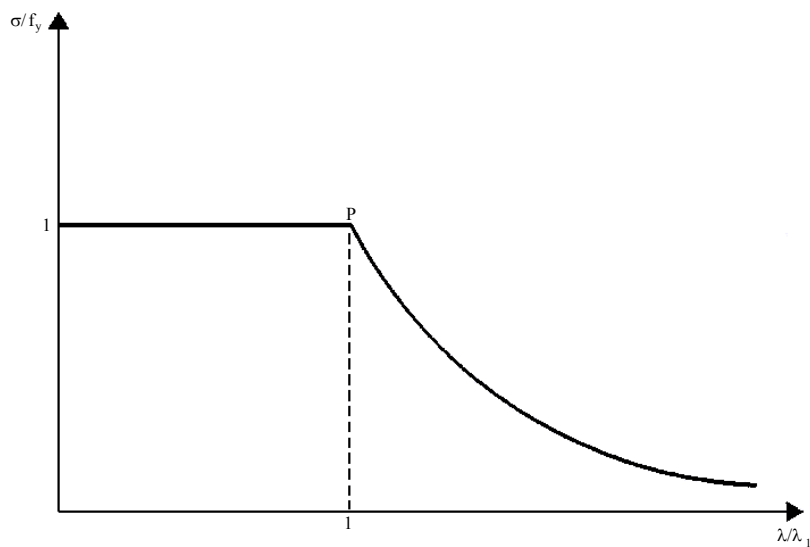


Figura 2 Curva de pandeo adimensional

7.4 PILARES REALES

Los pilares reales se agotan para tensiones por debajo de los límites teóricos debido a que contienen una serie de imperfecciones. Comparado con las curvas teóricas, el comportamiento real muestra mayores dispersiones en el intervalo de esbelteces medias que en el intervalo de esbelteces altas. En la zona de esbelteces medias (que representa a la mayoría de los pilares), el efecto de las imperfecciones estructurales es significativo y debe considerarse en detalle. La mayor reducción en el valor teórico se produce en la región de la esbeltez límite. La curva límite inferior se ha obtenido de un análisis estadístico de los resultados de ensayos y representa el límite seguro para la carga.

Un pilar puede considerarse esbelto si su esbeltez es mayor que la correspondiente al punto de inflexión de la curva límite inferior, mostrada en la figura 3. La carga última para dichos pilares esbeltos es similar a la carga crítica de Euler N_{cr} y es, por tanto, independiente del límite elástico.

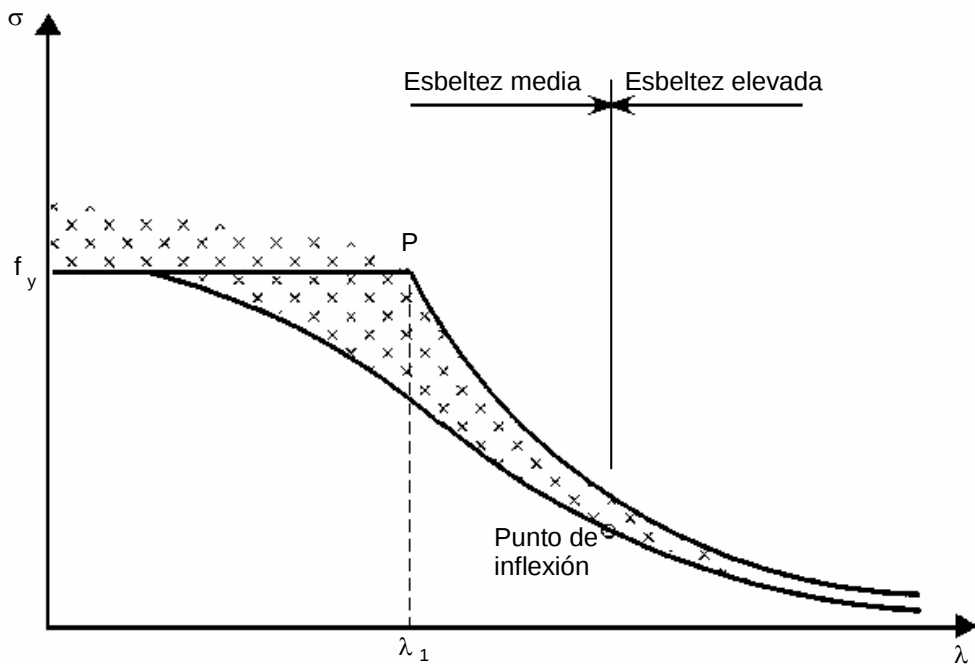


Figura 3 Resultados de ensayos en pilares reales y curvas de pandeo

Los pilares con esbeltez intermedia son aquellos cuyo comportamiento se desvía más de la teoría de Euler. Cuando se produce el pandeo, algunas fibras ya han alcanzado el límite elástico y la carga última no sólo es una función de la esbeltez. Cuanto mayores sean las imperfecciones que tiene el pilar, mayor es la diferencia entre el

comportamiento real y el teórico. La falta de rectitud y la presencia de tensiones residuales son las imperfecciones que presentan un efecto más significativo en el comportamiento de este tipo de pilares. Las tensiones residuales pueden distribuirse de forma variada a través de la sección tal y como se puede apreciar en la las figuras 4 y 5. Las tensiones residuales combinadas con las tensiones debidas a las cargas axiales hacen que se alcance el límite elástico en la sección transversal y por lo tanto el área efectiva capaz de resistir las cargas axiles se reduce.

