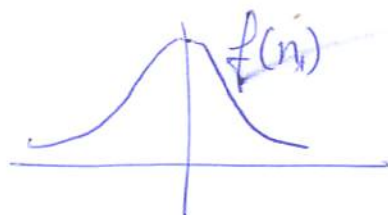
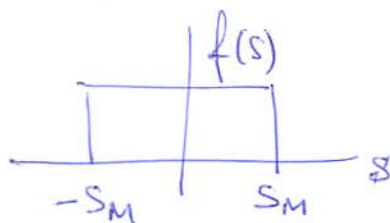


EJERCICIOS

* Hoja 4, nº 1.

Ya lo hemos hecho parcialmente en clase. Lo repasamos.

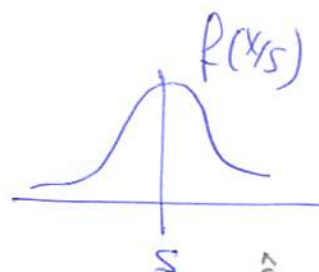


$$X_1 = S + n_1$$

a) • Estimador ML :

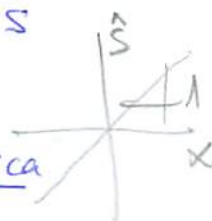
$$\hat{S}_{ML} \Rightarrow \max f(x/s)$$

$$f(x/s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-s}{\sigma_n} \right)^2}$$



Máximo: en $\boxed{x=s}$ $\hat{S}_{ML} = x$

$\Rightarrow$ La estima de máxima verosimilitud de una única observación es dicha observación.



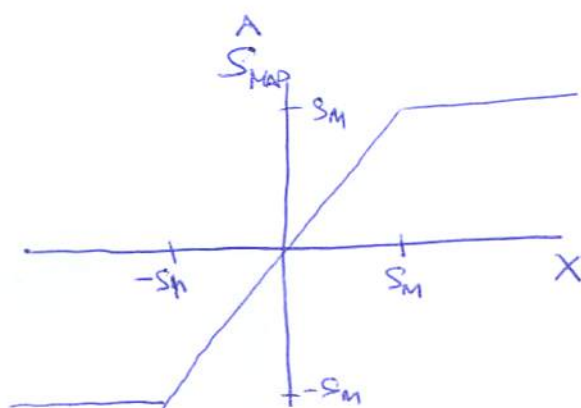
• Estimador MAP :

$$\hat{S}_{MAP} \Rightarrow \max f(s/x)$$

$$f(s/x) = \frac{f(x/s) \cdot f(s)}{f(x)}$$



Ya vimos que quedaba así.



$$\hat{S}_{MAP} = \begin{cases} x, & x \in [-S_M, S_M] \\ -S_M, & x < -S_M \\ S_M, & x > S_M \end{cases}$$

• Estimador lineal MSE :

$\hat{S} = h \cdot x_1$ Sólo tengo una observación, de forma que sólo puedo hacer esa combinación lineal.

$$\overset{1 \times 1}{R} \cdot h = g$$

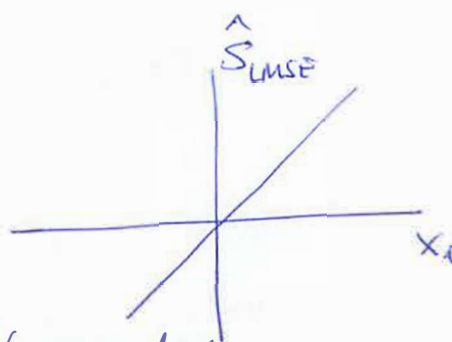
$$R = E[x_1 x_1] = E[s^2] + E[n_1^2] = \sigma_s^2 + \sigma_n^2$$

$$x_1 = s + n_1$$

$$g = E[s \cdot x_1] = E[s(s + n_1)] = \sigma_s^2$$

$$h = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_n^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}}$$

$$\boxed{\hat{S}_{\text{LMSE}} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}} \cdot x_1}$$



Da una recta, pero no de pendiente unidad.

