

Problema 9

Intuitivamente, una entrada que siempre vale 2 se quiere convertir en una señal que siempre vale 1, así que el único coeficiente del filtro valdrá $1/2$. Pero vamos a comprobarlo, y a ver el efecto del ruido:

a) Filtro de Wiener: $\underline{R} \cdot \underline{w} = \underline{p}$

Al ser un filtro de orden 1, todo son escalares. La matriz $\underline{R}$ sólo tiene un elemento: $\underline{R} = R_{xx}[0]$; el vector $\underline{p}$ también tiene un elemento: $\underline{p} = R_{dx}[0]$. Y sólo hay un coeficiente:

$$R_{xx}[0] \cdot w = R_{dx}[0]$$

$$w = \frac{R_{dx}[0]}{R_{xx}[0]}$$

$$R_{xx}[0] = E[x[n] \cdot x[n]] = E[2 \cdot 2] = 4.$$

$$R_{dx}[0] = E[d[n] \cdot x[n]] = E[1 \cdot 2] = 2$$

$$\boxed{w = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

b) Con el algoritmo de máxima pendiente, igualmente tenemos que para un filtro de orden 1 queda:

$$w(i+1) = w(i) - \mu \cdot \underbrace{[R_{xx}[0] \cdot w(i)]}_{=4} - \underbrace{R_{dx}[0]}_{=2}$$

Elijo $\mu = 0.1$.

Elijo $w(0) = 0$ (lugar donde "tiro la pelota". cualquiera vale, pero ni cero o tengo que hacer muchos cálculos).

$$w(1) = w(0) - 0.1 [R_{xx}[0] \cdot w(0) - R_{dx}[0]]$$

$$= 0 - 0.1 [4 \cdot 0 - 2] = 0.2$$

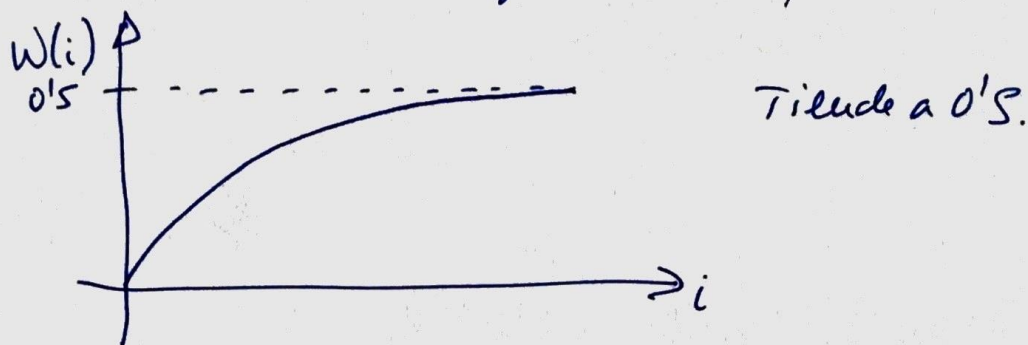
$$w(2) = w(1) - 0.1 [4 \cdot w(1) - 2] = 0.2 - 0.1 [4 \cdot 0.2 - 2] = 0.32$$

$$w(3) = \dots = 0.392$$

$$w(4) = \dots = 0.432$$

$$w(5) = 0.4611 \quad w(6) = 0.4767 \dots$$

Si vemos como evoluciona el coeficiente, vemos que hace:

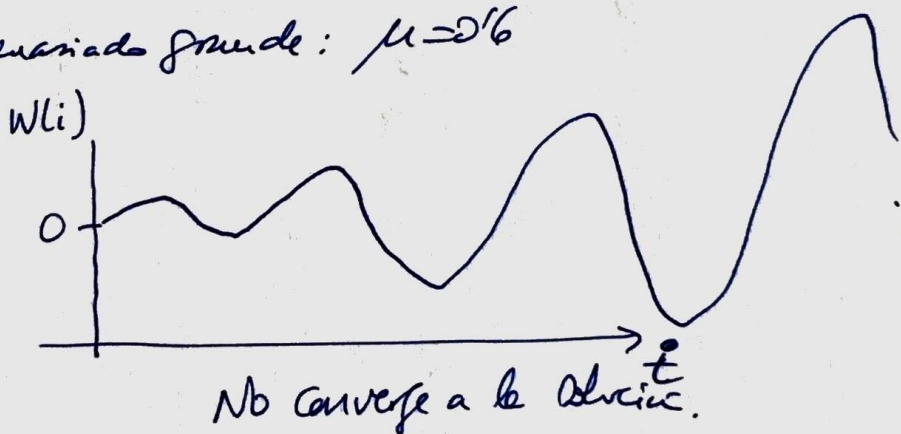


El algoritmo de máxima pendiente garantiza que si μ es demasiado grande, converge. De hecho, la corrección que se hace al coeficiente es cada vez menor:

$$\left. \begin{aligned} w(1) - w(0) &= 0.2 \\ w(2) - w(1) &= 0.12 \\ w(3) - w(2) &= 0.072 \\ w(4) - w(3) &= 0.0432 \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Esto muestra que converge.} \\ &\text{En realidad, con 2 iteraciones} \\ &\text{ya se ve que converge. Si no,} \\ &\text{la corrección sería mayor.} \end{aligned}$$

Si probamos con μ demasiado grande: $\mu = 0.6$

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ w(1) &= 1.2 \\ w(2) &= -0.48 \\ w(3) &= 1.87 \\ w(4) &= -1.4208 \\ &\vdots \end{aligned}$$



¿Cómo sería con un filtro de orden 2?

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_{xx}(0) & R_{xx}(1) \\ R_{xx}(1) & R_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad \underline{P} = \begin{bmatrix} R_{dx}(0) \\ R_{dx}(1) \end{bmatrix} \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_0(i+1) \\ w_1(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_0(i) \\ w_1(i) \end{bmatrix} - \mu \left[\underline{R} \cdot \begin{bmatrix} w_0(i) \\ w_1(i) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{dx}(0) \\ R_{dx}(1) \end{bmatrix} \right]$$

$$\text{Inicializaríamos } \begin{bmatrix} w_0(0) \\ w_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{un valor} \\ \text{otro valor} \end{bmatrix} \quad \text{ej: } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Extremadamente fácil de programar en Matlab.

b) Ahora hay ruido:

$$w = \frac{R_{xx}[\omega]}{R_{dr}[\omega]} \quad \text{relación entrada/salida.}$$

$$r[n] = x[n] + \eta[n]$$

$$\begin{aligned} R_{rr}[\omega] &= E[r[n] \cdot r[n]] = E[(x[n] + \eta[n])(x[n] + \eta[n])] = \\ &= E[x^2[n]] + \underbrace{2E[x[n] \cdot \eta[n]]}_{=0, \text{ p. ruido incorrelado con la señal}} + E[\eta^2[n]] \end{aligned}$$

$$\text{Ojo: } E[\eta^2[n]] = \sigma_n^2 + (\underbrace{\text{media del ruido}}_{=0})^2 = \sigma_n^2.$$

$$R_{rr}[\omega] = R_{xx}[\omega] + \sigma_n^2 = 4 + \sigma_n^2 \quad = 0$$

$$\begin{aligned} R_{dr}[\omega] &= E[d[n] \cdot r[n]] = E[d[n](x[n] + \eta[n])] \\ &= E[d[n] \cdot x[n]] + \underbrace{E[d[n] \cdot \eta[n]]}_{=0 \text{ otra vez.}} \end{aligned}$$

$$R_{dr}[\omega] = R_{dx}[\omega] = 2$$

$$\text{Por tanto, } w = \frac{2}{4 + \sigma_n^2} = \frac{2}{4 + 1} = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{2}$$

Cambia el resultado por efecto del ruido.

Problema 10

Todos los problemas de filtrado optimo son iguales. Algunos se pueden resolver con las ecuaciones normales, pero otros no; pero todos se pueden resolver siguiendo el mismo procedimiento que llevó a las ecuaciones normales.

