

Capítulo 1

Señales y sistemas en variable discreta

1.1. Introducción

El Tratamiento Digital de Señales (TDS) consiste en la manipulación de las señales para el manejo de la información que contienen, con el objetivo de extraer dicha información de ellas, introducirla o adecuar las señales a un cierto sistema. No sólo se desarrolla en comunicaciones, sino que cualquier sucesión de números, datos o valores es una señal que se puede procesar, independientemente de su origen. Así, podemos trabajar con señales médicas (electroencefalograma, electrocardiograma, etc), medidas (consumo eléctrico, temperatura, humedad, etc), valores bursátiles, señales de prospección, imágenes, sonido, etc. En general, entenderemos por señal cualquier cantidad que varíe con el tiempo, el espacio o cualquier otra variable o conjunto de variables independientes.

Las señales de interés admiten una representación bien eléctrica o bien numérica, en unas ocasiones de forma directa debido a su propia naturaleza y en otras ocasiones mediante la aplicación de un transductor que convierte algún parámetro o valor a dicha representación (figura 1.1).

Ejemplo 1.1. *Representación de una señal de audio (sonido).*

Un sonido es una variación en la presión acústica que se produce en un punto concreto del espacio. Para representar el sonido que se puede escuchar en ese punto podemos acudir a una representación numérica (el valor de presión acústica en ese punto para cada instante de tiempo) o eléctrica empleando como transductor un micrófono, que produce una señal eléctrica cuya tensión depende de la presión acústica que recibe.

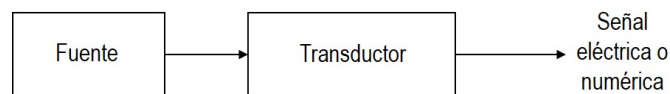


Figura 1.1: Representación eléctrica o numérica de una señal.

1.2. Tipos de señales

Se pueden distinguir varios tipos de señales empleando diferentes formas de clasificación. Algunas de las más interesantes son las siguientes:

- Señal unidimensional: depende de una única variable independiente
- Señal M -dimensional: dependencia con M dimensiones (variables)
- Señal de variable continua o en tiempo continuo (analógica): está definida para todos los valores de tiempo entre $-\infty$ y $+\infty$.
- Señal de variable discreta o en tiempo discreto (muestreada): definida sólo para determinados valores de la variable independiente
- Señal determinista: puede ser definida de forma matemática explícita
- Señal aleatoria: no puede expresarse mediante fórmulas explícitas con cierto grado de precisión
- Señal de valor continuo: puede tomar todos los valores posibles en un rango determinado
- Señal de valor discreto: toma sólo un cierto conjunto de valores posibles
- Señal real: los valores que toma la señal son reales
- Señal compleja: puede tomar valores complejos
- Señal digital: señal de variable discreta de valor discreto

En la figura 1.2 se puede comprobar cómo se realizan algunas transformaciones sobre una señal de variable continua y amplitud continua definida en el dominio temporal, mediante la discretización de su amplitud (cuantificación), de su variable independiente (muestreo) o de ambas (digitalización).

Una *señal de variable discreta* es, según las definiciones anteriores, una secuencia de números reales o complejos, deterministas o aleatorios, que, si es unidimensional, representaremos como $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$. La variable n no tiene por qué representar *tiempo*, que es lo más intuitivo. Podría representar, por ejemplo, una coordenada espacial o distancia. Por ejemplo, una señal puede representar el valor de la temperatura en un dominio espacial (en diferentes posiciones). Conviene establecer que la notación considerada en este texto emplea corchetes $[\cdot]$ para indicar la dependencia de variables discretas y paréntesis $(\cdot)$ para variables continuas, con el ánimo de simplificar el seguimiento de expresiones complejas en las que se podría perder de vista el significado de las variables. En el caso de una dependencia de una señal x , por ejemplo, con una variable discreta n y una variable continua ω , se denotará $x[n, \omega]$ combinando ambas notaciones.

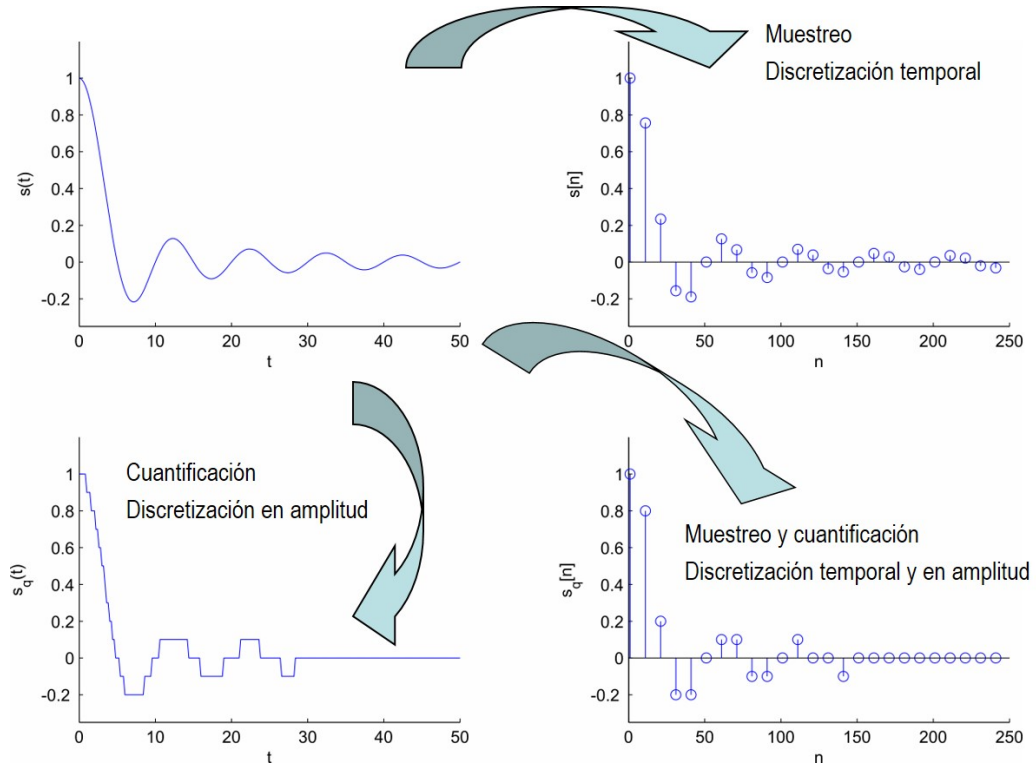


Figura 1.2: Discretización de una señal.

Las señales de variable discreta no están definidas para valores no enteros de n , de forma que sus representaciones son discontinuas, como la que aparece en la figura 1.3.

En muchas aplicaciones de procesamiento digital de señales, los valores de las secuencias se considera que se encuentran típicamente almacenados en memorias digitales (o probablemente lo están realmente). El índice puede entenderse como una referencia de la posición que ocupa un valor en la memoria. En la mayoría de aplicaciones el primer valor con el que se trabaja corresponderá al índice $n = 0$, pero eso podría no ser así. Para muchos de los cálculos será conveniente considerar que la secuencia es infinita, aunque no se conozcan más que un cierto número de valores. Matemáticamente, las señales serán siempre de duración infinita, considerando que los valores no conocidos de las señales deterministas son cero.

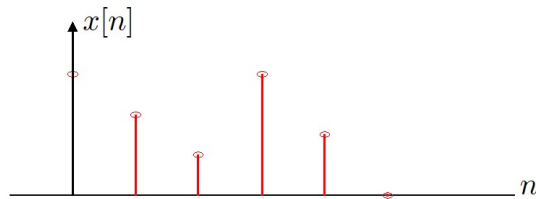


Figura 1.3: Representación discontinua de una señal.

Gran cantidad de aplicaciones trabajan con señales de variable discreta que provienen del muestreo de una señal de variable continua (con un conversor analógico-digital). La señal de variable continua (analógica) se muestrea con un período de muestreo T_S . Este período de muestreo tampoco tiene por qué representar *tiempo*, sino distancia entre muestras en el dominio en que está definida la señal continua. También en este caso podría representar, por ejemplo, una coordenada espacial. La señal de variable discreta se relaciona con la de variable continua de la que procede como $x[n] = x_a(nT_S)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Se denomina frecuencia o tasa de muestreo al inverso del período de muestreo, $F_S = 1/T_S$. Sus unidades son *muestras/u*, donde u representa las unidades del período de muestreo. Por ejemplo, si el dominio de la señal analógica es el tiempo, $u = \text{segundos}$, y las unidades de la tasa de muestreo son *muestras/segundo* (Hz). Igualmente, si el dominio de la señal analógica es el espacio, $u = \text{metros}$, y las unidades de la tasa de muestreo son *muestras/metro*.

Se denomina pulsación de muestreo a $\Omega_S = 2\pi F_S$. Sus unidades son *radianes/u*, donde u representa de nuevo las unidades del período de muestreo.

No todas las señales de variable discreta provienen del muestreo de señales de variable continua, sino que algunas son de naturaleza discreta: valores diarios de bolsa, estadísticas de población, inventarios de almacenamiento, etc. Sin embargo, siempre existe de alguna manera el concepto de período de muestreo asociado, aunque no exista propiamente un muestreo: tiempo entre cotizaciones de bolsa, tiempo entre estudios estadísticos de población, tiempo entre inventarios de almacenamiento, etc.

1.3. Operaciones elementales con secuencias

Cuando se requiera operar con varias secuencias es conveniente recordar que, aunque $x[n]$ se emplea para denotar a una señal concreta, dado un determinado valor del índice $n = n_0$, el valor $x[n_0]$ es un escalar y se opera con él como tal.

Suma

Las secuencias se suman elemento a elemento, cada uno con el de mismo índice n .

Ejemplo 1.2. Suma de secuencias

Sean las secuencias $x[n] = [1, 2, 3]$, $n = 0 \dots 2$ e $y[n] = [1, 1, 1, 1]$, $n = 0 \dots 3$. La secuencia $z[n] = x[n] + y[n]$ está dada por $z[n] = [2, 3, 4, 1]$, $n = 0 \dots 3$. Nótese que $z[3] = 0 + 1 = 1$ ya que $x[3]$ no está especificado, y por tanto es de valor nulo conforme a la notación empleada.

Multiplicación

Las secuencias igualmente se multiplican elemento a elemento, respetando los valores de mismo índice n .

Ejemplo 1.3. *Multiplicación de secuencias*

Dadas las secuencias del ejemplo anterior, la secuencia $w[n] = x[n] \cdot y[n]$ está dada por los valores $w[n] = [1, 2, 3], n = 0 \dots 2$, siendo $w[3] = 0 \cdot 1 = 0$.

Cambio de escala

Para multiplicar una secuencia por un escalar se multiplica cada elemento por dicho escalar.

Ejemplo 1.4. *Cambio de escala de una secuencia*

Dada la secuencia $x[n] = [1, 2, 3], n = 0 \dots 2$, la secuencia $r[n] = 3x[n]$ será $r[n] = [3, 6, 9], n = 0 \dots 2$.