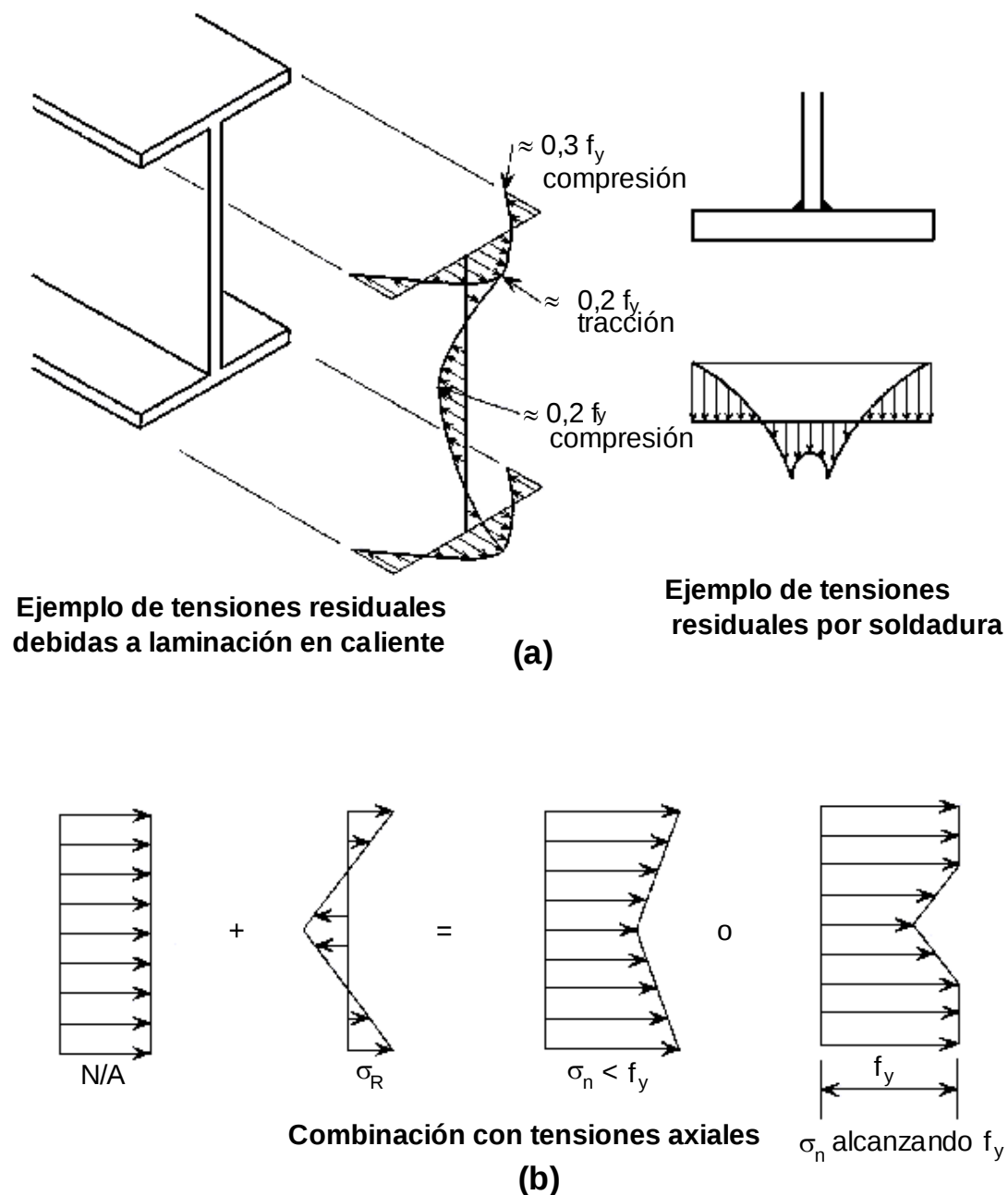


Figura 4 Muestra de distribución de tensiones residuales

Una falta inicial de rectitud e_0 , produce un momento flector provocando una tensión máxima de flexión σ_B (ver figura 5a), que añadida a la tensión residual, σ_R da la distribución de tensiones mostrada en la Figura 5b. Si σ_{max} supera el límite elástico la distribución final será parcialmente plástica y ciertas secciones de la pieza se habrán agotado en compresión tal como se observa en la Figura 5c.

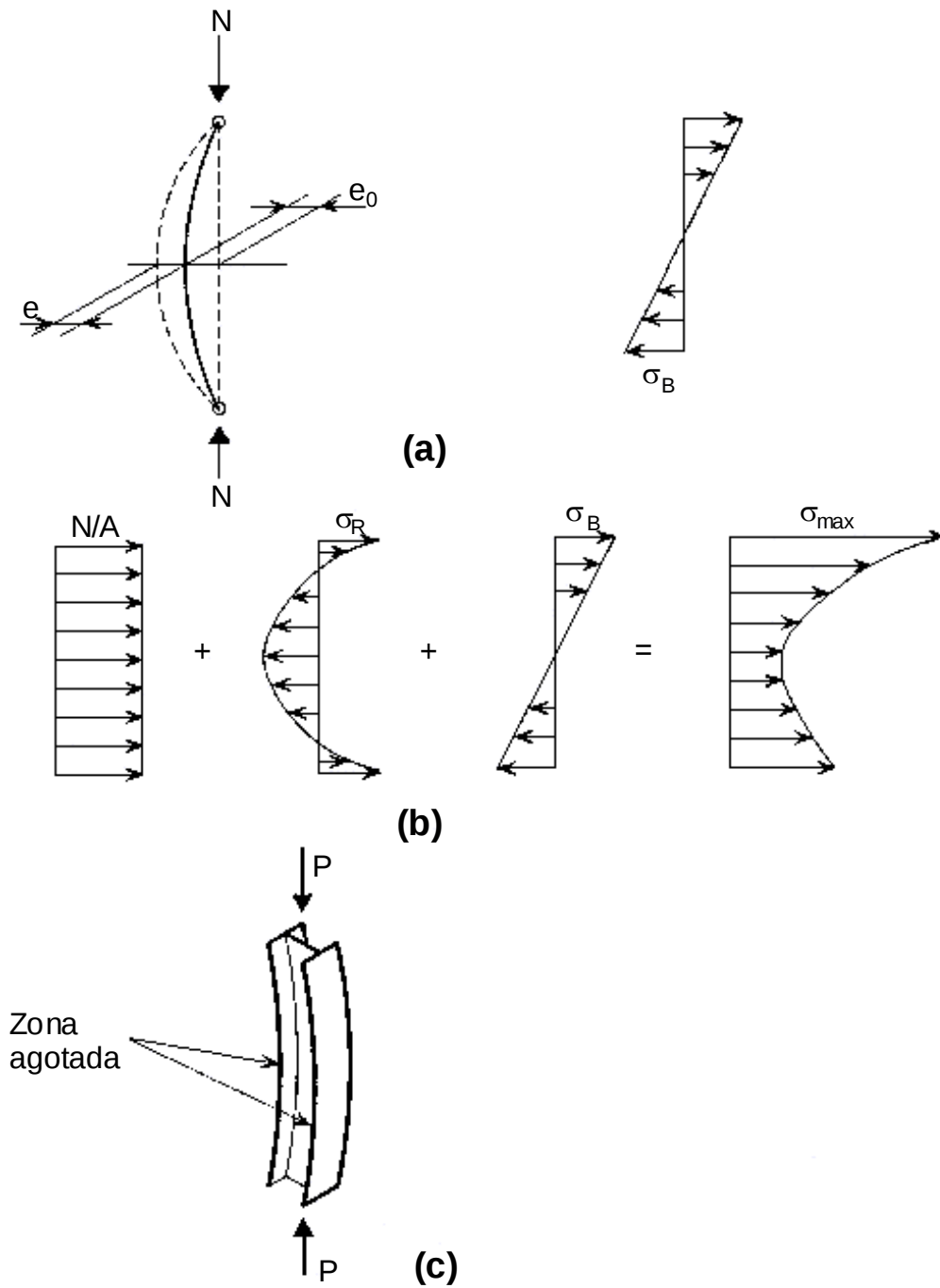


Figura 5 Pieza a compresión parcialmente agotada

7.5 ESBELTEZ REDUCIDA

El Eurocódigo EC3 define la esbeltez adimensional o reducida $\bar{\lambda}$ de la manera siguiente

$$\bar{\lambda} = \left[\beta_A \frac{A \cdot f_y}{N_{cr}} \right]^{0,5}$$

De modo más conveniente la expresión anterior puede escribirse como

$$\bar{\lambda} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right) [\beta_A]^{0,5}$$

7.6 CURVAS DE PANDEO DE LA ECCS

Las curvas de pandeo ECCS se basan en los resultados de más 1000 ensayos realizados en diferentes tipos de perfiles (I, H, T etc.), con diferentes valores de la esbeltez (entre 55 y 160). Un enfoque probabilístico, utilizando la resistencia experimental y asociado al análisis teórico, permite el trazado de curvas que describen la resistencia de los pilares como una función de la esbeltez normalizada. Se tiene en cuenta una imperfección geométrica en forma de semiondasenoidal con amplitud igual a 1/1000 de la longitud del pilar y el efecto de las tensiones residuales para cada tipo de perfil.

Las curvas de pandeo ECCS (a, b, c, d) se muestran en la figura 6. Éstas proporcionan el valor del coeficiente de reducción χ de la resistencia del pilar en función de la esbeltez normalizada para diferentes tipos de perfiles (referidos a diferentes valores del coeficiente de imperfección α).

χ se obtiene de la esbeltez $\bar{\lambda}$ para la curva de pandeo adecuada.