Hay que minimizar $E(e^2|u|)$, dando el mejor valor posible de w_2 (es el único que me piden), así que derivó con respecto a ese coeficiente, e igualo a cero:

$$\frac{\partial E(e^2|u|)}{\partial w_2} = 0$$

↙ me voy a establecer cuánto vale $e(u)$ en mi problema.

$$\frac{\partial E(e^2|u|)}{\partial w_2} = 2E[e(u) \cdot \frac{\partial e(u)}{\partial w_2}]$$

↑
este paso siempre es igual

Miro el esquema:

$$e(u) = d(u) - w_4 \cdot w_3 \cdot w_0 \cdot x(u) - w_5 \cdot w_3 \cdot w_0 \cdot x(u-1) - \dots$$

$$\dots w_1(r(u) + w_0 \cdot x(u)) - w_2(r(u-1) + w_0 \cdot x(u-1))$$

Recomendable ir desde la entrada poniendo lo que hay tras cada filtro.

Recordar que un filtro de dos coeficientes a_0 y a_1 tiene como salida ~~doublet~~ $a_0 x(u) + a_1 x(u-1)$.

Entonces: $\frac{\partial e(u)}{\partial w_2} = -r(u-1) - w_0 x(u-1)$ Ahí más tiene w_2 .

Sustituyo: $E[e(u)(r(u-1) + w_0 x(u-1))] = 0$

Ahora ya toca desarrollar. Para ello sustituyo $e(u)$ por la expresión que tiene. Es un poco larga, así que hay que hacerlo con mucho cuidado.

$$E[d(u) \cdot r(u-1)] + w_0 E[d(u) \cdot x(u-1)] - w_4 w_3 w_0 E[x(u) \cdot r(u-1)] \dots$$

$$- w_4 w_3 w_0 E[x(u) \cdot x(u-1)] - w_5 w_3 w_0 E[x(u-1) \cdot r(u-1)] \dots$$

$$- w_5 w_3 w_0 E[x(u-1) \cdot x(u-1)] - \dots$$

Queda una expresión larga, pero hay al menos un truco para acortarla: los términos en que se multiplique el ruido por señales van a tener esperanza cero, así que se pueden ir puer directamente.

Queda:

$$\begin{aligned} & \cancel{E[d(n) \cdot x(n-1)]} - w_4 w_3 w_0^2 E[x(n) \cdot x(n-1)] \dots \\ & - w_5 w_3 w_0^2 E[x^2(n-1)] - w_1 E[r(n) \cdot r(n-1)] - w_1 w_3 E[x(n) x(n-1)] \dots \\ & - w_2 E[r(n-1) r(n-1)] - w_2 w_3 E[x(n-1) x(n-1)] = 0. \end{aligned}$$

$$E[d(n) \cdot x(n-1)] = R_{dx}[-1] = -0.5 \quad (\text{enunciado})$$

$$E[x(n) \cdot x(n-1)] = R_{xx}[1] = 0.5$$

$$E[x(n-1) \cdot x(n-1)] = R_{xx}[0] = 1 \quad ; \text{¡dijo! La diferencia de instantes es 0, así que es } R_{xx}[0].$$

$$E[r(n) \cdot r(n-1)] = (\text{media del ruido})^2 = 0 \quad (\text{pero podría no ser nula})$$

$$E[r(n-1) \cdot r(n-1)] = \sigma_n^2 + \text{media}^2 = \sigma_n^2 = 1. \quad \text{No importa, la diferencia entre instantes es 0.}$$

Tenemos todos los valores de la ecuación excepto w_2 .

La ecuación con 1 incógnita. Despejamos, y lo que sale.

Si nos pudiesen 2 coeficientes (ejemplo, w_2 y w_4): tendríamos dos derivadas:

$$\frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial w_2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial E[e^2(n)]}{\partial w_4} = 0$$

Condición de dos ecuaciones con dos incógnitas. Es más largo, las ecuaciones son más incómodas, pero ~~no~~ se puede hacer más difícil. Lo único que hay que hacer es seguir el procedimiento con cuidado con las cuentas.