Desplazamiento

El desplazamiento consiste en la modificación del punto de inicio de una determinada secuencia. Así, por ejemplo, $y[n] = x[n - n_0]$ es una secuencia igual a $x[n]$ pero desplazada n_0 posiciones hacia la derecha del eje n (horizontal).

Abatimiento (respecto al origen)

El abatimiento consiste en la inversión del orden de los elementos de una secuencia, de forma que el primero pasa a ser el último y viceversa. En el abatimiento respecto al origen, el elemento situado en $n = 0$ mantiene su posición como referencia, y son los demás elementos los que se mueven. Así, $y[n] = x[-n]$ es una secuencia igual a $x[n]$ pero con sus elementos invertidos respecto al origen. Es importante notar que $y[n] = x[-n - n_0]$ es una secuencia igual a $x[n - n_0]$ pero invertida respecto al origen. Es habitual pensar que la señal abatida de $x[n - n_0]$ sería $x[-n + n_0]$, pero se puede comprobar que eso es incorrecto. El cambio de signo únicamente debe aplicarse sobre la variable n , y no sobre cualquier desplazamiento que pueda afectar a dicha variable.

Diezmado

El diezmado¹ consiste en la obtención de una nueva secuencia formada únicamente por algunas de las muestras de la original. La secuencia $y[n] = x[Nn]$ es una secuencia igual a $x[n]$ pero diezmada por un factor N , denominado *factor de diezmado*. Igualmente $y[n] = x[Nn - n_0]$ es una secuencia igual a $x[n - n_0]$ pero diezmada por N .

¹Diezmado es también el nombre de otra operación relacionada, pero más compleja, que se estudiará más adelante. Es importante conocer en cada momento a cuál se hace referencia.

Ejemplo 1.5. *Diezmado de una secuencia*

Sea la secuencia $x[n] = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], n = -4 \dots 4$. La secuencia $y[n] = x[2n]$ será $y[n] = [1, 3, 5, 7, 9], n = -2 \dots 2$.

1.4. Secuencias asociadas

Dada una determinada secuencia, existen una serie de secuencias asociadas a ella y que tienen utilidad en diferentes aplicaciones.

Partes par e impar de una secuencia

La secuencia *parte par* de una secuencia dada $x[n]$ se define como

$$x_p[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2} \quad (1.1)$$

La secuencia *parte impar* de una secuencia dada $x[n]$ se define como

$$x_i[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2} \quad (1.2)$$

Una secuencia es par cuando su parte impar es nula. Una secuencia es impar cuando su parte par es nula.

Partes hermítica y antihermítica de una secuencia

La secuencia *parte hermítica* de una secuencia dada $x[n]$ se define como

$$x_h[n] = \frac{x[n] + x^*[-n]}{2} \quad (1.3)$$

La secuencia *parte antihermítica* de una secuencia dada $x[n]$ se define como

$$x_{ah}[n] = \frac{x[n] - x^*[-n]}{2} \quad (1.4)$$

Una secuencia es hermítica si se cumple que $x[n] = x^*[-n]$, y por tanto es igual a su parte hermítica, y su parte antihermítica es nula.

Partes real e imaginaria de una secuencia

La secuencia *parte real* de una secuencia dada $x[n]$ se define como

$$x_{re}[n] = \frac{x[n] + x^*[n]}{2} \quad (1.5)$$

La secuencia *parte imaginaria* de una secuencia dada $x[n]$ se define como

$$x_{im}[n] = \frac{x[n] - x^*[n]}{2j} \quad (1.6)$$

donde j es la unidad imaginaria²

Relación entre una secuencia y sus secuencias asociadas

Se pueden comprobar las siguientes relaciones:

$$x[n] = x_p[n] + x_i[n] \quad (1.7)$$

$$x[n] = x_h[n] + x_{ah}[n] \quad (1.8)$$

$$x[n] = x_{re}[n] + jx_{im}[n] \quad (1.9)$$

1.5. Algunas secuencias de especial interés

1.5.1. El impulso unitario

El impulso unitario o *delta discreta* es una secuencia, $\delta[n]$, definida como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ 0, & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Se trata de una secuencia que desempeña en variable discreta el mismo papel (o similar) que la delta de Dirac (impulso unidad) en variable continua. Se puede considerar una señal que se emplea para seleccionar un valor concreto de otra. Además, se cumple que cualquier señal de variable discreta puede descomponerse como una combinación lineal de impulsos unitarios, escaladas y desplazadas de forma que cada una de ellos coincide con la muestra correspondiente de la señal original:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (1.11)$$

De este modo, toda señal puede representarse como una suma (elemento a elemento) de infinitas deltas desplazadas a cada instante y escaladas por el valor que toma la señal en el instante correspondiente.

²Aunque la notación más habitual para la unidad imaginaria es i , en ingeniería suele representarse como j para evitar confusiones con la representación habitual de la corriente eléctrica.

La delta discreta está relacionada con la delta de Kronecker, $\delta_{i,j}$:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\delta[i - j] = \delta_{i,j} \quad (1.13)$$

$$\delta[n] = \delta_{n+i,j} \quad (1.14)$$

La delta discreta constituye probablemente la señal más importante dada la posibilidad de representar cualquier señal a través de ella y su comportamiento en diferentes operaciones. Es un instrumento determinante para facilitar muchas de las técnicas que se tratarán más adelante.

1.5.2. Escalón unidad

El escalón unidad (o simplemente *escalón*) $\mu[n]$ se define como:

$$\mu[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n \geq 0, \\ 0, & \text{si } n < 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Del mismo modo que en variable continua se cumple que la función delta de Dirac es la derivada de la función escalón unidad, en variable discreta se cumple

$$\delta[n] = \mu[n] - \mu[n - 1] \quad (1.16)$$

La función derivada típicamente empleada en variable continua se convierte en una diferencia en variable discreta, pero el significado es el mismo. También es posible expresar la función escalón en función de la delta discreta (al igual que cualquier otra secuencia):

$$\mu[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k] \quad (1.17)$$

La función escalón juega un papel normalmente secundario en las diferentes técnicas que se explicarán posteriormente pero, como se verá, es habitual expresar la respuesta de ciertos sistemas como combinaciones de escalones unitarios.

1.5.3. Exponencial compleja

Una de las secuencias más relevantes para la representación de señales en dominios transformados, y muy especialmente en términos de frecuencia, es la exponencial compleja. Se define como:

$$e^{j\omega_0 n} = \cos(n\omega_0) + j \sin(n\omega_0) \quad (1.18)$$

donde el valor ω_0 es una constante real llamada *pulsación discreta*, o muchas veces simplemente *pulsación*. Conviene notar que dando diferentes valores a la pulsación, podríamos hacer una representación de la exponencial compleja no en términos de la variable discreta

n sino de la variable continua ω . En dicha representación, para un valor dado de n una exponencial compleja únicamente tendría valores no nulos para el valor concreto $\omega = \omega_0$, teniendo valor nulo para el resto de valores de ω . Se suele decir que una exponencial compleja es una representación de un valor de pulsación “puro” o que una exponencial compleja concreta tiene una única pulsación. Este hecho resultará de gran utilidad para la representación de las pulsaciones que contiene una señal genérica, la cual podremos descomponer como una combinación de exponenciales complejas.

1.6. Representación vectorial de secuencias deterministas

Las señales deterministas de variable discreta están definidas para cualquier valor de la variable independiente n , y por tanto se consideran definidas para duración infinita. Sin embargo, una señal de variable discreta se denomina *señal de duración finita* o de *soporte finito* si es igual a cero para todos los valores de n fuera de un intervalo finito $[n_1, n_2]$ (por ejemplo, el impulso unidad). Una señal de variable discreta que no es de duración finita se dice que es de *duración infinita* o de *soporte infinito* (por ejemplo, el escalón unidad o la exponencial compleja). No se debe olvidar que sólo es una denominación: matemáticamente la duración de todas las señales es infinita, aunque sólo algunos de sus valores sean no nulos. Muchas de las herramientas matemáticas empleadas en tratamiento digital de señales se basan en la duración infinita de las señales.

Sin embargo, las señales con las que se trabaja en aplicaciones reales no pueden ser de duración infinita, dada la imposibilidad material de trabajar con infinitos valores. Gran parte de las técnicas de tratamiento digital de señal se basan en compensar o corregir los problemas aparecidos por el hecho de no trabajar con señales de duración infinita, que serían requeridas por muchas de las herramientas empleadas. Para ello, las secuencias discretas se suelen tratar como vectores pertenecientes a espacios vectoriales de dimensión finita o infinita (según sea el caso).

Se denomina vector a un conjunto discreto de valores reales o complejos, que por conveniencia siempre se representan como una columna:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

donde N es la dimensión del vector (que conceptualmente podría ser infinita). El vector traspuesto y el hermítico se definen como:

$$\mathbf{x}^T = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}] \quad (1.20)$$

$$\mathbf{x}^H = [x_0^*, x_1^*, \dots, x_{N-1}^*] \quad (1.21)$$

donde $(.)^*$ indica el conjugado.

Dada la definición de vector, una señal de variable discreta puede representarse de una manera muy sencilla asociando sus valores no nulos con elementos del vector. Así, si una

señal tiene valores nulos fuera del intervalo $n \in [0, N - 1]$, se puede asociar:

$$\mathbf{x}^T = [x[0], x[1], \dots, x[N - 1]] \quad (1.22)$$

y trabajar con el vector $\mathbf{x}$ que representa completamente a la secuencia $x[n]$. Esto abrirá la puerta al trabajo con todas las herramientas que proporciona el álgebra vectorial. Para ello, es importante completar la definición del álgebra a emplear, siendo necesaria la definición de un espacio vectorial de señales de variable discreta, y por tanto la definición de un producto interno (escalar), una norma y una métrica.

El producto escalar de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ de valores complejos y dimensión N se define como:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathbf{a}^H \mathbf{b} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n^* \cdot b_n \quad (1.23)$$

La norma de un vector puede definirse de varias formas. La más habitual es la norma *euclídea* o norma $l - 2$ (también denotada como L_2 en muchos textos), que se define como la raíz cuadrada del producto escalar de un vector consigo mismo:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 \right\}^{1/2} \quad (1.24)$$

En muchas ocasiones se emplea la norma al cuadrado, dado que coincide con la energía de una señal. Además, se suele omitir el subíndice “2” dado que esta norma se emplea casi exclusivamente. De no ser así, debería explicitarse el tipo de norma que se emplea. Nótese que además se cumple:

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^H \mathbf{x} \quad (1.25)$$

con lo que se puede calcular la norma (o el producto escalar) como un mero producto de vectores, empleando el hermítico del primero de ellos.