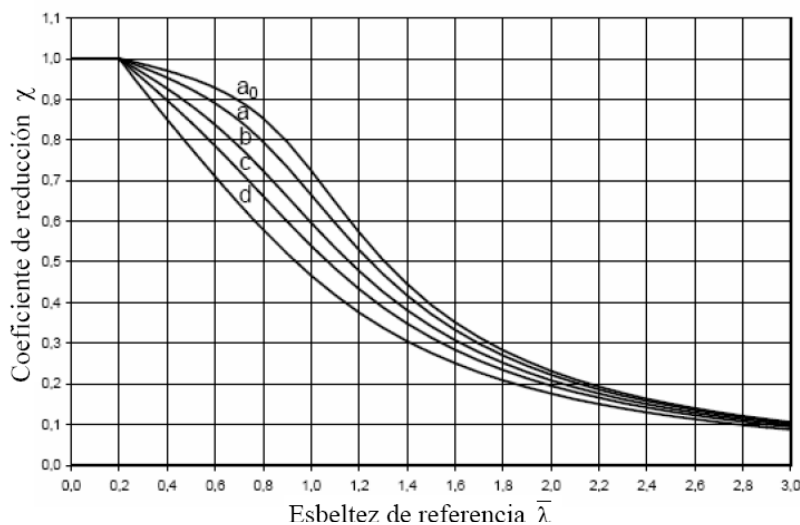


Figura 6 – Curvas Europeas de pandeo

$\bar{\lambda}$	Factor de reducción χ				
	Curva a ₀	Curva a	Curva b	Curva c	Curva d
0,2	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,3	0,9859	0,9775	0,9641	0,9491	0,9235
0,4	0,9701	0,9528	0,9261	0,8973	0,8504
0,5	0,9513	0,9243	0,8842	0,8430	0,7793
0,6	0,9276	0,8900	0,8371	0,7854	0,7100
0,7	0,8961	0,8477	0,7837	0,7247	0,6431
0,8	0,8533	0,7957	0,7245	0,6622	0,5797
0,9	0,7961	0,7339	0,6612	0,5998	0,5208
1,0	0,7253	0,6656	0,5970	0,5399	0,4671
1,1	0,6482	0,5960	0,5352	0,4842	0,4189
1,2	0,5732	0,5300	0,4781	0,4338	0,3762
1,3	0,5053	0,4703	0,4269	0,3888	0,3385
1,4	0,4461	0,4179	0,3817	0,3492	0,3055
1,5	0,3953	0,3724	0,3422	0,3145	0,2766
1,6	0,3520	0,3332	0,3079	0,2842	0,2512
1,7	0,3150	0,2994	0,2781	0,2577	0,2289
1,8	0,2833	0,2702	0,2521	0,2345	0,2093
1,9	0,2559	0,2449	0,2294	0,2141	0,1920
2,0	0,2323	0,2229	0,2095	0,1962	0,1766
2,1	0,2117	0,2036	0,1920	0,1803	0,1630
2,2	0,1937	0,1867	0,1765	0,1662	0,1508
2,3	0,1779	0,1717	0,1628	0,1537	0,1399
2,4	0,1639	0,1585	0,1506	0,1425	0,1302
2,5	0,1515	0,1467	0,1397	0,1325	0,1214
2,6	0,1404	0,1362	0,1299	0,1234	0,1134
2,7	0,1305	0,1267	0,1211	0,1153	0,1062
2,8	0,1216	0,1182	0,1132	0,1079	0,0997
2,9	0,1136	0,1105	0,1060	0,1012	0,0937
3,0	0,1063	0,1036	0,0994	0,0951	0,0882

Tabla 1 Valores de χ para las curvas de pandeo

El EC3 expresa las curvas por medio de la expresión matemática para χ

$$\chi = \frac{1}{\phi + [\phi^2 - \bar{\lambda}^2]^{0,5}} \leq 1$$

donde

$$\phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$$

La tabla anterior proporciona los valores del coeficiente de reducción χ como una función de la esbeltez reducida $\bar{\lambda}$.

El coeficiente de imperfección α depende de la forma de la sección transversal del pilar considerado, de la dirección en la que puede ocurrir el pandeo (eje y o z) y del proceso de fabricación utilizado en la pieza comprimida (laminación en caliente, conformado en frío o soldado); los valores de α se dan en la Tabla 2.

Curva de pandeo	a	b	c	d
Coefficiente de imperfección α	0,21	0,34	0,49	0,76

Tabla 2 Coeficientes de imperfección

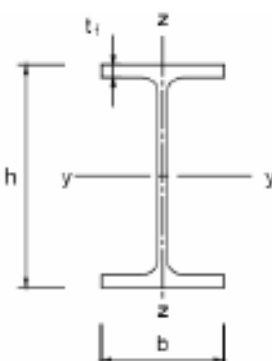
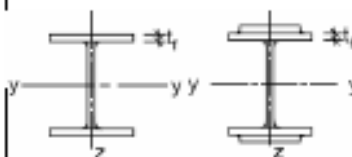
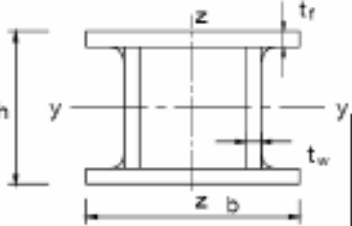
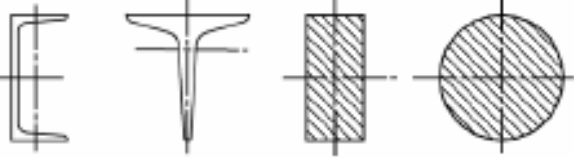
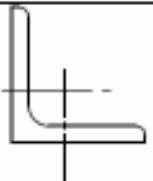
Sección transversal		Límites	Pandeo sobre el eje	Curva de pandeo	
				S235 S275 S355 S420	S460
Secciones laminadas		$h/b > 1,2$	$t_f \leq 40\text{mm}$	y-y z-z	a a ₀
			$40 < t_f \leq 100$	y-y z-z	b a
		$h/b \leq 1,2$	$t_f \leq 100\text{mm}$	y-y z-z	b a
			$t_f > 100\text{mm}$	y-y z-z	d c
Secciones en I soldadas		$t_f \leq 40\text{mm}$		y-y z-z	b b
		$t_f > 40\text{mm}$		y-y z-z	c d
Tubos		Laminado en caliente		ambos	a a ₀
		Conformado en frío		ambos	c c
Sección en cajón soldada		En general salvo casos indicados expresamente		ambos	b b
		$a > 5t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$		ambos	c c
Secciones U, T y macizas				ambos	c c
Secciones L				ambos	b b

Tabla 3 Selección de la curva de pandeo apropiada para una sección

La Tabla 3 ayuda a seleccionar la curva de pandeo apropiada en función del tipo de sección transversal, de sus límites dimensionales y de los ejes sobre los que la pieza pueda pandear.

7.7 PROCEDIMIENTO DE COMPROBACIÓN A PANDEO DE PILARES

7.7.1. Datos necesarios:

- Clase de acero (límite elástico f_y)
- Sección transversal de la pieza (clasificación de secciones, radios de giro)
- Tipo de vinculación de la pieza en sus extremos (coeficiente de pandeo)
- Tipo de pieza y plano de pandeo (curva de pandeo)
- Longitud de la pieza
- Esfuerzo axial de cálculo

7.7.2. Etapas para el diseño de las piezas:

Para diseñar una pieza a compresión simple es necesario primeramente evaluar sus dos longitudes efectivas, en relación a sus dos ejes principales, teniendo presente las vinculaciones en sus extremos. El procedimiento de comprobación debería realizarse de la manera siguiente:

7.7.2.1. Obtención de la esbeltez de referencia $\bar{\lambda}$

Las características geométricas de la forma y su límite elástico proporcionan la esbeltez de referencia $\bar{\lambda}$.

$$\bar{\lambda} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right) [\beta_A]^{0,5}$$

siendo:

$$\lambda = \frac{l_{cr}}{i} \begin{cases} l_{cr} : \text{longitud de pandeo} \\ i : \text{radio de giro} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \pi [E / f_y]^{0,5} = 93,9 \varepsilon \quad \text{con} \quad \varepsilon = [235 / f_y]^{0,5} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 93,9 & (S235) \\ \lambda_1 = 86,8 & (S275) \\ \lambda_1 = 76,4 & (S355) \end{cases}$$

$$\beta_A = 1 \quad (\text{secciones Clases 1, 2 y 3}); \quad \beta_A = \frac{A_{eff}}{A} \quad (\text{secciones Clase 4})$$

7.7.2.2. Coeficiente de reducción para el pandeo χ

Se calcula mediante las curvas de pandeo y la esbeltez $\bar{\lambda}$. La Tabla 3 nos permite seleccionar la curva de pandeo apropiada.