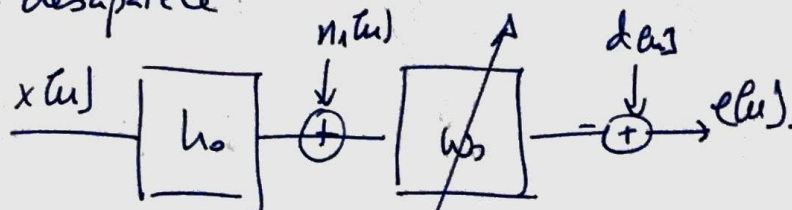
dijo: fuente de errores habitual: $E[d(n) \cdot x(n-1)] = R_{dx}[-1] \neq R_{dx}[1]$
¡Cuidado con esto!

Problema 11

Este problema es exactamente igual que el anterior. lo primero es caracterizar lo que tenemos que minimizar, que es $e(n)$:

$$e(n) = d(n) - w_0 n_1(n) - w_0 h_0 x(n) - w_0' n_2(n) - w_1' n_2(n-1) - w_0' b_0 y(n) \dots \\ - w_0' b_1 y(n-1) - w_1' b_0 y(n-1) - w_1' b_1 y(n-2)$$

a) Si $w_0', w_1' = 0$, se reduce el esquema porque toda la rama de abajo desaparece:



$$e(n) = d(n) - w_0 n_1(n) - w_0 h_0 x(n)$$

Para w_0 :

$$\frac{\partial E[e(n)]}{\partial w_0} = 2E[e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial w_0}] = -2E[e(n)(n_1(n) + h_0 x(n))] = 0$$

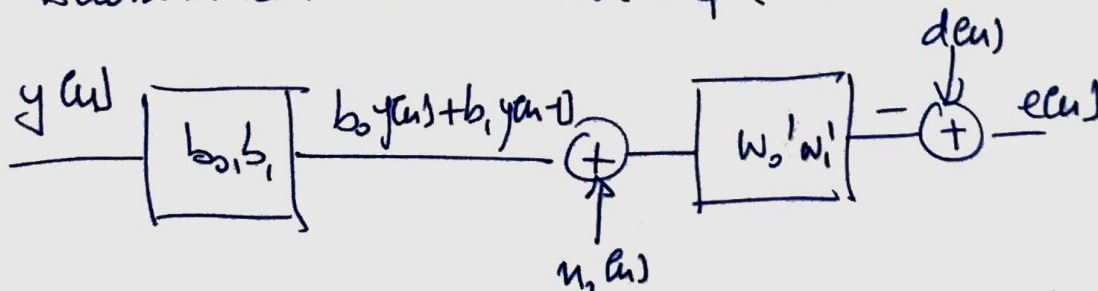
$$h_0 E[d(n) \cdot x(n)] - w_0 h_0^2 E[x^2(n)] - w_0 E[n_1(n) \cdot n_1(n)] = 0$$

Se han anulado todos los productos cruzados ruido-senal.

$$h_0 R_{dx}(0) - w_0 h_0^2 R_{xx}(0) - w_0 \cdot \sigma_1^2 = 0$$

Se despeja w_0 y lo que falta.

b) Ahora es la rama de arriba la que se anula



$$e(n) = d(n) - w_0' n_2(n) - w_1' n_2(n-1) - w_0' b_0 y(n) - w_0' b_1 y(n-1) \dots \\ - w_1' b_0 y(n-1) - w_1' b_1 y(n-2)$$

$$\frac{\partial E[e(n)]}{\partial w_0'} = \dots = -2E[e(n)(n_2(n) + b_0 y(n) + b_1 y(n-1))] = 0$$

$$\frac{\partial E[e(n)]}{\partial w_1'} = \dots = -2E[e(n)(n_2(n-1) + b_0 y(n-1) + b_1 y(n-2))] = 0$$

Se desarrolla para llegar a dos ecuaciones con dos incógnitas.
 NOTA: En el enunciado falta el valor de $R_{dy}[-2]$, es una errata.

Recordar: $E[d(n) \cdot y(n-2)] = R_{dy}[-2]$

$E[y(n-1) \cdot y(n-2)] = R_{yy}[1]$

$E[y(n-1) \cdot y(n-1)] = R_{yy}[0] = \sigma_y^2 + \text{media } y^2$
 $= \sigma_y^2$ en este caso.

c) Se repite lo mismo. Es igual siempre, aunque dependiendo del problema (como este) puede ser largo. ¡Cuidado con las averías, es la única dificultad!