La definición de un producto escalar y una norma nos permiten establecer parecidos entre vectores, distancias, etc. Por ejemplo, la relación geométrica entre dos vectores establecida por medio del producto escalar se puede expresar también como:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos \theta \quad (1.26)$$

donde θ representa el ángulo que forman ambos vectores en el espacio vectorial definido³. La relación anterior indica que se cumple que

$$|\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \quad (1.27)$$

$$|\mathbf{a}^H \mathbf{b}|^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \quad (1.28)$$

Esta desigualdad, conocida como *desigualdad de Cauchy-Schwarz*, se convierte en una igualdad cuando el ángulo entre los vectores es cero, es decir, cuando ambos son colineales

³Aunque el ángulo entre dos señales es un concepto artificial, matemáticamente resulta de utilidad aprovechar su definición dentro del espacio vectorial con el que se está trabajando. Permite razonar algunos conceptos desde una perspectiva matemática aunque no tenga relación física con el problema que se está estudiando.

o proporcionales. Si recordamos que los vectores están formados por valores de señales, ambos son iguales salvo un factor de escala, y por tanto ambas señales también lo son. Así, podemos inferir que cuando el producto escalar alcanza su máximo valor indica que hay un máximo parecido entre las dos señales representadas por los vectores. Igualmente, si el producto es nulo, se dice que ambas señales son *ortogonales*, lo que indica que el parecido entre ambas es mínimo.

A partir de esta conclusión, se define la *coherencia* entre dos señales, γ , como

$$|\gamma|^2 = \frac{|\mathbf{a}^H \mathbf{b}|^2}{\|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2} \leq 1 \quad (1.29)$$

La coherencia es máxima (valor 1) cuando las dos señales son proporcionales.

La medida que falta por definir es la métrica del espacio vectorial, la distancia entre dos vectores, que se define como la norma del vector diferencia:

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - b_n|^2 \right\}^{1/2} \quad (1.30)$$

De nuevo, en muchas aplicaciones resultará más interesante trabajar con distancias al cuadrado.

Es conveniente hacer notar que la definición del producto escalar ha condicionado la definición de todas las demás medidas. Se pueden obtener igualmente a partir de otras definiciones del producto escalar que resulten más adecuadas para los problemas que se estén estudiando. Por ejemplo, para señales de potencia media finita podríamos emplear la siguiente:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N a_n^* b_n \quad (1.31)$$

O para señales aleatorias, modeladas como procesos estocásticos:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = E[a^*[n]b[n]] \quad (1.32)$$

donde $E[\cdot]$ indica la *esperanza matemática* o *valor esperado*.

Todas estas nuevas definiciones se explicitarán cuando se trate con señales que las requieran. Por el momento seguiremos trabajando con la definición dada en (1.23).

1.7. Algunas características de las secuencias

Valor medio o componente continua

El valor medio m_x de una señal $x[n]$ se define como:

$$m_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n] \quad (1.33)$$

Valor de pico

El valor de pico x_p es

$$x_p = \max\{|x[n]|\} \quad (1.34)$$

Valor cuadrático instantáneo

El valor cuadrático instantáneo de una secuencia es $|x[n]|^2$. Nótese que es dependiente de n , por lo que también es una secuencia.

Valor cuadrático o energía

Se define como

$$E_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (1.35)$$

Valor cuadrático medio o potencia media

Viene dado por la siguiente expresión:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (1.36)$$

Valor eficaz

El valor eficaz de una secuencia coincide con $\sqrt{P_x}$.

Consideraciones adicionales

Observando la definición de energía y de potencia media se puede comprobar que:

- Si E_x es finita (es decir, $0 < E_x < \infty$), entonces se dice que $x[n]$ es una señal de energía finita, o simplemente *señal de energía*.
- Muchas señales que poseen energía infinita tienen potencia media finita. Si P_x es finita (y distinta de cero), $x[n]$ es una señal de potencia finita, o simplemente *señal de potencia*.
- Si E_x es finita, entonces $P_x = 0$.
- Si E_x es infinita, entonces P_x puede ser finita o infinita.

1.8. Correlación entre señales y autocorrelación

En los apartados anteriores se ha comprobado la importancia del producto escalar como medida del parecido entre dos señales. La distancia entre ellas también se ha definido a partir de la norma de la diferencia, siendo la norma de nuevo un producto escalar. En muchos casos es necesario estudiar el parecido de una señal no con otra sino con una versión desplazada de sí misma. Igualmente, puede ser necesario comprobar la relación o parecido que existe entre diferentes partes de la misma señal. De alguna manera eso permite comprobar algunos aspectos como la existencia de redundancia (en una señal redundante hay mucha información muy relacionada con la que hay en otras partes de la señal) o relaciones de causa y efecto (comportamientos de la señal o del fenómeno que representa que se deben a comportamientos anteriores, por ejemplo, y que son una consecuencia que sigue siempre a éstos). Si empleamos la coherencia para estudiar el parecido de una señal consigo misma, veremos que toma como valor la unidad, y que su “auto-producto” escalar vale su norma al cuadrado. Sin embargo, desplazar una de las dos versiones de la señal que intervienen en la operación conduce a otros resultados.

Denominamos *correlación cruzada*, R_{xy} , al producto escalar de dos señales en determinados valores predefinidos de la variable independiente. El resultado de ese producto escalar dependerá de cuáles sean esos valores, por lo que la correlación es una función de dos variables:

$$R_{xy}[n_1, n_2] = \langle x[n_1], y[n_2] \rangle \quad (1.37)$$

Igualmente, llamamos *autocorrelación*, R_{xx} ⁴, a la correlación entre dos versiones de la misma señal en diferentes valores de n :

$$R_{xx}[n_1, n_2] = \langle x[n_1], x[n_2] \rangle \quad (1.38)$$

Estas definiciones de correlación cruzada y autocorrelación son generales, pero normalmente se requiere una versión más sencilla de ambas en las que el interés está en la comparación entre versiones desplazadas independientemente de los instantes, y considerando únicamente como parámetros el desplazamiento entre las dos señales comparadas. En el caso de las señales deterministas, el interés en este tipo de comparación puede ser inmediato; en el caso de las señales aleatorias dependerá de ciertas propiedades estadísticas de las señales comparadas que estudiaremos más adelante. Bajo estas condiciones, las ecuaciones (1.37) y (1.38) quedan:

$$R_{xy}[m] = \langle x[n], y[n + m] \rangle \quad (1.39)$$

$$R_{xx}[m] = \langle x[n], x[n + m] \rangle \quad (1.40)$$

donde m es una variable discreta definida en el mismo dominio que n pero que representa el desplazamiento aplicado a la señal. Para no complicar la notación, la diferencia entre estas expresiones y las anteriores estará en el uso de una única variable independiente.

⁴En muchos textos se emplean otras notaciones, siendo una de las más habituales R_x , con un único subíndice. En este texto se emplean los dos para considerar la autocorrelación como un caso particular de la correlación cruzada y así unificar la forma de trabajo con ambas.

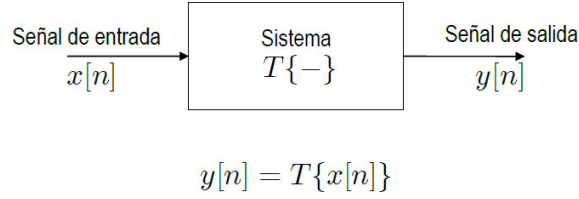


Figura 1.4: Sistema: transformación de una señal de entrada en otra de salida mediante un operador.

En el caso de una señal determinista, haciendo uso de la definición que se ha propuesto para el producto escalar, la autocorrelación queda:

$$R_{xx}[m] = \sum_{-\infty}^{\infty} x^*[n]x[n+m] \quad (1.41)$$

Igualmente, para una señal aleatoria será:

$$R_{xx}[m] = E[x^*[n]x[n+m]] \quad (1.42)$$

donde se puede recordar que $E[\cdot]$ representa la esperanza matemática.

Con estas definiciones, se puede comprobar que la autocorrelación de una señal real (determinista o aleatoria) es simétrica y tiene el máximo en $m = 0$. Esto último se entiende notando que al tratarse de una comparación entre una señal y una versión desplazada de la misma, no puede haber parecido mayor que el caso de desplazamiento nulo, en el que ambas versiones de la señal son realmente la misma. Asimismo, la simetría es fácilmente comprobable dado que un desplazamiento m_1 en la segunda versión de la señal representa la misma operación que un desplazamiento $m_2 = -m_1$ en la primera versión, produciendo necesariamente el mismo resultado. Sin embargo, en el caso de señales no reales o de correlaciones cruzadas estas afirmaciones no son en general ciertas.

1.9. Sistemas: definición

Un sistema es un operador matemático o mapeo que transforma una señal (entrada) en otra señal (salida) por medio de un conjunto definido de reglas o funciones Fig. 1.4.

La notación $T\{\cdot\}$ representa la transformación que aplica un sistema genérico a una señal de entrada para producir una salida. Esta transformación puede especificarse de diferentes formas, algunas de las cuales estudiaremos a continuación.

Algunos ejemplos de sistemas poco intuitivos son los siguientes:

- Las cuerdas vocales (transforman aire turbulento de los pulmones en sonidos).
- Algoritmos (transforman datos numéricos en otros datos o resultados).
- Amplificadores (transforman la señal de entrada en otra igual de diferente amplitud).
- El corazón (transforma señales de presión sistólica/diastólica).

- Etc.

Un sistema está completamente caracterizado cuando la salida está definida para cualquier entrada.

1.10. Propiedades de los sistemas

1.10.1. Linealidad

Es una de las propiedades más importantes en el análisis y diseño de sistemas. Un sistema es lineal si la salida correspondiente a una combinación lineal de entradas es la misma combinación lineal de sus salidas:

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \quad (1.43)$$

La respuesta de un sistema lineal a una suma de señales es la suma de las dos respuestas, y el escalado de la entrada por una constante produce el escalado de la salida por la misma constante. La principal consecuencia de la linealidad de un sistema puede comprobarse empleando la descomposición de la entrada como una expansión en impulsos unitarios:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (1.44)$$

Así, la salida que genera un sistema lineal es:

$$y[n] = T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \quad (1.45)$$

donde $h_k[n]$ es la respuesta que proporciona el sistema a un impulso desplazado $\delta[n-k]$.

Se comprueba entonces que la salida se puede obtener como la superposición de las respuestas del sistema a cada una de las muestras unitarias que componen la señal: un sistema lineal siempre responderá a una señal con una suma de respuestas a sus impulsos unitarios desplazados, y ponderados por sus amplitudes.

1.10.2. Invarianza al desplazamiento

Es otra de las propiedades más importantes en el análisis y diseño de sistemas. Un sistema es invariante si al retrasar una entrada una cierta cantidad la salida es retrasada esa misma cantidad, o, dicho de otra manera, si el sistema responde igualmente a una determinada entrada independientemente del instante en que se produzca ésta. Las propiedades de funcionamiento de un sistema invariante no cambian con el tiempo.

$$T\{x[n-n_0]\} = y[n-n_0] \quad (1.46)$$

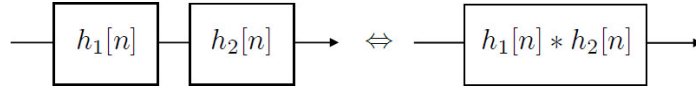


Figura 1.5: Propiedad asociativa de la convolución.

Si un sistema es lineal e invariante con $T\{\delta[n]\} = h[n]$, entonces

$$\begin{aligned}
 T\{\delta[n-k]\} &= h_k[n] = h[n-k] \\
 y[n] &= T\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\
 y[n] &= x[n] * h[n]
 \end{aligned} \tag{1.47}$$

Esta operación se denomina *convolución*. La salida de un sistema lineal e invariante es la convolución de la entrada con la respuesta del sistema al impulso unitario, y por tanto un sistema lineal e invariante está completamente caracterizado mediante la *respuesta al impulso del sistema*, que se denotará habitualmente como $h[n]$.