7.7.2.3. Esfuerzo axil de agotamiento por pandeo

La resistencia a pandeo de una pieza a compresión se realiza mediante la expresión:

$$N_{b,Rd} = \chi \cdot \beta_A \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}}$$

Si el axil de agotamiento $N_{b,Rd}$ es mayor que la carga axial de cálculo la pieza resulta aceptable; si no es así, deberemos probar con otra sección mayor o de otro tipo.

7.8 TABLAS DE RESISTENCIA A PANDEO PARA PILARES ESBELTOS

A continuación se incluyen unas tablas que permiten determinar el esfuerzo axil de agotamiento ($N_{b,Rd}$ en kN) por pandeo con respecto del eje fuerte $y-y$ ó del eje débil $z-z$ para una variedad de secciones.

Secciones transversales: IPE, IPN, HEB, UPN, CHS, SHS y RHS.

Longitudes de pandeo: de $2m$ a $20m$

Tipos de acero: S235, S275 y S355.

Las secciones sombreadas corresponden a Clase 4 lo que implica tener en consideración el área eficaz A_{eff} . En concreto éstas son:

En acero S235: IPE 600; HEB 1000

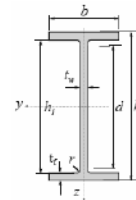
En acero S275: IPE 450, 500 y 600

En acero S355: IPE 300, 330, 360, 400, 450, 500 y 600

Tubulares en acero S355: SHS 300x8 y SHS 400x10

Axil de agotamiento (kN) para $l_{cr}(m)$

$$N_{b,Rd} = \chi \cdot \beta_A \cdot \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}}$$



Acero: S235

l_{cr} (m)	IPE 100		IPE 120		IPE 140		IPE 160	
	Eje y-y	Eje z-z	Eje y-y	Eje z-z	Eje y-y	Eje z-z	Eje y-y	Eje z-z
2	202,2	60,2	266,3	100,0	337,0	151,4	417,1	215,3
3	177,3	29,1	245,3	49,7	317,9	77,9	398,6	115,1
4	139,6	17,0	212,7	29,2	290,3	46,2	373,9	69,0
5	102,7	11,1	170,8	19,1	251,1	30,4	339,2	45,7
6	75,9	7,8	132,1	13,5	206,0	21,5	294,3	32,4
7	57,7	5,8	102,6	10,0	165,3	16,0	246,2	24,1
8	45,2	4,5	81,2	7,7	133,1	12,4	203,1	18,7
9	36,2	3,5	65,5	6,2	108,5	9,8	168,0	14,9
10	29,7	2,9	53,9	5,0	89,8	8,0	140,2	12,1
11	24,7	2,4	45,1	4,2	75,4	6,7	118,3	10,1
12	20,9	2,0	38,2	3,5	64,1	5,6	101,0	8,5
13	17,9	1,7	32,8	3,0	55,1	4,8	87,1	7,3
14	15,5	1,5	28,4	2,6	47,9	4,1	75,8	6,3
15	13,6	1,3	24,9	2,3	42,0	3,6	66,6	5,5
16	12,0	1,1	22,0	2,0	37,1	3,2	59,0	4,8
18	9,5	0,9	17,5	1,6	29,6	2,5	47,0	3,8
20	7,7	0,7	14,2	1,3	24,1	2,1	38,4	3,1

7.9 PLANTEAMIENTO SEGÚN EL CTE-DB-SE-A

El procedimiento propuesto en el CTE para la comprobación a pandeo coincide plenamente con el expuesto anteriormente en este capítulo. A continuación se van a exponer tan solo aquellas novedades presentes en el CTE y no recogidas hasta ahora.

*Se completa la tabla 3 “*Selección de la curva de pandeo apropiada para una sección*” con la posibilidad de disponer una sección transversal a partir de varios perfiles agrupados.

Agrupación de perfiles laminados soldados



c c c c

*Se establecen límites para la esbeltez reducida de 2,0 para elementos principales y 2,7 si se trata de elementos de arriostramiento lo que dependiendo del tipo de acero implica:

$$\bar{\lambda} = 2,0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{\max} = 187,8 & (S235) \\ \lambda_{\max} = 173,6 & (S275) \\ \lambda_{\max} = 152,8 & (S355) \end{cases} \quad \bar{\lambda} = 2,7 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{\max} = 253,5 & (S235) \\ \lambda_{\max} = 234,3 & (S275) \\ \lambda_{\max} = 206,3 & (S355) \end{cases}$$

*Se establecen algunos procedimientos para determinar la longitud de pandeo en el caso de situaciones particulares (barras no aisladas, esfuerzos o sección no constante, etc..)

7.9.1 Longitud de pandeo para barras de estructuras trianguladas

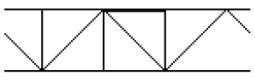
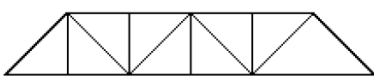
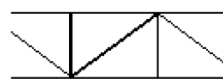
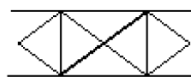
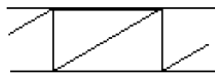
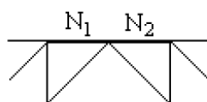
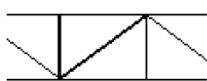
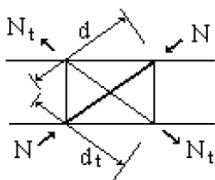
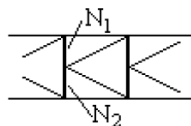
1. En celosías espaciales formadas por perfiles huecos atornillados en sus extremos se tomará como longitud de pandeo la distancia entre ejes de nudos para cualquier barra.

2. En vigas planas trianguladas se tomará como longitud de pandeo:

- Para los cordones, pandeo en el plano de la viga, la distancia entre ejes de nudos;
- Para los cordones, pandeo fuera del plano, la longitud teórica de la barra medida entre puntos fijos por existir arriostramiento; en caso de no existir puntos fijos, se tratará como una pieza de compresión variable.
- En montantes y diagonales, pandeo en plano de la viga, la longitud libre entre barras.
- En montantes y diagonales, pandeo fuera del plano, la longitud entre ejes de nudos.

3 En vigas planas trianguladas formadas por perfiles huecos de cordones continuos y diagonales y montantes soldados de forma continua en todo el perímetro, se podrán tomar como longitudes de pandeo las definidas en el apartado anterior, aplicando el factor 0,9 a los cordones, y 0,75 a los montantes y diagonales.

En la tabla siguiente se dan los coeficientes de esbeltez β en barras de estructuras trianguladas ($L_k = \beta L$) que proponía utilizar la anterior NBE-EA95.