Si el ruido es grande, la pendiente de la recta baja
 un estimador trata de hacer una estimación haciendo uso del conocimiento a priori, y resulta una forma peculiar.

→ Las 3 estimas son distintas!

b) Dibujos.

c) Repetir para N-observaciones.

• Estimador ML :

$$f(\vec{x}/s) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - s}{\sigma_n} \right)^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} \right)^N e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - s}{\sigma_n} \right)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\{ \ln[f(\vec{x}/s)] \right\} = 0$$

para maximizar.

Sale:
$$\hat{s}_{ML} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

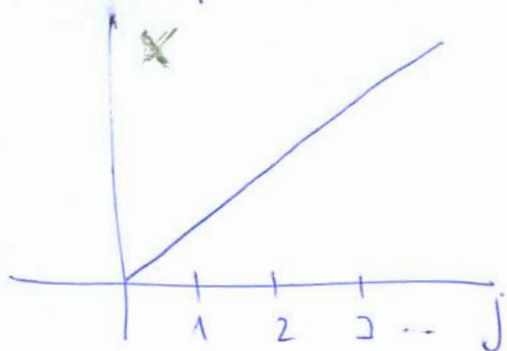
• Estimador MAP :

Queda un desarrollo complicado y largo. Intentar, y trataremos de resolverlo más adelante.

• Lineal MSE :

$$\hat{s}_{LMSE} = \frac{1}{N + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}} \sum_{j=1}^N x_j$$

* Hoja 4, n.º 2.



$$x_j = js + n_j$$

$$f(s) = \mathcal{G}(0, \sigma_s^2)$$

a) $N=2 \Rightarrow \vec{x} = [x_1, x_2]$

$$\begin{cases} x_1 = s + n_1 \\ x_2 = 2s + n_2 \end{cases}$$

$\hat{s}_{\text{LMS}}?$ $R \cdot h = g$

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} E[x_1 x_1] \\ E[x_2 x_2] \\ E[x_1 x_2] \end{array} \right.$$

$$E[x_1 x_1] = E[(s + n_1)^2] = \sigma_s^2 + \sigma_n^2 + 0 = \sigma_s^2 + \sigma_n^2$$

$$E[x_2 x_2] = E[(2s + n_2)^2] = 4\sigma_s^2 + \sigma_n^2$$

$$E[x_1 x_2] = E[x_2 x_1] = E[(s + n_1)(2s + n_2)] =$$

$$= E[(2s^2 + 2sn_1 + sn_2 + n_1 n_2)] =$$

$$= 2\sigma_s^2 + 0 + 0 + 0 = 2\sigma_s^2$$

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 + \sigma_n^2 & 2\sigma_s^2 \\ 2\sigma_s^2 & 4\sigma_s^2 + \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la diagonal principal son diferentes :-

- Variaciones diferentes indican que NO es un proceso estocástico estacionario. Hay una tendencia.

Seguimos igual:

Matriz (vector) g :

↓
La habíamos
de ello.

$$E[Sx_1] = \sigma_s^2$$

$$E[Sx_2] = E[S(2s+n_2)] = E[2s^2 + sn_2] = 2\sigma_s^2$$

Queda:

$$\begin{bmatrix} \sigma_s^2 + \sigma_n^2 & 2\sigma_s^2 \\ 2\sigma_s^2 & 4\sigma_s^2 + \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 \\ 2\sigma_s^2 \end{bmatrix}$$

Salen:
$$\boxed{h_1 = \frac{1}{5 + \sigma_n^2/\sigma_s^2} ; h_2 = 2h_1}$$

b) Hay que repetirlo para 3 muestras:

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \end{bmatrix}$$

$$E[x_1x_1] = \sigma_s^2 + \sigma_n^2$$

$$E[x_2x_2] = 4\sigma_s^2 + \sigma_n^2$$

$$E[x_3x_3] = E[(3s+n_3)^2] = 9\sigma_s^2$$

$$E[x_1x_2] = E[x_2x_1] = 2\sigma_s^2$$

$$E[x_1x_3] = E[x_3x_1] = 3\sigma_s^2$$

$$E[x_2x_3] = E[x_3x_2] = 6\sigma_s^2$$

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 + \sigma_n^2 & 2\sigma_s^2 & 3\sigma_s^2 \\ 2\sigma_s^2 & 4\sigma_s^2 + \sigma_n^2 & 6\sigma_s^2 \\ 3\sigma_s^2 & 6\sigma_s^2 & 9\sigma_s^2 + \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Haciendo todo, queda:

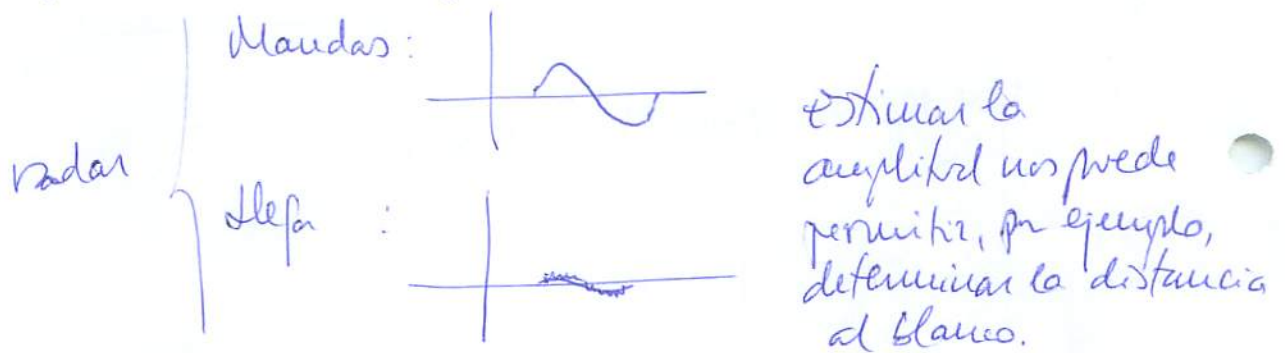
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 \\ 2\sigma_s^2 \\ 3\sigma_s^2 \end{bmatrix}$$

lo que falta.

Tanto en 2 como en 3 muestras, se da más peso ($h_3 > h_2 > h_1$) a las muestras asociadas a un nivel más grande, dado que presentan una mejor relación señal/ruido.

c) $x_j = f_j \cdot s + n_j$

Tenemos N muestras de una forma de onda conocida, con amplitud desconocida y en ruido (caso típico, el RADAR):



$$\hat{s}_{LMSE} = \sum_{j=1}^N h_j x_j \quad (\text{estimador lineal que buscamos})$$

$$R h = g$$

Para resolver esas matrices:

$$\begin{aligned} E[x_i x_j] &= E[(f_i s + n_i)(f_j s + n_j)] = \\ &= E[f_i f_j s^2 + f_i s n_j + f_j s n_i + n_i n_j] = \\ &= f_i f_j \sigma_s^2 + 0 + 0 + \delta_{ij} \sigma_n^2 \end{aligned}$$

$$E[x_i x_j] = f_i f_j \sigma_s^2 + \delta_{ij} \sigma_n^2$$

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} f_1^2 \sigma_s^2 + \sigma_n^2 & f_2 f_1 \sigma_s^2 & \dots \\ f_1 f_2 \sigma_s^2 & f_2^2 \sigma_s^2 + \sigma_n^2 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$E[x_i s] = E[(f_i s + n_i) \cdot s] = E[f_i s^2 + n_i s] = f_i \sigma_s^2$$

$$g = \begin{bmatrix} f_1 \sigma_s^2 \\ f_2 \sigma_s^2 \\ \vdots \\ f_N \sigma_s^2 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} h_i &= \alpha f_i \quad i=1 \dots N \\ \text{con } \alpha &= \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2 + \sigma_s^2 \sum_{i=1}^N f_i^2} \end{aligned}$$