Consecuencias y propiedades de la convolución.

- Si un sistema tiene una respuesta al impulso dada por $h[n]$, y la entrada al sistema es $\delta[n]$, la salida será $h[n]$: $\delta[n] * h[n] = h[n]$.
- Si un sistema tiene una respuesta al impulso de valor $h[n] = \delta[n]$ quiere decir que cuando entra un impulso, sale un impulso. Por tanto, el sistema responde con una señal igual a la entrada. Si entra una señal $x[n]$, la salida será $x[n] * \delta[n] = x[n]$.

De estos dos puntos obtenemos que la función $\delta[n]$ actúa como elemento neutro de la convolución.

- Si un sistema tiene una respuesta al impulso de valor $h[n] = \delta[n - n_0]$ significa que ese sistema desplaza la señal a su entrada n_0 muestras hacia la derecha, actuando como un retardador. Si la entrada de ese sistema es $x[n]$ la salida deberá ser $x[n - n_0]$, por lo que $x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]$.

De este punto se deduce que una convolución de una señal con una delta desplazada proporciona un desplazamiento de igual valor sobre la señal.

La convolución presenta las siguientes propiedades:

- Asociativa

$$(x[n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n])$$

Esto implica que dos sistemas en cascada, con respuestas al impulso $h_1[n]$ y $h_2[n]$, son equivalentes a un sistema con respuesta al impulso $h_1[n] * h_2[n]$, Fig. 1.5

- Distributiva respecto de la suma

$$x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$

Esta propiedad conlleva que dos sistemas en paralelo, con respuestas al impulso $h_1[n]$ y $h_2[n]$, son equivalentes a un sistema con respuesta al impulso $h_1[n] + h_2[n]$, Fig. 1.6

- Conmutativa Es fácil comprobar que

$$x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$$

- Existencia de elemento neutro Como ya se ha mostrado, $x[n] * \delta[n] = x[n]$.

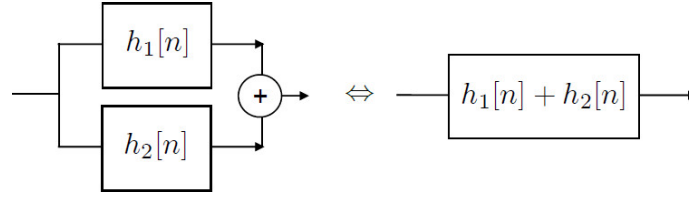


Figura 1.6: Propiedad distributiva respecto de la suma de la convolución.

A su vez, de la propiedad conmutativa puede obtenerse que la salida de un sistema lineal e invariante también puede expresarse como

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

En esta expresión se observa que la salida es una combinación lineal de las muestras de la señal de entrada ponderadas por las muestras de la respuesta al impulso del sistema. Eso representa, como ya hemos visto, un producto escalar entre la respuesta al impulso y la señal de entrada. Por ello, un sistema lineal e invariante responderá máximamente cuando la señal de entrada se parezca a su respuesta al impulso, y mínimamente en el caso contrario. Este abre una primera vía para el diseño de sistemas, dado que es posible diseñarlos con una respuesta al impulso similar a aquellas señales para las que se desee máxima respuesta.

1.10.3. Memoria

Un sistema no tiene memoria si el valor actual de la salida sólo depende del valor actual de la entrada; en caso contrario sí tiene memoria. Si el sistema es lineal e invariante, la respuesta al impulso de un sistema sin memoria es de la forma $h[n] = C\delta[n]$ siendo C una constante.

Demostración

$$\text{Sistema sin memoria} \Leftrightarrow h[n] = C \cdot \delta[n]$$

Parte $\Leftarrow$

Si se cumple que $h[n] = C\delta[n]$, se cumple que

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k]x[n-k] = C \cdot \delta[n] * x[n] = Cx[n]$$

con lo que se comprueba que una respuesta al impulso de esa forma implica que la salida en un instante sólo depende de la entrada en ese mismo instante, y por tanto el sistema no tiene memoria.

Parte $\Rightarrow$

Si se cumple que el sistema no tiene memoria, y por tanto la salida en un instante únicamente depende de la entrada en el mismo instante, podemos hacer la siguiente apreciación. La salida está definida por:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \dots + h[-1]x[n+1] + h[0]x[n] + h[1]x[n-1] + \dots$$

De todos los términos que forman el sumatorio, como la salida sólo depende de la entrada en el mismo instante, sólo uno puede ser no nulo independientemente del valor que tenga la entrada. Para ello, $h[n] = 0, \forall n \neq 0$, $h[0] = C$, y $h[n] = C\delta[n]$.

1.10.4. Causalidad

Un sistema es causal si su salida no depende de valores de entrada en instantes futuros. Dicho de otro modo, para cualquier valor n_0 la respuesta del sistema en ese instante, $h[n_0]$, depende únicamente de valores de la entrada para $n \leq n_0$.

En un sistema causal no es posible que los cambios de la salida precedan a los de la entrada. Obviamente, ningún sistema que represente un fenómeno físico real puede ser *no causal*.

La respuesta al impulso de un sistema lineal, invariante y causal cumple que $h[n] = 0, \forall n < 0$.

1.10.5. Estabilidad

Un sistema es estable si para cualquier entrada acotada la salida también lo está. Es decir:

$$|x[n]| \leq A < \infty \Rightarrow |y[n]| \leq B < \infty$$

donde A y B representan dos cotas del valor de la señal.

En un sistema lineal e invariante la estabilidad está garantizada si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

1.10.6. Invertibilidad

Un sistema es invertible si su entrada puede ser determinada unívocamente observando su salida. Para que un sistema sea invertible, dos entradas diferentes no pueden producir la misma salida.

1.11. Representación frecuencial

El análisis en dominios transformados de las señales y los sistemas de variable discreta proporciona una potente herramienta de análisis y diseño que permite encontrar soluciones inalcanzables de otro modo. La transformación que se emplea siempre depende de la elección de una base alternativa para la representación de la señal o sistema. Dado que en general trataremos de trabajar con sistemas lineales e invariantes que tienen un comportamiento que puede ser representado mediante su respuesta al impulso, que es una señal, trataremos por el momento de la representación transformada de señales.

En Tratamiento Digital de Señales lo más habitual es escoger dos tipos de base: funciones exponenciales complejas y funciones z . El primero de los casos da lugar a la representación en un dominio transformado que en la mayoría de las aplicaciones que trataremos será el de la pulsación; está representada por la Transformada de Fourier. El segundo de los casos da lugar a la representación en el plano z , denominada Transformada z .

Dado que en la mayoría de aplicaciones de comunicaciones el dominio transformado coincide con el de la frecuencia, es habitual denominarlo así (representación *frecuencial*) incluso cuando el dominio real no es el del tiempo y el transformado no es estrictamente el de la frecuencia sino el de la pulsación. El análisis en frecuencia de las señales y los sistemas de variable discreta (tiempo discreto, si se entiende que se trabaja en tiempo y frecuencia) es una de las principales herramientas de análisis y diseño en problemas de procesado digital de señales.

Una señal de variable discreta se puede expandir como una combinación lineal (infinita) de funciones exponenciales complejas, de la forma

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega \quad (1.48)$$

Nótese que se trata de una expansión habitual como combinación lineal de funciones base consistentes en exponenciales complejas. El factor 2π aparece debido a la periodicidad en dicho valor de las funciones exponenciales que conforman la expansión. Los coeficientes de esta expansión, los $X(\omega)$, se obtienen como el producto escalar entre la señal y las funciones base:

$$X(\omega) = \langle x[n], e^{j\omega n} \rangle \quad (1.49)$$

Los coeficientes de la expansión, definidos para cualquier valor de ω , constituyen una representación de variable continua y que contiene toda la información sobre la señal $x[n]$, puesto que ésta puede reconstruirse a partir de ellos. Son, por ello, una representación alternativa, transformada al dominio definido por la variable ω , y que se denomina *Transformada de Fourier* de $x[n]$. Por ello, la expansión (1.48) se denomina *Transformada Inversa de Fourier*.

Esta transformación se presta a la siguiente interpretación: el producto escalar entre dos vectores es proporcional al parecido o colinealidad entre ambos, tal y como se comentó en apartados anteriores. Dado un valor de ω , y escogida por tanto una exponencial de la base, $e^{j\omega n}$, el valor de $X(\omega)$ será alto en la medida en que la señal tenga como componente dicha exponencial compleja (que recordemos que es un valor puro en ω). Dada una señal compuesta por una suma de dichos valores puros de pulsación, o *tonos*, $X(\omega)$ tendrá valor alto para los valores de ω que formen parte de la composición de la señal. Las pulsaciones no presentes en la señal tendrán un valor bajo (o nulo). Por tanto, la transformada de Fourier indica en qué medida está presente cada pulsación en la señal original o, dicho de otro modo, muestra la composición *espectral* de la señal⁵

Desarrollando el producto escalar conforme a la definición empleada para señales deterministas, obtenemos la siguiente expresión:

$$TF\{x[n]\} = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (1.50)$$

⁵Suele denominarse *espectro* al conjunto de componentes de una señal.

La variable ω , ya mencionada anteriormente, se suele denominar pulsación discreta, y se relaciona con la llamada *frecuencia discreta* f de la forma $\omega = 2\pi f$.

1.11.1. Frecuencia discreta, muestreo y *aliasing*

Consideremos una señal analógica, sinusoidal, definida como una función del tiempo y dada por $x_a(t) = A \cos(\Omega t + \theta)$, $t \in \mathbb{R}$ con $\Omega = 2\pi F$, siendo F la frecuencia de variación de la señal, A la amplitud, θ la fase, y Ω la pulsación. Esta señal se muestrea uniformemente tomando valores con un periodo T_S . De esta manera se obtiene una secuencia discreta $x[n]$ cuyos valores están dados por

$$x[n] = x_a(nT_S), n \in \mathbb{Z}$$

$$x[n] = A \cos(\Omega n T_S + \theta)$$

Esta nueva señal es de variable discreta o tiempo discreto y depende de n . Para homogeneizar la notación y estudiar paralelamente la señal de variable continua y la de variable discreta, escribimos:

$$x[n] = A \cos(\Omega n / F_S + \theta) = A \cos(2\pi F n / F_S + \theta)$$

y llamamos $f = F/F_S$, denominando *frecuencia discreta* a esta frecuencia normalizada por la tasa de muestreo. Si llamamos $\omega = 2\pi f$, podemos expresar $x[n]$ en función de la pulsación discreta como:

$$x[n] = A \cos(\omega n + \theta) \quad (1.51)$$

En esta expresión vemos el mismo sentido matemático al multiplicar la variable independiente por una pulsación, en este caso discreta. Así como en una señal sinusoidal de variable continua la periodicidad está garantizada y se considera un hecho, en variable discreta podemos estudiarla. Consideremos un posible periodo N , que necesariamente ha de ser un número entero dada la naturaleza de la variable independiente n . Si consideramos la posible periodicidad de la señal, tenemos:

$$x[n + N] = A \cos(\omega(n + N) + \theta) = A \cos(\omega n + \omega N + \theta) \quad (1.52)$$

Para que exista periodicidad, se debe cumplir que ωN sea un múltiplo entero de 2π :

$$\omega N = 2\pi k$$

$$2\pi f N = 2\pi k$$

$$f N = k$$

y por ello, $f = k/N$, lo que indica que la frecuencia discreta debe ser un valor racional. Dada la definición de frecuencia discreta, ésta indica el número de muestras que se toman en un periodo de la señal analógica original. Así, la periodicidad de la señal sinusoidal de tiempo discreto no está garantizada salvo que esa relación pueda representarse mediante

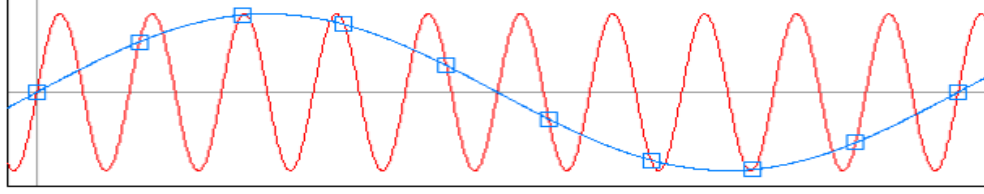


Figura 1.7: Aliasing representado en el dominio real (temporal).

una expresión racional. Este hecho, que puede resultar chocante, es una de las consecuencias del muestreo, que en cierto modo cambia las reglas de juego de las señales de variable continua o analógicas.