Esquema	Barra	Coefficiente β
a) Pandeo en el plano de la estructura		
Caso 1 	Cordón comprimido	1.0
Caso 2 	Diagonales extremas	1.0
Caso 3 	Montantes y diagonales	0.8
Caso 4 	Barra que se cruza sobre otra con condiciones de unión	Se considera el punto del cruce como inmovilizado
b) Pandeo perpendicular al plano de la estructura		
Caso 1 	Cordón comprimido	1.0
Caso 2 	Cordón con nudo intermedio inmovilizado con esfuerzos N_1, N_2 con ($N_1 > N_2$)	$0.75 + 0.25 \frac{N_2}{N_1}$
Caso 3 	Montantes y diagonales	1.0
Caso 4 	Diagonal que se cruza sobre otra sometida a tracción (N_t) con condiciones de unión.	$\sqrt{1 - 0.75 \frac{N_t}{N} \frac{d}{d_t}} \not\leq 0.5$
Caso 5 	Montantes con esfuerzos N_1, N_2 con ($N_1 > N_2$)	$0.75 + 0.25 \frac{N_2}{N_1} \not\leq 0.5$

7.9.2 Longitud de pandeo para pilares de edificios

Para determinar las longitudes de pandeo según el CTE, es preciso conocer previamente los denominados coeficientes de distribución η_1 y η_2 que se obtienen a partir de:

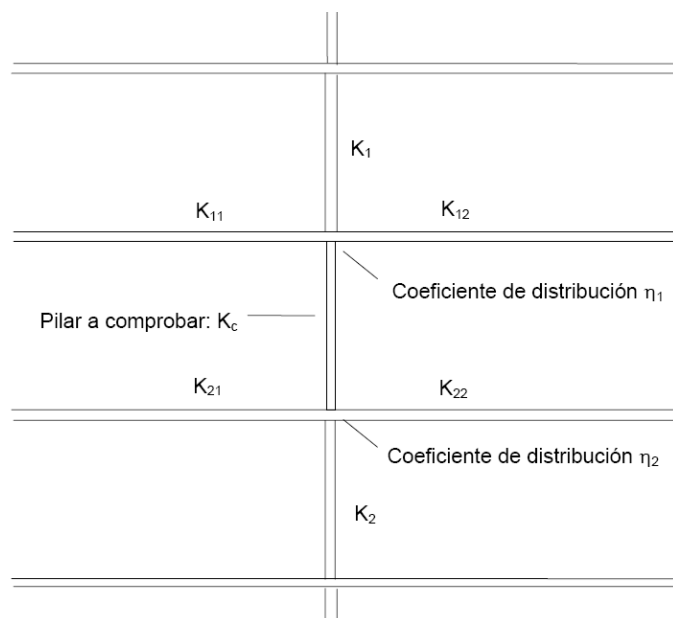
$$\eta_1 = \frac{K_c + K_1}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}} ; \quad \eta_2 = \frac{K_c + K_2}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}}$$

siendo

K_c coeficiente de rigidez EI/L del tramo de pilar analizado.

K_i coeficiente de rigidez EI/L del siguiente tramo de pilar en el nudo i , nulo si no existe

K_{ij} coeficiente de rigidez eficaz de la viga en el nudo i , y posición j .



Los coeficientes de rigidez eficaz de las vigas pueden determinarse de acuerdo con la tabla 6.5 del CTE siempre que permanezcan elásticas bajo los momentos de cálculo.

Tabla 6.5 Coeficiente de rigidez eficaz para una viga en comportamiento elástico

Condiciones de coacción al giro en la viga en el extremo contrario al considerado.	Coeficiente de rigidez eficaz K de la viga	
	sin compresión relevante	con compresión ⁽¹⁾
empotrado	1,0 EI/L	1,0 EI/L (1-0,4 N/N _{cr})
articulado	0,75 EI/L	0,75 EI/L (1 - 1,0 N/N _{cr})
giro igual y de igual signo	1,5 EI/L	1,5 EI/L (1-0,2 N/N _{cr})
giro igual y de signo opuesto	0,5 EI/L	0,5 EI/L (1-1,0 N/N _{cr})
giro θ_a en el nudo considerado y giro θ_b en el otro	$(1 + 0,5 \theta_b / \theta_a) EI/L$	-

⁽¹⁾ N_{cr} se refiere al valor crítico a compresión de la viga considerada. El caso general (-) no está contemplado

Cuando el momento de cálculo en cualquiera de las vigas supere $W_{el}f_{yd}$ debe suponerse que la viga está articulada en el punto o puntos correspondientes.

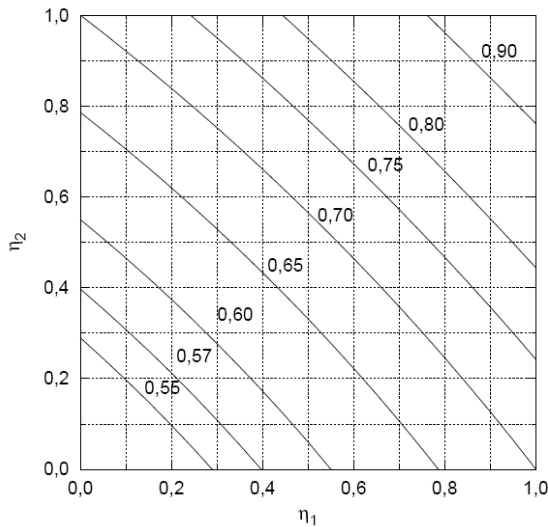
La longitud de pandeo L_k de un tramo de pilar de longitud L unido rígidamente a las demás piezas de un pórtico intraslacional puede obtenerse del cociente:

$$\beta = \frac{L_k}{L} = \frac{1 + 0,145 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0,265 \cdot \eta_1 \eta_2}{2 - 0,364 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0,247 \cdot \eta_1 \eta_2} \leq 1$$

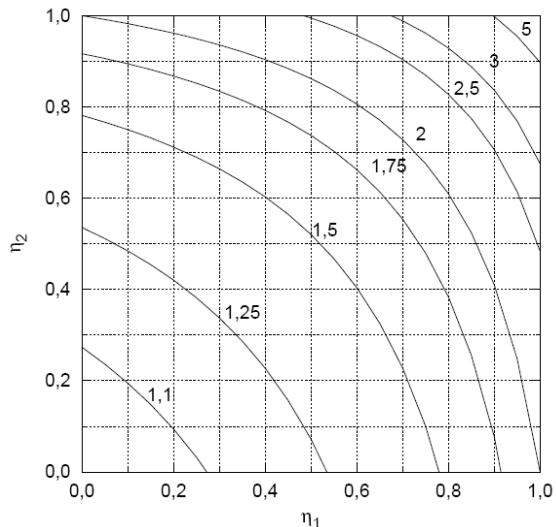
La longitud de pandeo L_k de un tramo de pilar unido rígidamente a las demás piezas de un pórtico traslacional en cuyo análisis no se hayan contemplado los efectos de segundo orden puede obtenerse del cociente:

$$\beta = \frac{L_k}{L} = \sqrt{\frac{1 - 0,2 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 0,12 \cdot \eta_1 \eta_2}{1 - 0,8 \cdot (\eta_1 + \eta_2) + 0,6 \cdot \eta_1 \eta_2}} \geq 1$$

Los valores del coeficiente β puede obtenerse en ambos casos de las figuras siguientes



Intraslacional



Traslacional

Si los tramos sucesivos tienen diferente relación N/N_{cri} , la aproximación de β obtenida, y por tanto la de la misma N_{cri} , están del lado de la seguridad.

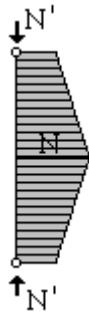
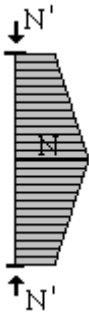
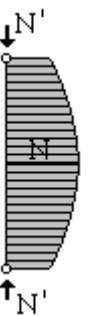
Este planteamiento del CTE es similar al anterior propuesto por la EA-95 aunque cambian los valores de los coeficientes y es preciso estimar la rigidez de las vigas en los nudos para determinar los coeficientes de distribución y las longitudes de pandeo.

7.9.3 Longitud de pandeo para pilares sometidos a esfuerzos axiales variables

En este caso se ha mantenido lo propuesto en la anterior norma NBE-EA-95 que decía que las barras de sección constante solicitadas por esfuerzos axiales que varían de forma lineal o parabólica a lo largo del eje podrán calcularse como sometidas a un esfuerzo axial constante de valor igual al máximo actuante y con la longitud de pandeo igual a:

$$L_k = L \cdot \beta = L \cdot \sqrt{\frac{1 + a \cdot \frac{N_{\min}}{N_{\max}}}{b}}$$

Coeficiente $\beta = \sqrt{\frac{1 + a \cdot \frac{N_{\min}}{N_{\max}}}{b}}$ según el caso					
a	0.880	0.510	1.650	0.930	2.180
b	1.880	3.090	5.420	7.720	0.800
$N_{\min}/N_{\max}$					
0.0	0.729	0.569	0.429	0.359	1.122
0.1	0.761	0.582	0.462	0.376	1.238
0.2	0.792	0.596	0.495	0.392	1.346
0.3	0.818	0.610	0.524	0.407	1.440
0.4	0.846	0.623	0.553	0.421	1.532
0.5	0.875	0.636	0.579	0.434	1.620
0.6	0.901	0.648	0.605	0.449	1.704
0.7	0.927	0.663	0.629	0.462	1.784
0.8	0.950	0.675	0.654	0.474	1.856
0.9	0.975	0.687	0.676	0.488	1.928
1.0	1.000	0.700	0.700	0.500	2.000

Coeficiente $\beta = \sqrt{\frac{1 + a \cdot \frac{N_{min}}{N_{max}}}{b}}$ según el caso					
a	2.180	0.930	1.090	0.350	1.090
b	3.180	7.720	2.090	5.400	0.520
N_{min}/N_{max}					
0.0	0.561	0.359	0.692	0.430	1.384
0.1	0.619	0.376	0.728	0.436	1.456
0.2	0.673	0.392	0.764	0.445	1.528
0.3	0.720	0.407	0.797	0.451	1.594
0.4	0.766	0.421	0.830	0.459	1.660
0.5	0.810	0.434	0.858	0.465	1.716
0.6	0.852	0.449	0.888	0.473	1.776
0.7	0.892	0.462	0.917	0.479	1.834
0.8	0.928	0.474	0.946	0.486	1.892
0.9	0.964	0.488	0.973	0.492	1.946
1.0	1.000	0.500	1.000	0.500	2.000

7.9.4 Longitud de pandeo para pilares de sección variable

También aquí se ha mantenido lo propuesto en la NBE-EA-95 que decía que las barras comprimidas doblemente articuladas de sección ligeramente variable cuyo momento de inercia varíe entre un mínimo I_{min} y un máximo I_{max} se comprobarán con el área media A_{med} a lo largo de la pieza y un momento de inercia medio ponderado I_k , de valor:

$$I_k = c \cdot I_{max} ; \quad c = f\left(v = \sqrt{\frac{I_{min}}{I_{max}}}, a\right)$$

El valor de c se obtiene de la tabla 6.4 entrando con el parámetro v y con la fracción de luz de inercia máxima a especificada en la propia figura incluida en la tabla 6.4 del CT.

La esbeltez mecánica para estas situaciones se determina mediante la expresión:

$$\lambda_k = \frac{L_k}{i}; \quad \text{donde } i = \sqrt{\frac{c \cdot I_{\max}}{A_m}} \quad \text{siendo } A_m = \int_0^L \frac{A_x \cdot dx}{L}$$

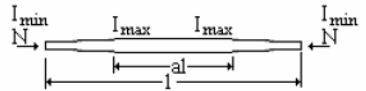
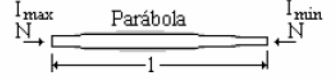
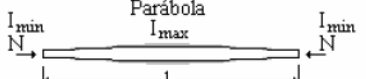
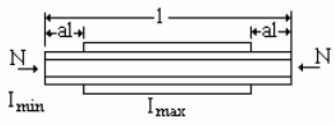
Variación de la sección	Coeficiente c siendo $v = \sqrt{I_{\min} : I_{\max}}$										
	$v \backslash a$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	0.0	0.121	0.220	0.316	0.412	0.509	0.606	0.703	0.801	0.900	1.000
	0.1	0.140	0.247	0.348	0.447	0.542	0.636	0.729	0.820	0.911	1.000
	0.2	0.166	0.284	0.391	0.490	0.585	0.675	0.761	0.844	0.923	1.000
	0.3	0.203	0.333	0.446	0.547	0.639	0.722	0.800	0.871	0.938	1.000
	0.4	0.257	0.403	0.521	0.620	0.705	0.779	0.844	0.902	0.953	1.000
	0.5	0.340	0.502	0.620	0.711	0.784	0.843	0.892	0.933	0.969	1.000
	0.6	0.477	0.641	0.745	0.815	0.867	0.906	0.936	0.961	0.982	1.000
	0.7	0.697	0.814	0.875	0.913	0.938	0.957	0.971	0.983	0.992	1.000
	0.8	0.922	0.951	0.966	0.976	0.983	0.988	0.992	0.995	0.998	1.000
	≥ 0.9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	0.0	0.259	0.389	0.493	0.583	0.665	0.740	0.810	0.877	0.940	1.000
	0.1	0.308	0.448	0.555	0.643	0.719	0.786	0.846	0.902	0.953	1.000
	0.2	0.371	0.520	0.625	0.707	0.775	0.832	0.881	0.925	0.965	1.000
	0.3	0.453	0.605	0.703	0.775	0.830	0.867	0.914	0.947	0.975	1.000
	0.4	0.558	0.702	0.784	0.841	0.883	0.915	0.942	0.965	0.984	1.000
	0.5	0.686	0.801	0.861	0.900	0.927	0.948	0.965	0.979	0.990	1.000
	0.6	0.819	0.890	0.925	0.946	0.962	0.973	0.982	0.989	0.995	1.000
	0.7	0.925	0.954	0.968	0.978	0.984	0.989	0.992	0.996	0.998	1.000
	0.8	0.982	0.988	0.992	0.994	0.996	0.997	0.998	0.999	0.999	1.000
	≥ 0.9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	-	0.273	0.402	0.506	0.595	0.676	0.749	0.817	0.882	0.942	1.000
	-	0.536	0.652	0.728	0.786	0.834	0.875	0.911	0.943	0.973	1.000
	0.1	0.221	0.626	0.846	0.924	0.958	0.976	0.986	0.993	0.997	1.000
	0.2	0.060	0.220	0.421	0.605	0.743	0.837	0.902	0.946	0.977	1.000
	0.3	0.027	0.105	0.221	0.359	0.502	0.635	0.753	0.852	0.933	1.000
	0.4	0.016	0.061	0.134	0.231	0.345	0.472	0.606	0.741	0.873	1.000
	0.5	0.010	0.040	0.090	0.160	0.250	0.360	0.490	0.640	0.810	1.000

Tabla 6.4 CT-SE-A Coeficiente c en piezas de sección variable

7.10 COMPLEMENTOS DE LA NBE-EA-95

Son propuestas de la NBE-EA-95 para el diseño de pilares que o no han sido cubiertos o bien se hace alguna vaga referencia a los mismos en las normas que la sustituyen

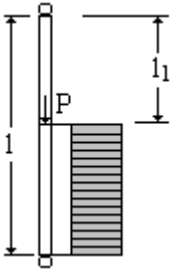
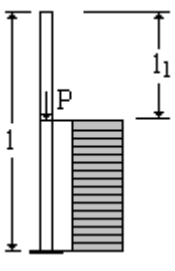
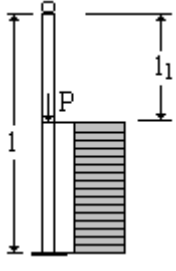
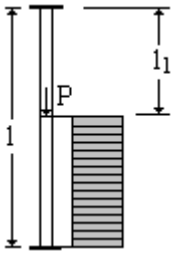
7.10.1 Pilares con cargas concentradas a lo largo de su altura

En el caso de piezas de sección constante con cargas puntuales aplicadas a lo largo de su directriz, el cálculo se realizará aplicando un coeficiente β a su longitud de pandeo, que tendrá en cuenta la aplicación de una o varias cargas a lo largo de ésta.