Ahondando un poco más en el cambio de reglas de juego que supone el muestreo, consideremos dos señales sinusoidales discretas con pulsaciones diferentes ω_1 y $\omega_2 = \omega_1 + 2\pi$. En el caso analógico, dos señales sinusoidales de pulsaciones diferentes son dos señales diferentes. Sin embargo, en el caso discreto:

$$x[n, \omega_2] = \cos(\omega_2 n + \theta) = \cos((\omega_1 + 2\pi)n + \theta) = \cos(\omega_1 n + 2\pi n + \theta) = \cos(\omega_1 n + \theta) = x[n, \omega_1] \quad (1.53)$$

lo que indica que ambas señales son iguales. Por tanto, existen señales de variable discreta iguales aunque tengan pulsaciones distintas. Esto se puede extrapolar fácilmente a cualquier caso de pulsaciones separadas 2π o frecuencias discretas separadas 1. Cualquier secuencia con $|\omega| \geq \pi$ o $|f| \geq \frac{1}{2}$ tiene una secuencia idéntica en $\omega \in [-\pi, \pi]$, lo que se suele indicar diciendo que las señales fuera de dicho rango tienen un *alias* dentro de él que resulta indistinguible. Este fenómeno se conoce como *aliasing*.

El aliasing tiene como principal consecuencia que es imposible distinguir una señal de cualquiera de sus alias o réplicas. Dado que la inmensa mayoría de sistemas reales tienen un comportamiento en baja frecuencia o banda base, el resultado es que todas las señales con pulsaciones superiores a π se interpretan como su réplica en el rango $\omega \in [-\pi, \pi]$. Que una señal tenga una pulsación fuera de ese rango es equivalente a que tenga una frecuencia discreta $f > \frac{1}{2}$, y por tanto que la señal analógica asociada tenga una frecuencia $F > F_s/2$. Para que la señal con la que se trabajan en el rango de pulsaciones bajas se corresponda realmente con la original analógica a la que representa, debe cumplirse que ésta debe ser muestreada con una F_s al menos doble de la frecuencia de la señal; y como eso debe ocurrir con todas las componentes frecuenciales, para evitar que el aliasing tenga como efecto una representación errónea de la señal se debe emplear una frecuencia de muestro al menos doble de la máxima frecuencia presente en la señal analógica. Este criterio es el denominado *criterio de Nyquist*.

La figura 1.7 representa el fenómeno del aliasing en el dominio temporal. Una señal analógica representada en rojo es muestreada con una tasa que no cumple el criterio anterior, con lo que el número de muestras por periodo es inferior a dos, estando dichas muestras representadas con marcas cuadradas de color azul. La línea azul muestra la señal representada por las mismas muestras que se encuentra dentro del rango de Nyquist y que tiene, por tanto, al menos dos muestras por periodo. Aunque las muestras corresponden a ambas señales, en el caso de la roja se producen variaciones más rápidas que no pueden

ser correctamente capturadas, por lo que la señal no queda completamente representada por sus muestras. De hecho, sería imposible reconstruirla. Sin embargo, la señal azul sí estaría bien representada al no poder haber variaciones más rápidas que las que pueden capturar las muestras.

Otra consecuencia del fenómeno de aliasing es que, por el efecto que acabamos de observar, el rango de frecuencias de interés en la representación transformada de señales de variable discreta se cié al rango $f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ o $\omega \in [-\pi, \pi]$. Por ello, las frecuencias en los límites de ese rango pasan a ser lo que denominamos *altas frecuencias* y las frecuencias centrales pasan a ser lo que denominamos *bajas frecuencias*. Sin embargo, frecuencias superiores tienen un comportamiento diferente al habitual. Por ejemplo, una señal cuya pulsación discreta es $\omega = 2\pi$ estaría dada por:

$$x[n] = \cos(2\pi n) = 1$$

con lo que es una secuencia de valores constantes, equivalente completamente a una señal de pulsación nula. Por ello, las pulsaciones en el entorno de los múltiplos de 2π son de nuevo *bajas frecuencias*, a pesar de corresponder a valores del eje ω situados más hacia la derecha. Una vez más, este efecto contrasta con la intuición asociada a la perspectiva propia de variable continua.

1.11.2. Algunas propiedades de la Transformada de Fourier

- Linealidad

$$TF\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = a \cdot TF\{x_1[n]\} + b \cdot TF\{x_2[n]\} = aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$$

- Si $x[n]$ es una señal real y par, entonces $X(\omega)$ es real y par.

- Retardo

$$TF\{x[n - n_0]\} = e^{-j\omega n_0} X(\omega)$$

- Modulación

$$TF\{e^{j\omega_0 n} x[n]\} = X(\omega - \omega_0)$$

Puede comprobarse que las propiedades de retardo y modulación son duales, equivalentes desde ambos dominios.

- Convolución

$$TF\{x[n] * y[n]\} = X(\omega)Y(\omega)$$

- Producto

$$TF\{x[n]y[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\theta)Y(\omega - \theta)d\theta$$

Al igual que sucede con el retardo y la modulación, la convolución y el producto son operaciones duales que se corresponden en cada uno de los dos dominios.

- Teorema de Parseval: establece que la energía es la misma en un dominio que en el transformado, y puede calcularse en cualquiera de los dos indistintamente.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)Y^*(\omega)d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

El Teorema de Parseval está relacionado, en cierto modo, con el principio de conservación de la energía.

Algunas transformadas de Fourier frecuentes

Secuencia	Transformada de Fourier
$\delta[n]$	1
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
1, $-\infty < n < \infty$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$a^n \mu[n]$, $ a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$\mu[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + 2\pi k)$
$\cos(\omega_0 n + \phi)$	$\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{j\phi}\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi k) + e^{-j\phi}\delta(\omega + \omega_0 + 2\pi k)]$

1.11.3. Representación frecuencial de sistemas: respuesta en frecuencia

Si la salida de un determinado sistema lineal e invariante con respuesta al impulso $h[n]$ ante una entrada $x[n]$ viene dada por $y[n] = x[n] * h[n]$, entonces, de acuerdo a las propiedades de la Transformada de Fourier tendremos que

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \quad (1.54)$$

Si la entrada al sistema es una exponencial compleja (un tono puro) de una determinada pulsación ω_0 , entonces tendremos

$$y[n] = e^{j\omega_0 n} * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega_0(n-k)}$$

Como la exponencial se puede dividir en dos, una de las cuales no depende de k , se puede sacar del sumatorio:

$$y[n] = e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(\omega_0) \quad (1.55)$$

Como se puede observar, la salida del sistema cuando la entrada es una señal de una frecuencia pura coincide con la entrada excepto por un factor de escala, $H(\omega_0)$, que se puede interpretar como la amplitud con la que el sistema responde a esa pulsación o frecuencia. Si se extiende a todas las pulsaciones, se observa que la transformada de Fourier de la respuesta al impulso representa la respuesta del sistema a cada una de las pulsaciones o frecuencias, por lo que se dice que $H(\omega)$ es la *respuesta en frecuencia del sistema*.

1.11.4. Transformada Discreta de Fourier

La Transformada de Fourier de variable discreta es una función de una variable continua, y por tanto no es directamente manejable en forma digital. Existe otra representación similar, llamada Transformada Discreta de Fourier (DFT), que es función de una variable discreta, por ejemplo k , y que puede ser evaluada fácilmente por un sistema digital.

Para una secuencia $x[n]$ de longitud finita N , cuyos valores son nulos fuera del intervalo $n \in [0, N - 1]$, la DFT de N puntos es

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, k = 0 \dots N - 1 \quad (1.56)$$

De esta expresión puede comprobarse que la DFT es absolutamente equivalente a muestrear el espectro en las N pulsaciones equiespaciadas dadas por $\omega = \frac{2\pi k}{N}$.

Es posible calcular la DFT en un número de puntos mayor que N , empleando una técnica denominada *zero-padding* (entre otras), pero no en uno menor sin incumplir el límite de Nyquist para el muestreo, que también debe cumplirse en dominios transformados.

Existen algoritmos numéricos rápidos que implementan la DFT de manera rápida y computacionalmente eficiente, denominados de forma genérica Transformada Rápida de Fourier (FFT).

1.12. Muestreo de una señal continua

Se denomina *muestreo periódico* a la adquisición de muestras equiespaciadas de los valores de una señal continua. El período de muestreo se define en el mismo espacio en que esté definida la señal que se muestrea. La figura 1.8 representa de forma simplificada el muestreo de una señal continua $x_c(t)$ empleando un sistema que se denomina por conveniencia *conversor de continuo a discreto*⁶ y en cuyo funcionamiento se profundizará

⁶Se elude expresamente la denominación *conversor analógico-digital* para evitar equívocos, dado que ese nombre realmente corresponde a un dispositivo electrónico cuyo funcionamiento trata de emular lo que hace el conversor de continuo a discreto, pero con los errores y limitaciones propios de la implementación física que se haya elegido.

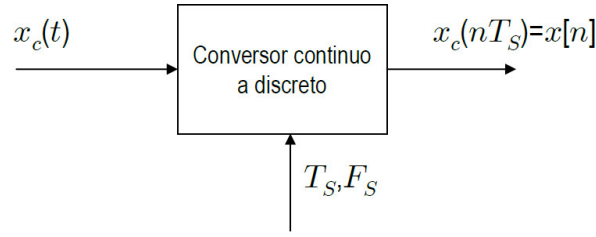


Figura 1.8: Esquema general del muestreo de una señal de variable continua.