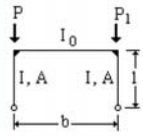
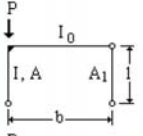
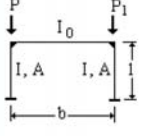
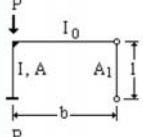
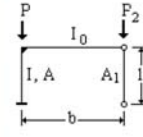
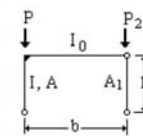
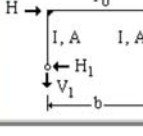
El valor de β se obtiene en función del tipo de sustentación de la pieza y de su posición relativa a lo largo de la directriz l_1/l . En el caso de aplicación de varias cargas a lo largo de la directriz el coeficiente β que se debe aplicar tiene la expresión:

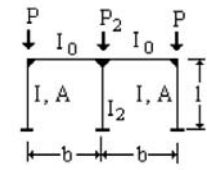
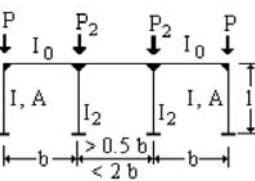
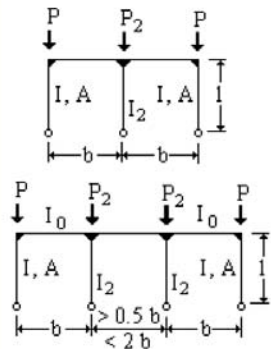
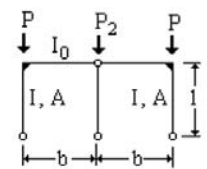
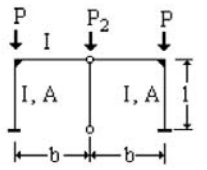
$$L_k = \beta \cdot L ; \quad \text{siendo: } \beta = \sqrt{\sum_1^n \alpha_i \cdot \beta_i^2} ; \quad \alpha_i = \frac{P_i}{\sum_1^n P_i}$$

β_i es el coeficiente correspondiente a P_i , como si ésta carga actuase aisladamente.

								
l_1/l	Pieza biarticulada		Pieza libre y empotrada		Pieza empotrada y apoyada		Pieza biempotrada	
	β	β^2	β	β^2	β	β^2	β	β^2
0.0	1.000	1.000	2.000	4.000	0.699	0.4896	0.500	0.2500
0.1	0.898	0.806	1.800	3.240	0.605	0.3662	0.494	0.2446
0.2	0.805	0.649	1.600	2.560	0.533	0.2850	0.471	0.2219
0.3	0.741	0.549	1.400	1.960	0.481	0.2319	0.430	0.1851
0.4	0.711	0.506	1.200	1.440	0.458	0.2101	0.387	0.1502
0.5	0.707	0.500	1.000	1.000	0.456	0.2085	0.364	0.1326
0.6	0.703	0.494	0.800	0.640	0.440	0.1942	0.362	0.1311
0.7	0.671	0.451	0.600	0.360	0.392	0.1543	0.340	0.1159
0.8	0.592	0.351	0.400	0.160	0.306	0.0938	0.279	0.0781
0.9	0.440	0.194	0.200	0.040	0.173	0.0310	0.168	0.0285
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.0000	0.000	0.0000

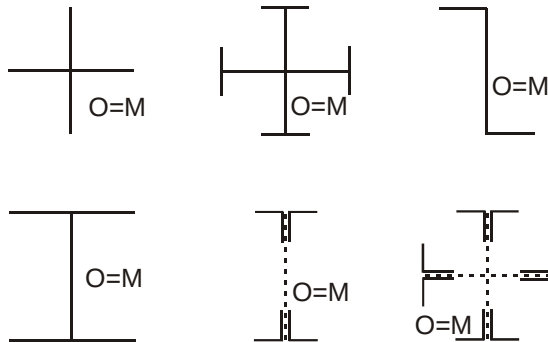
7.10.2 Longitud de pandeo para pilares de pórticos de una altura

Forma del pórtico	Coefficiente β	Magnitudes auxiliares
Caso 1 a 	$\sqrt{0.51(1+m)} \cdot \sqrt{4 + 1.4(c+6s) + 0.02(c+6s)^2}$	$m = \frac{P_1}{P} \leq 1$ $c = \frac{I_0 b}{I_1 \cdot l} \leq 10$ $s = \frac{4I}{b^2 A} \leq 0.2$
Caso 1 b 	$\sqrt{4 + 1.4(c+6s) + 0.02(c+6s)^2}$	$c = \frac{2I_0 b}{I_1 \cdot l} \leq 10$ $s = \frac{I}{b^2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A_1} \right) \leq 0.2$
Caso 1 c 	$\sqrt{0.51(1+m)} \cdot \sqrt{1 + 0.35(c+6s) - 0.017(c+6s)^2}$	$m = \frac{P_1}{P} \leq 1$ $c = \frac{I_0 b}{I_1 \cdot l} \leq 10$ $s = \frac{4I}{b^2 A} \leq 0.2$
Caso 1 d 	$\sqrt{1 + 0.35(c+6s) + 0.017(c+6s)^2}$	$c = \frac{2I_0 b}{I_1 \cdot l} \leq 10$ $s = \frac{I}{b^2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A_1} \right) \leq 0.2$
Caso 1 e 	$\sqrt{1 + 0.96 n} \cdot \sqrt{4 + 1.4(c+6s) + 0.02(c+6s)^2}$	$n = \frac{P_2}{P} \leq 2$ $c = \frac{2I_0 b}{I_1 \cdot l} \leq 10$ $s = \frac{I}{b^2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A_1} \right) \leq 0.2$
Caso 1 f 	$\sqrt{1 + 0.86 n} \cdot \sqrt{1 + 0.35(c+6s) - 0.017(c+6s)^2}$	$n = \frac{P_2}{P} \leq 2$ $c = \frac{2I_0 b}{I_1 \cdot l} \leq 10$ $s = \frac{I}{b^2} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{A_1} \right) \leq 0.2$
Caso 1 g 	$\sqrt{0.5(1+m)} \cdot \sqrt{4 + 1.4(c+6s) + 0.02(c+6s)^2}$	Se tomará como esfuerzo de compresión el valor de V_2, $m = 1$

Forma del pórtico	Coefficiente β	Magnitudes auxiliares
Caso 2 a 	En los soportes extremos: $\frac{1+0.4c_n}{1+0.2c_n} \sqrt{\frac{2+p}{2+t}} \leq 3$ En el soporte intermedio: $\frac{1+0.4c_n}{1+0.2c_n} \sqrt{\frac{2+p}{2+t}} \sqrt{\frac{t}{p}} \leq 3$	$c_n = c + \frac{9}{4}s$ $p = \frac{P_2}{P}$ $t = \frac{I_2}{I}$
Caso 2 b 	En los soportes extremos: $\frac{1+0.4c_n}{1+0.2c_n} \sqrt{\frac{1+p}{1+t}} \leq 3$ En los soportes intermedios: $\frac{1+0.4c_n}{1+0.2c_n} \sqrt{\frac{1+p}{1+t}} \sqrt{\frac{t}{p}} \leq 3$	$c = \frac{I \cdot b}{I_o \cdot l} \leq 10$ $s = \frac{4I}{b^2 A} \leq 0.2$
Caso 2 c 	Como en 2a y 2b substituyendo $\frac{1+0.4c_n}{1+0.2c_n}$ por $\frac{6+1.2c_n}{3+0.1c_n}$ Límite de validez $\beta \leq 6$	$c_n = c + \frac{9}{4}s$ $p = \frac{P_2}{P}$ $t = \frac{I_2}{I}$ $c = \frac{I \cdot b}{I_o \cdot l} \leq 10$ $s = \frac{4I}{b^2 A} \leq 0.2$
Caso 2 d 	$\sqrt{0.51(1+m)} \times \sqrt{4+1.4(c+6s)+0.02(c+6s)^2} \times \sqrt{1+0.48 \cdot n}$	$m = \frac{P_1}{P} \leq 1$ $c = \frac{I \cdot b}{I_o \cdot l} \leq 10$ $s = \frac{4I}{b^2 A} \leq 0.2$ $n = \frac{P_2}{P} \leq 2$
Caso 2 e 	$\sqrt{0.51(1+m)} \times \sqrt{1+0.35(c+6s)-0.017(c+6s)^2} \times \sqrt{1+0.43 \cdot n}$	$m = \frac{P_1}{P} \leq 1$ $c = \frac{I \cdot b}{I_o \cdot l} \leq 10$ $s = \frac{4I}{b^2 A} \leq 0.2$ $n = \frac{P_2}{P} \leq 2$

7.10.3 Pandeo espacial

Se trata de un fenómeno no cubierto por el CTE que se describe a continuación siguiendo las propuestas de la anterior norma Española. Deberá ser tenido en cuenta en piezas comprimidas que presenten una baja rigidez torsional como suele ocurrir con las de sección abierta y débil espesor. Puede ser por torsión pura o por torsión y flexión.