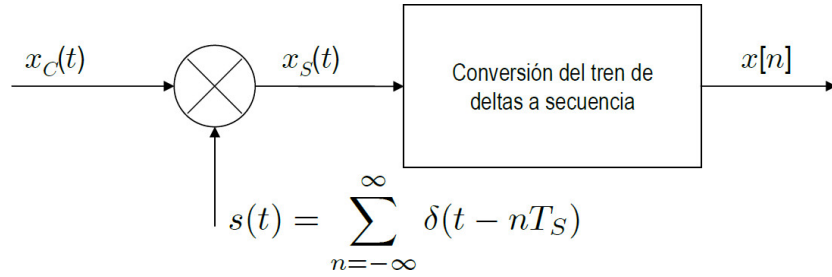


Figura 1.9: Esquema general del muestreo de una señal de variable continua.

a continuación. El valor de la tasa o frecuencia de muestreo y el del periodo de muestreo son inversos.

La figura 1.9 representa el funcionamiento detallado de ese bloque convertor de continuo a discreto. En ella se distinguen varios elementos. La señal continua $x_c(t)$ se multiplica por $s(t)$, un tren periódico de funciones delta de Dirac separadas T_S , generando así la señal continua $x_S(t)$. El bloque de conversión de tren de deltas a secuencia transforma la señal de variable continua en otra de variable discreta, $x[n]$, cuyas muestras coinciden con los valores no nulos de la señal muestreada $x_S(t)$.

Si partimos de la señal muestreada $x_S(t) = x_c(t)s(t)$, su transformada de Fourier, al tratarse de un producto, viene dada por $\frac{1}{2\pi}X_c(\Omega) * S(\Omega) = X_S(\Omega)$ ⁷. Por otra parte, la transformada de Fourier del tren de deltas viene dada por:

$$TF\{s(t)\} = \frac{2\pi}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{T_S}k\right)$$

Por tanto:

$$X_S(\Omega) = \frac{1}{T_S}X_c(\Omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{T_S}k\right)$$

Al tener una convolución con un tren de deltas, y tratarse de un operador lineal, el resultado es la convolución con cada una de las deltas, y por tanto un conjunto de versiones

⁷Se ha empleado la definición de transformada de Fourier para señales de variable continua. En general se entiende que el lector está familiarizado con la teoría de señales de variable continua y sus transformadas.

de $X_c(\Omega)$ desplazadas:

$$X_S(\Omega) = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(\Omega - \frac{2\pi}{T_S}k\right) \quad (1.57)$$

Esto significa que el espectro de la señal muestreada es el mismo de la original repetido y desplazado cada $\Omega = \frac{2\pi}{T_S}$, o equivalentemente, cada $F = F_S$ en frecuencia. Igualmente, estará multiplicado por un factor de escala $1/T_S$.

En este punto es crítico notar que para que no se produzca solapamiento entre las réplicas desplazadas del espectro original, que se sumarían tal y como indica (1.57), debe escogerse una frecuencia de muestreo que sea al menos el doble que la máxima componente frecuencia de la señal que se muestrea:

$$\Omega_S > 2\Omega_{max}, \quad F_S > 2F_{max} \quad (1.58)$$

Esta afirmación es lo que se conoce como *Teorema de Muestreo*, o de Nyquist dado que coincide con el límite de Nyquist al que ya se ha hecho referencia.

Teorema de Muestreo

Para que una señal muestreada esté completamente representada por sus muestras, y éstas posean toda la información que contiene, debe muestrearse empleando una frecuencia de muestreo que cumpla (1.58). A partir de dichas muestras también es posible recuperar la señal original exactamente.

En otros términos, puede decirse que para que las muestras de una señal realmente la representen, deben tomarse de forma que capturen las variaciones más rápidas de dicha señal.

Observando en el dominio t la definición de la señal $x_S(t)$ tenemos:

$$x_S(t) = x_c(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S)$$

Como el tren de deltas tiene valores nulos para todos los valores de t donde no hay situada una delta, que son los valores $t = nT_S, \forall n \in \mathbb{Z}$, esta expresión se puede escribir como:

$$x_S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_S) \delta(t - nT_S)$$

Apoyándonos en las propiedades de la transformada de Fourier, y más concretamente en la linealidad, podemos aplicarla considerando esta expresión una combinación lineal de deltas desplazadas:

$$TF\{x_S(t)\} = X_S(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_S) e^{-j\Omega nT_S}$$

Por definición, tenemos también que la transformada de la secuencia final resultante del muestreo es:

$$TF\{x[n]\} = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

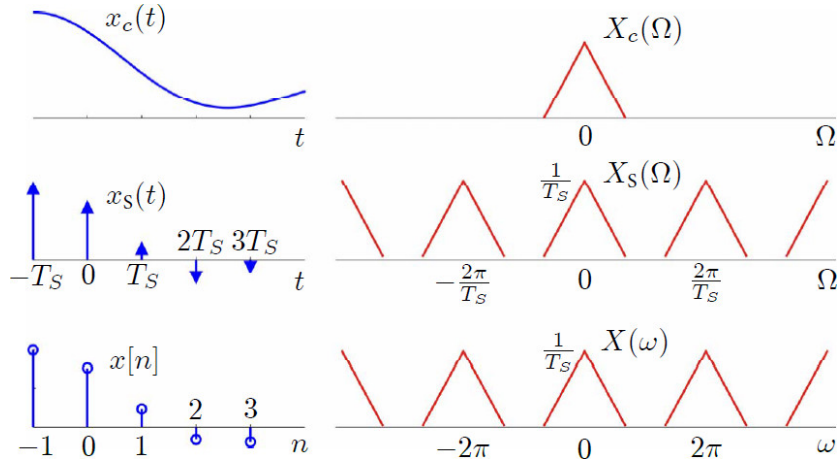


Figura 1.10: Relación entre las transformadas de Fourier de las señales que intervienen en el proceso de muestreo.

Ambas expresiones son muy parecidas, y dado que el bloque que las une asegura que los valores de ambas son iguales, podemos identificar:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= X_S(\omega/T_S) \\ X(\Omega) &= X_S(\Omega T_S) \end{aligned} \quad (1.59)$$

lo que indica que el espectro de la señal discreta es igual que el de la señal muestreada $x_S(t)$ con una conversión del eje de pulsaciones a pulsaciones discretas, pero manteniendo forma y amplitud. De ello, se obtiene que, dado que el espectro de la señal muestreada resultaba ser periódico de periodo F_S en frecuencia o Ω_S en pulsación, el espectro de la secuencia también lo es, con periodo $f = 1$ en frecuencia discreta o $\omega = 2\pi$ en pulsación discreta. La relación entre los espectros de las señales $x_c(t)$, $x_S(t)$ y $x[n]$ se representa en la figura 1.10.

Retomando el concepto de aliasing ya estudiado, la periodicidad ahora demostrada da un paso más mostrando que no sólo las señales cuyo espectro está separado $\omega = 2\pi$ son iguales, sino que existen simultáneamente dada la periodicidad del espectro, y por tanto el fenómeno de aliasing se produce siempre que se incumple el Teorema de Muestreo al obtener una secuencia que no representa a la señal muestreada, sino que será una réplica de pulsación comprendida en el rango $\omega \in [-\pi, \pi]$ que realmente corresponde con otra señal analógica de frecuencia inferior.

1.13. Reconstrucción de una señal a partir de sus muestras

Dada una señal representada por medio de sus muestras, contenidas en la secuencia $x[n]$, es posible obtener una reconstrucción $x_r(t)$ de la señal que dio lugar a dichas muestras. La figura 1.11 muestra el esquema del sistema de reconstrucción que pretende ser el inverso del de muestreo.

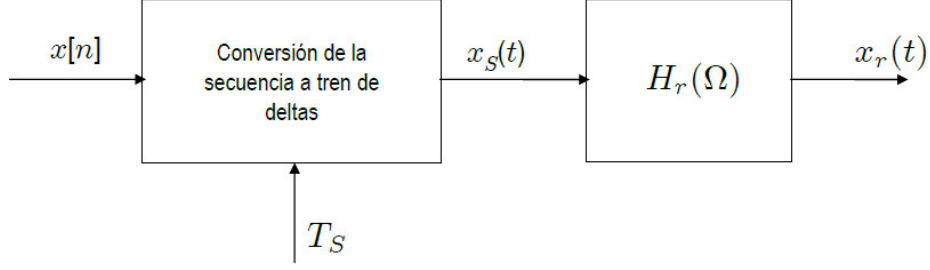


Figura 1.11: Esquema de la reconstrucción de una señal a partir de sus muestras.

El sistema de reconstrucción representado por la respuesta en frecuencia $H_r(\Omega)$ es un filtro paso bajo ideal con pulsación de corte $\Omega_c = \frac{\pi}{T_S}$ y amplitud T_S . El sistema toma como entrada, además de las propias muestras, la frecuencia empleada para el muestreo, F_S , o el periodo equivalente T_S . En este caso se suelen denominar frecuencia o periodo *de reconstrucción*.

El primer paso de la reconstrucción es la obtención de una señal de variable continua, $x_S(t)$, formada por un tren de deltas desplazadas, cada una de ellas con la amplitud que le otorga la muestra que corresponde a esa posición. Se calcula como:

$$x_S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_S)$$

A partir de este tren de deltas, la señal reconstruida se obtiene como

$$x_r(t) = x_S(t) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_S) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h_r(t - nT_S)$$

Así, la señal reconstruida se construye como un tren de versiones de la respuesta al impulso del filtro rector, separadas con un periodo T_S . Esa respuesta al impulso, al ser la transformada inversa de Fourier de la respuesta en frecuencia, que es un pulso rectangular paso bajo con las propiedades antes citadas, es:

$$h_r(t) = TF^{-1}\{H_r(\Omega)\} = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_S}\right)$$

donde $TF^{-1}\{\cdot\}$ se emplea para indicar la transformada inversa de Fourier, y la función $\text{sinc}(x)$ se define como

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (1.60)$$

Entre las propiedades de la función $\text{sinc}(t/T_S)$ se encuentra el hecho de que toma valor unidad en $t = 0$ y valor nulo en todos los valores de t múltiplos enteros no nulos de T_S . Por ello, la señal reconstruida está formada por un tren de funciones sinc desplazadas el periodo de reconstrucción, que es exactamente la distancia entre sus nulos. En los instantes de muestreo, el valor resulta ser, por tanto, exactamente el de cada muestra, y por tanto el de la señal muestreada original. La figura 1.12 muestra un tren de sinc

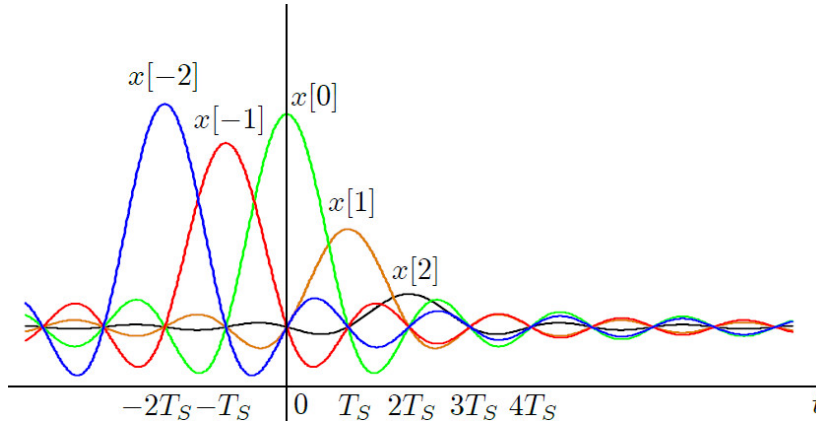


Figura 1.12: Tren de funciones sinc en la reconstrucción de una señal a partir de sus muestras.

como el descrito, todas las cuales se suman para generar la señal reconstruida. Aunque inicialmente no parece sencillo saber cómo se combinan esas funciones en los instantes que no son múltiplos del periodo de reconstrucción, del estudio frecuencial realizado junto con el muestreo es fácil comprobar que el filtro paso bajo seleccionará únicamente la réplica del espectro periódico que se encuentra en torno al origen de frecuencias, y que coincide con la original, modificando además su amplitud, lo que garantiza que la reconstrucción es exacta.