- Pandeo por torsión pura de piezas comprimidas.

Una pieza a compresión centrada sólo pandeará por torsión pura si su eje baricéntrico coincide con su eje de torsión. Situación que sólo se da en piezas con dos ejes de simetría o antimetría.

Resulta evidente que para que este tipo de pandeo sea determinante, la carga crítica deberá ser menor que la asociada al fallo por pandeo plano. Estos casos solamente se presentan en piezas de sección abierta y pared delgada con rigidez torsional muy baja.

Para el tipo de piezas mencionadas, el pandeo por torsión pura puede darse si se cumple

$$i_0 = \sqrt{i_x^2 + i_y^2} > i_T$$

siendo

i_0 = Radio de giro polar

$$i_T = \text{Radio de torsion: } i_T = \sqrt{\frac{I_A}{I_Y} \left(\frac{\beta \cdot L}{\beta_0 \cdot d_0} \right)^2 + 0,039(\beta \cdot L)^2 \frac{I_T}{I_Y}}$$

i_y = Radio de giro respecto del eje de inercia débil

I_A = Módulo de alabeo de la sección referido al centro de esfuerzos cortantes

I_T = Módulo de torsión

β = Coeficiente que mide la coacción a flexión en los extremos de la pieza

β_0 = Coeficiente que mide la coacción al alabeo en los extremos de la pieza.

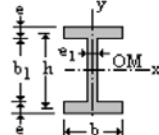
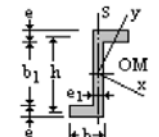
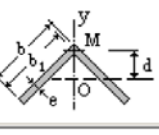
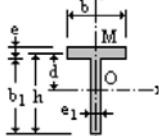
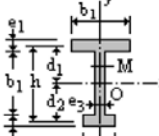
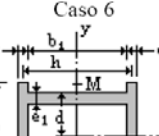
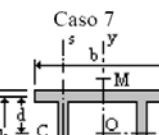
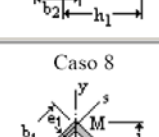
$\beta_0=1 \Rightarrow$ alabeo libre de los extremos. $\beta_0=0,5 \Rightarrow$ alabeo totalmente impedido

d_0 = Distancia entre c.d.g. de los elementos de unión en los extremos ($d_0 \approx 0,8L$)

Una vez conocidos los radios de giro, la esbeltez de torsión se obtiene mediante:

$$\lambda_T = \frac{\beta \cdot L}{i_y} \cdot \frac{i_0}{i_T}$$

En las series de perfiles laminados IPs y HEs, es determinante el pandeo por flexión para cualquier valor de β_0 . La tabla da características de torsión de algunas secciones.

Sección	Coordenadas del centro de esfuerzos cortantes M	Módulo de torsión I_T cm^4	Módulo de alabeo I_A cm^6
Caso 1 	$x_0=0$ $y_0=0$	$\frac{2be^3 + b_1e_1^3}{3}$	$I_y \frac{h^2}{4}$
Caso 2 	$x_0=0$ $y_0=0$	$\frac{2be^3 + b_1e_1^3}{3}$	$I_A = \frac{b^3h^2e}{12} \cdot \frac{be + 2he_1}{2be + he_1}$
Caso 3 	$x_0=0$ $y_0=d$	$\frac{2b_1e^3}{3}$	$\frac{b_1^3e^3}{18}$
Caso 4 	$x_0=0$ $y_0=d$	$\frac{be^3 + b_1e_1^3}{3}$	$\frac{b^3e^3}{144} + \frac{h^3e_1^3}{36}$
Caso 5 	$x_0=0$ $y_0 = \frac{d_1I_{1y} - d_2I_{2y}}{I_{1y} + I_{2y}}$	$\frac{b_1e_1^3 + b_2e_2^3 + b_3e_3^3}{3}$	$\frac{I_{1y}I_{2y}}{I_{1y} + I_{2y}} h^2$
Caso 6 	$x_0=0$ $y_0 = d \left(1 + \frac{h^2 A}{4I_y} \right)$	$\frac{2be^3 + b_1e_1^3}{3}$	$\left[I_x + d^2 A \left(1 - \frac{h^2 A}{4I_y} \right) \right] \frac{h^2}{4}$
Caso 7 	$x_0=0$ $y_0 = d \left(1 + \frac{h^2 A}{4I_y} \right) - 2h \frac{I_{2s}}{I_y}$	$\frac{1 + 0.4c_n}{1 + 0.2c_n} \sqrt{\frac{1+p}{1+t}} \leq 3$	$\left[I_x + d^2 A \left(1 - \frac{h^2 A}{4I_y} \right) \right] \frac{h^2}{4} + 2(I_{2s} - b_1cA_2)h^2 + \frac{I_{2s}}{I_y} hh^2 dA - 4 \frac{I_{2s}^2}{I_y} h^2$
Caso 8 	$x_0=0$ $y_0 = d + \sqrt{2} \left(cb_1^2 \frac{A_2}{I_y} - b_1 \frac{I_{2s}}{I_y} \right)$	$\frac{2b_1e_1^3 + 2b_2e_2^3}{3}$	$I_y (2d^2 - y_0^2) + 2I_{2s}b_1 \cdot (b_1 - 2d) + 4db_1^2cA_2$

- Pandeo por flexión y torsión de piezas comprimidas

Este tipo de fallo se puede presentar en piezas asimétricas o con simetría simple en las que el c.d.g. no coincide con el centro de esfuerzos cortantes. Por ejemplo perfiles en U, en T simple, en doble T con simetría solo respecto del plano del alma, angulares, etc.

El fenómeno se acentúa cuanto mayor sea la distancia entre los dos centros. Dentro de las series de perfiles laminados, la importancia es máxima en los perfiles UPN o secciones asimilables a estos, disminuyendo para los TD y los perfiles doble T con simetría simple. Apartado 4.5 EA-95

7.11 CONCLUSIONES

- Un pilar robusto (con $\bar{\lambda} \leq 0,2$) puede alcanzar la resistencia plástica total de la sección transversal y no precisa ser comprobado a pandeo, aunque el pandeo local puede reducir la capacidad de las secciones de clase 4.
- Si $\bar{\lambda} > 0,2$, debe de considerarse una reducción de la carga debido al pandeo. Los pilares con esbelteces medias fallan por pandeo anelástico, mientras que los pilares muy esbeltos lo hacen por pandeo elástico.
- Las imperfecciones en pilares reales reducen su capacidad resistente por debajo de la pronosticada por la teoría.
- Las curvas europeas de pandeo proporcionan el coeficiente de reducción para el modo más relevante de pandeo dependiendo de la forma de la sección transversal, del proceso de fabricación, de la esbeltez de referencia y del eje respecto del cual la pieza puede pandear. Estas curvas tienen en cuenta propuestas experimentales y teóricas y proporcionan resultados fiables.
- La *resistencia de cálculo a pandeo* se basa en la disminución de la *resistencia a compresión de la sección transversal* por medio de un *factor de reducción* χ para el modo de pandeo mas significativo.