1.14. Cambio en la tasa de muestreo mediante procesado de las secuencias

Una vez que una señal ha sido muestreada correctamente, sus muestras la representan y se puede extraer de ellas cualquier información o incluso reconstruir la señal continua que dio lugar a ellas. Del mismo modo que se puede reconstruir la señal continua, es posible pensar en transformar la señal discreta para llevarla al estado en que estaría si se hubiese muestreado a otra velocidad (otro período de muestreo). Esta modificación artificial de la tasa de muestreo se realiza mediante dos procesos: diezmado e interpolación. El diezmado permite reducir artificialmente la tasa de muestreo, tomar menos muestras de la señal en el mismo intervalo. La interpolación permite aumentar artificialmente la tasa de muestreo tomando más muestras de la señal en el mismo intervalo.

1.14.1. Diezmado

El diezmado es una técnica que actúa sobre una señal muestreada para reducir la frecuencia de muestreo del sistema. Es capaz de proporcionar, empleando técnicas de tratamiento digital de señales, la señal que tendríamos si hubiésemos muestreado a una frecuencia menor, de tal manera que desde su aplicación debe considerarse que la frecuencia de muestreo del sistema es la simulada.

La motivación para el empleo de esta técnica puede ser muy variada. Por ejemplo,

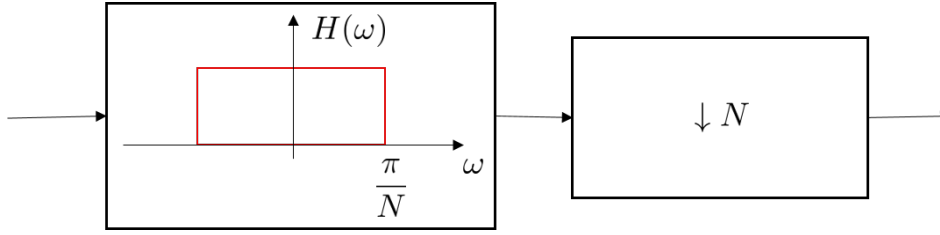


Figura 1.13: Bloques que componen un diezmador.

supongamos que se está realizando el muestreo de una señal de variable continua cuyo espectro $X(\Omega)$ tiene componentes de frecuencias elevadas, pero con una energía ya residual. Para evitar problemas en el muestreo, es habitual incluir antes del conversor de continuo a discreto un filtro *anti-solapamiento* o *anti-aliasing*, $H_{as}(\Omega)$ con respuesta paso bajo, cuya función es eliminar componentes frecuenciales por encima del límite de Nyquist (la mitad de la frecuencia de muestreo que se vaya a emplear) entendiendo que su relevancia en el conjunto de la señal es pequeña al ser componentes de tipo residual. Con ello se pretende evitar problemas de solapamiento entre las réplicas espectrales que se producen. Sin embargo, en un sistema real la respuesta paso bajo del filtro no será ideal, e incluso podría ser de baja calidad, atenuando el problema de solapamiento, pero no evitándolo. Una forma evidente de reducir aún más el problema sería aumentando la frecuencia de muestreo, de forma que las réplicas espectrales producidas quedarían más separadas, y el solapamiento se produciría entre partes del espectro cuya energía ha sido ya eliminada en buena medida por el filtro anti-solapamiento, reduciendo así los efectos del solapamiento. Sin embargo, eso produciría un aumento del número de muestras disponibles de la señal por encima de lo previsto inicialmente y que conduciría a la necesidad de más recursos de computación y almacenamiento. En estas condiciones, el diezmado proporciona una herramienta que permite reducir el número de muestras, tal y como se tendrían habiendo muestreado con una frecuencia menor, pero ya una vez capturada la información de la señal y evitado el problema de solapamiento.

Un diezmador se compone de dos bloques, tal y como se representa en la figura 1.13. En estos bloques juega un papel importante el parámetro $N \in \mathbb{Z}$, que se denomina *factor de diezmado* y es un entero que representa el factor por el que se reduce la frecuencia de muestreo, de forma que una señal muestreada a una frecuencia F_{S1} y diezmada por un factor N pasa a tener unas muestras correspondientes a una frecuencia de muestreo $F_{S2} = F_{S1}/N$.

El primero de los dos bloques es un filtro paso bajo ideal (digital) con pulsación de corte $\omega = \pi/N$. El segundo es un bloque que elimina muestras conforme a la proporción establecida por el factor de diezmado, y según la definición de *diezmado* especificada en el apartado 1.3. De este modo, de cada N muestras se eliminan $N - 1$.

Estudiaremos el funcionamiento del segundo de estos bloques en el dominio de la frecuencia. Para ello, partimos de una secuencia a procesar $x[n]$, y consideramos un tren de deltas discretas equiespaciadas, separadas N muestras, denominado $f[n]$ y que responde

a:

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \quad (1.61)$$

El bloque diezmador $\downarrow N$ se puede dividir a su vez en dos partes, la primera de las cuales es multiplicar $x[n]$ por $f[n]$ llevando a cero los valores de las muestras que van a ser suprimidas. Consideramos entonces $z[n] = x[n] \cdot f[n]$, con objeto de obtener su espectro $Z(\omega)$. Aprovechando que la secuencia $f[n]$ es periódica de periodo N podemos calcular su Desarrollo en Serie de Fourier (DSF), que por definición viene dado por:

$$f[n] = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (1.62)$$

y siendo los coeficientes del desarrollo

$$f_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (1.63)$$

donde, a su vez, al tratarse de la suma de las muestras de un periodo de $f[n]$ que son nulas excepto una de ellas de valor unidad, tenemos $f_k = \frac{1}{N}, \forall k \in \mathbb{Z}$, con lo que podemos expresar

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} kn} \quad (1.64)$$

Así, la transformada de Fourier de $z[n]$ será

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} z[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi}{N} kn} e^{-j\omega n} \\ Z(\omega) &= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} x[n] e^{-j(\omega - \frac{2\pi}{N} k)n} \end{aligned}$$

que, considerando el sumatorio en n , corresponde a la transformada de Fourier de $x[n]$ evaluada en $\omega - \frac{2\pi}{N} k$, y sumada mediante el sumario en k . Por ello:

$$Z(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\omega - \frac{2\pi}{N} k\right) \quad (1.65)$$

Es decir, que el hecho de multiplicar la señal por un tren de deltas discretas genera una tres de réplicas espectrales separadas una pulsación $2\pi/N$ en lugar del habitual 2π , y escalado por un factor $1/N$ (figura 1.14). Por ese motivo, el primer bloque del diezmador es un filtro paso bajo que se encarga de eliminar cualquier componente de señal con pulsación superior a π/N de forma que se evite cualquier posible solapamiento en esta fase del diezmado.

El paso final consiste en la eliminación de las muestras sobrantes, que son aquellas que se han anulado mediante la multiplicación por el tren de deltas. Para ello, consideraremos

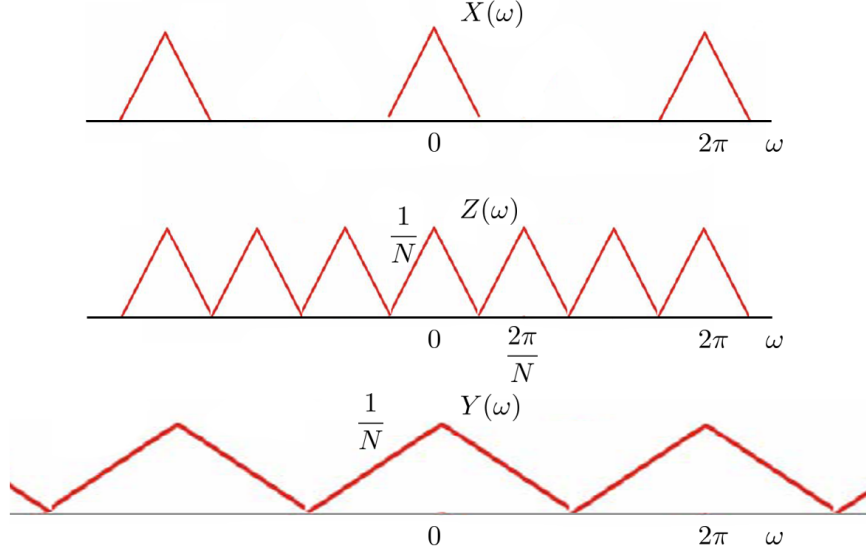


Figura 1.14: Comparativa de espectro original (1), espectro tras multiplicación por tren de deltas, para $N = 3$ (2), y espectro final (3).

la señal, ya diezmada, $y[n] = z[nN]$. Si consideramos las transformadas de Fourier tanto de $z[n]$ como de $y[n]$, ambas consisten en sendos sumatorios de infinitos términos, de los cuales podemos observar algunos:

$$Z(\omega) = \dots + x[0]e^{j\omega 0} + 0 + \dots + 0 + x[N]e^{-j\omega N} + 0 + \dots + 0 + x[2N]e^{-j\omega 2N} + \dots$$

$$Y(\omega) = \dots + x[0]e^{j\omega 0} + \dots + x[N]e^{-j\omega 1} + \dots + x[2N]e^{-j\omega 2} + \dots$$

De la comparación entre ambas expresiones se obtiene que son idénticas excepto por un factor N en la pulsación, de forma que se puede igualar

$$Z\left(\frac{\omega}{N}\right) = Y(\omega) \quad (1.66)$$

lo que indica que esta reducción de muestras en el dominio temporal representa un ensanchamiento del espectro en el dominio frecuencial por el mismo factor N , de forma que el espectro resultante de nuevo aparece replicado cada 2π pero ahora con las réplicas mucho más juntas, por un factor igual al de diezmado (figura 1.14). Como se puede comprobar, este sería el espectro obtenido si inicialmente se hubiera muestreado con una frecuencia de muestreo N veces inferior.

1.14.2. Interpolación

La interpolación es el proceso inverso al diezmado: genera las muestras que se tendrían si se hubiera muestreado la señal con una frecuencia mayor. Es, por tanto, el aumento de la frecuencia de muestreo, en este caso por un *factor de interpolación* M .

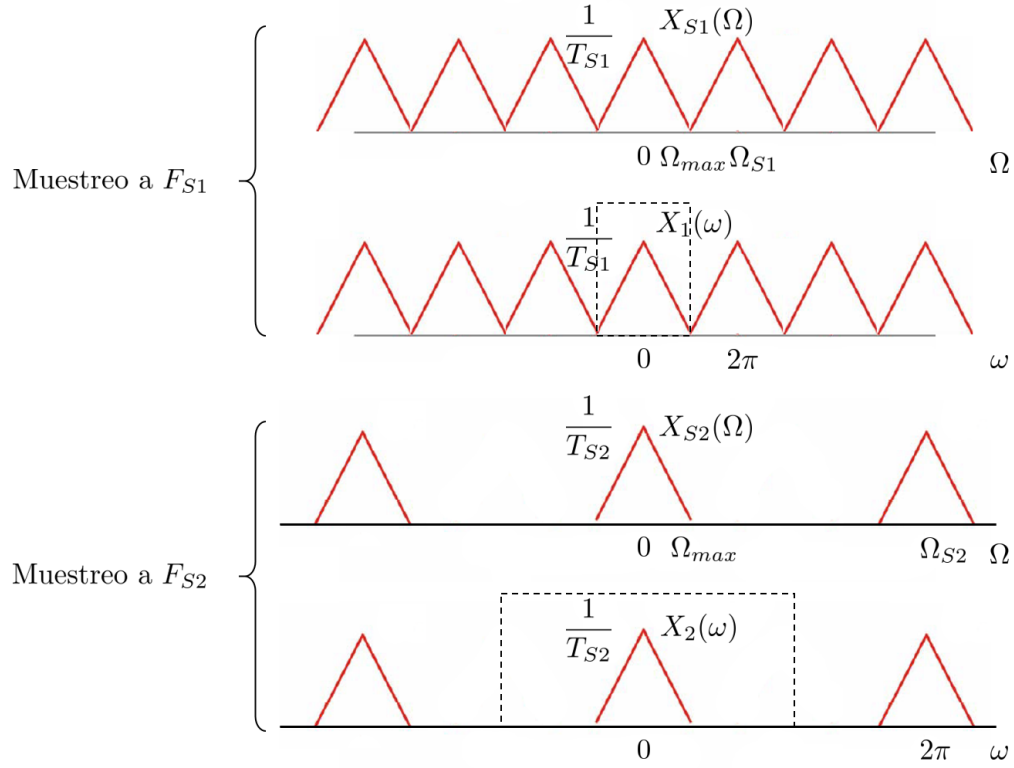


Figura 1.15: Comparativa de espectros muestreados a dos frecuencias de muestreo, siendo F_{S1} la correspondiente al límite de Nyquist y $F_{S2} > F_{S1}$. Se indica en línea discontinua el rango de pulsaciones $\omega \in [-\pi, \pi]$ en cada caso.

Cabe preguntarse si es posible obtener las muestras exactas que se tendrían con un muestreo más rápido y que, en principio, ya se han perdido. La respuesta es que sí, que es posible. Baste recordar que si la señal está muestreada conforme con el criterio de Nyquist, sus muestras la representan completamente, hasta el punto de que es posible reconstruir completamente la señal de variable continua. Si esto es posible, con más razón lo es reconstruir únicamente parte de sus valores que corresponden con las citadas muestras.

La figura 1.15 representa el espectro de la señal muestreada a dos frecuencias distintas, siendo F_{S1} exactamente la frecuencia límite que determina el criterio de Nyquist y F_{S2} una frecuencia mayor a la primera. Se puede observar que las principales diferencias radican en la separación entre réplicas espectrales, la definición del rango $\omega \in [-\pi, \pi]$ y la amplitud de ambos espectros. El objetivo del interpolador es convertir mediante técnicas de procesamiento de señal el primero de los espectros en el segundo.

Como en el caso del diezmado, el interpolador puede dividirse en varios pasos. El primero de ellos consiste en expandir la señal $x_1[n]$ en el dominio real generando huecos (muestras nulas) que deberán ser ocupados posteriormente por las nuevas muestras. Así, si se considera un factor de interpolación M , de forma que $F_{S2} = MF_{S1}$, definimos la

secuencia $y[n]$ como

$$y[n] = \begin{cases} x_1\left[\frac{n}{M}\right], & n = 0, \pm M, \pm 2M \dots \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (1.67)$$

Esta secuencia contiene las muestras de $x_1[n]$ ahora separadas M muestras. Así, si $x_1[n] = [1, 2, 3, 4]$, $n = 0 \dots 4$, y $M = 3$, tendremos que $y[n] = [1, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 0, 4]$, $n = 0 \dots 9$.

Podemos estudiar las consecuencias de esta operación en el dominio de la frecuencia considerando de nuevo los infinitos términos de la transformada de Fourier de ambas secuencias:

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= \dots + x_1[0]e^{j\omega 0} + x_1[1]e^{j\omega 1} + x_1[2]e^{j\omega 2} + \dots \\ Y(\omega) &= \dots + x_1[0]e^{j\omega 0} + 0 + \dots + 0 + x_1[1]e^{-j\omega M} + 0 + \dots + 0 + x_1[2]e^{-j\omega 2M} + \dots \end{aligned}$$

Podemos comprobar que la diferencia entre ambas expresiones es el factor M en las exponenciales, de forma que podemos asimilar:

$$Y(\omega) = X(\omega M) \quad (1.68)$$

Este resultado muestra que el ensanchamiento de la secuencia en el dominio real conlleva una compresión en frecuencia de todo el espectro por un factor M . En la figura 1.16, los dos primeros espectros muestran este hecho empleando un factor $M = 2$.

Una vez comprimido por M el espectro, para recuperar la señal deseada $x_2[n]$ se observa que basta con emplear un filtro paso bajo con pulsación de corte $\omega = M/\pi$ de forma que únicamente pase la réplica espectral en torno al origen. Para adecuar la amplitud, es fácil comprobar que debe emplearse un factor $T_{S2}/T_{S1} = M$, que puede incorporarse como amplitud de la respuesta del filtro. Así se obtiene el espectro que aparece como final en la figura 1.16.

La figura 1.17 muestra el diagrama de bloques resultante del interpolador.

1.14.3. Cambio de la tasa de muestreo por un factor racional

Tanto el diezmado como la interpolación, por su propia definición, están limitados a factores enteros. Aunque aparentemente éste puede ser un factor determinante, puede subsanarse empleando una combinación de diezmador e interpolador de forma que se modifique la tasa de muestreo por un factor racional de la forma $F_{S2} = \frac{M}{N} F_{S1}$. En principio, cualquier combinación de ambos procesos es posible, pero es importante tener en cuenta que siempre debe realizarse en primer lugar la interpolación, dado que el aumento de la tasa de muestreo no genera problemas de aliasing. De hacerse en primer lugar el diezmado, la modificación por un factor $1/N < M/N$ puede hacer que se supere el límite inferior dado por el límite de Nyquist bajo el cual no es posible representar correctamente la señal. Si ese hecho se produce, no es posible recuperar la información perdida.

La figura 1.18 muestra los bloques resultantes, donde la cadena de dos filtros paso bajo puede reemplazarse por un único filtro, de amplitud igual al producto de ambas (dada la convolución en el dominio temporal) y pulsación de corte igual a la más restrictiva de las de cada filtro.

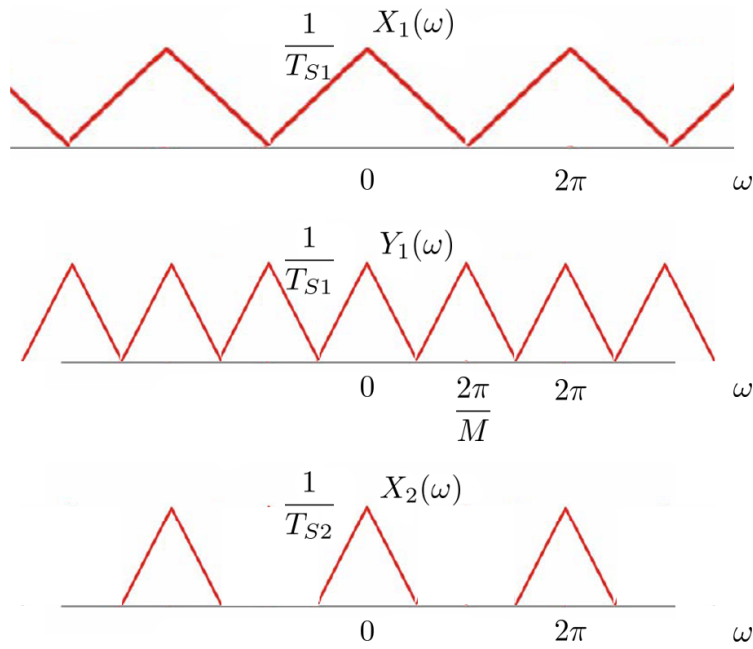


Figura 1.16: Comparativa de espectros original, comprimido y final tras el proceso de interpolación con $M = 2$.

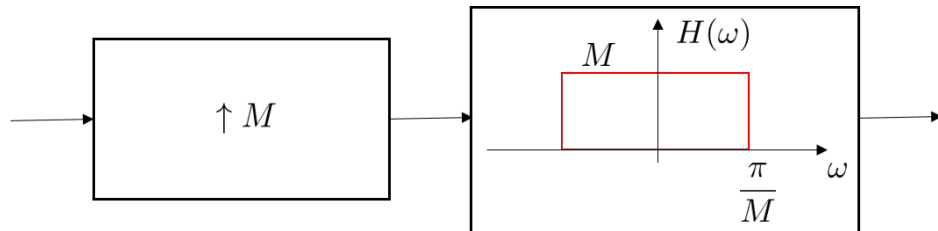


Figura 1.17: Bloques que componen un interpolador.

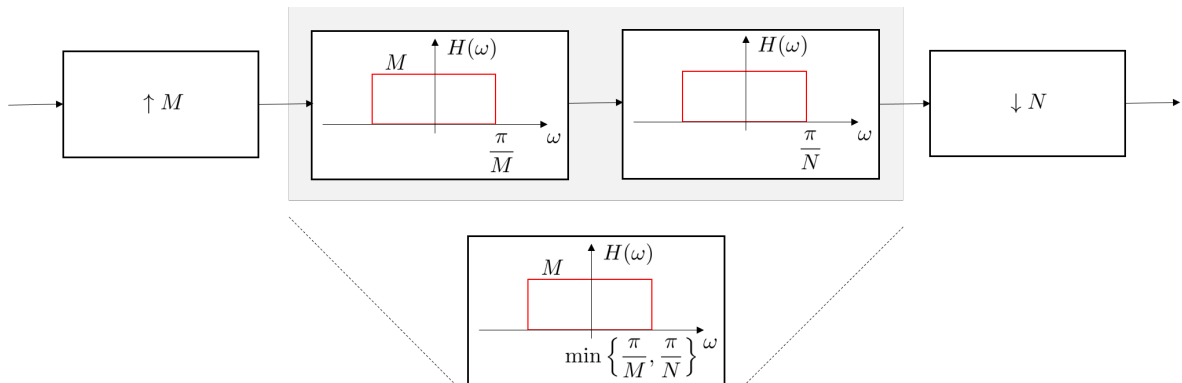


Figura 1.18: Bloques que componen un cambio de la tasa de muestreo por un factor M/N .