EJERCICIOS

* Hoja 3, nº 1. Lo diferente no es la media sino la varianza.

a) Mínima probabilidad de error:

$$\frac{f(\vec{x}/H_1)}{f(\vec{x}/H_0)} \gtrless \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = 1$$

↑ Probabilidades a priori fijadas.

$$f(\vec{x}/H_0) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i/H_0) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\sigma_0}\right)^2}$$

$$f(\vec{x}/H_1) = \ldots = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\sigma_1}\right)^2}$$

Entonces:

$$\frac{\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\sigma_1}\right)^2}}{\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{\sigma_0}\right)^2}} \gtrless 1$$

$$\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^N e^{-\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[\left(\frac{x_i}{\sigma_1}\right)^2 - \left(\frac{x_i}{\sigma_0}\right)^2\right]\right\}} \gtrless 1$$

$$N \ln\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\left[\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_0^2}\right] \gtrless 0$$

$$\frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}\right)}_{\frac{\sigma_1^2 - \sigma_0^2}{\sigma_0^2\sigma_1^2}} \sum_{i=1}^{N} x_i^2\right] \gtrless N \ln\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \gtrless \frac{2\sigma_0^2\sigma_1^2}{\sigma_1^2 - \sigma_0^2} \cdot \ln\left(\sigma_1/\sigma_0\right)}$$

b) Sí, tengo un estadístico suficiente: $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$ ← no es la media

Por eso siempre hay que comprobar cuál es un estadístico suficiente.

c) Una especie de modulación en potencia, donde se decida en función de la potencia recibida.

* Hoja 3, nº2.

a) $\frac{f(x/5)}{f(x/0)} \underset{0}{\overset{5}{\gtrless}} k$

$f(x/5) = mx + n \begin{cases} n = 0 \\ m = \frac{0.2}{10} = \frac{1}{50} \end{cases}$

$\begin{cases} f(x/5) = \frac{x}{50} & 0 \le x \le 10 \\ f(x/0) = -\frac{x}{50} + 0.2 & 0 \le x < 10 \end{cases}$

$\frac{x/50}{0.2 - x/50} \gtrless k \longrightarrow x \underset{0}{\overset{5}{\gtrless}} \frac{0.2k}{0.02 + k/50}$

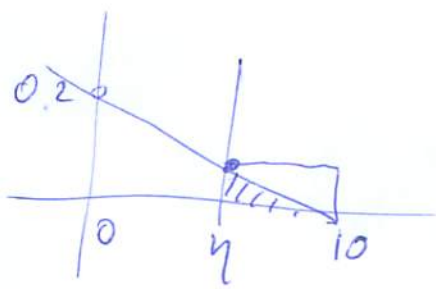
$$x \underset{0}{\overset{5}{\gtrless}} \frac{10k}{1+k} = \eta$$

b) No podemos maximizar la P_e porque no contamos con las probabilidades de que un alumno estudie. (prob a priori).

c) Podemos aplicar Neyman-Pearson. $\begin{cases} 1 \equiv \text{estudiar} \\ 0 \equiv \text{no estudiar} \end{cases}$

$P_{FA} = 0.09$ ("Voy a aprobar a 9 de cada 100 alumnos que no han estudiado").

$$P_F = 0.09 = \int_{R_1} f(x/H_0)\, dx$$



$0.2 - \frac{\eta}{50}$ $\quad P_F = \frac{(10-\eta)(0.2 - \frac{\eta}{50})}{2} = 0.09$

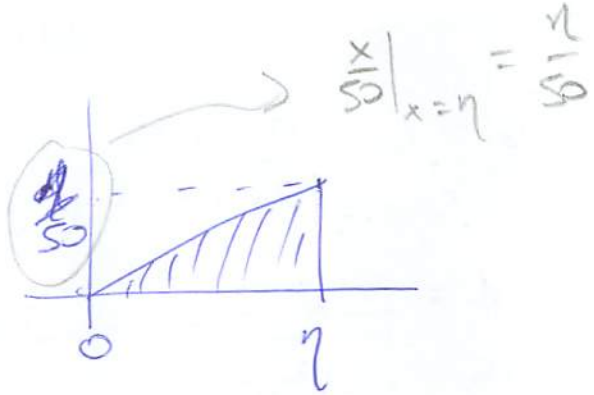
Queda: $0.02\eta^2 - 0.4\eta + 1.82 = 0$

$$\eta = \begin{cases} 13 > 10 \text{ (Imposible)} \\ 7 \end{cases}$$

$\boxed{\eta = 7}$ lista para aplicar.

d) $P_D = 1 - P_M$

$$P_M = \int_{R_0} f\left(\frac{x}{s}\right) dx$$



$$P_M = \frac{\eta \cdot \frac{\eta}{50}}{2} = \frac{\eta^2}{100} = 0.49$$

$\eta = 7$.

$$\boxed{P_D = 1 - 0.49 = 0.51}$$

* Hoja 3, nº3

a) Para este tipo de problema se emplea el filtro adaptado.

$$\sum_{i=1}^{N} s_i x_i = 0.5(x_1 + x_8) + 1.5(x_2 + x_7) + 2.5(x_3 + x_6) + 3.5(x_4 + x_5) \gtrless \eta$$

Si ambas situaciones son equiprobables, el umbral está en la mitad, entre 0 (no hay señal) y $\sum s_i^2$.

$$\eta = \frac{1}{2}\sum s_i^2$$

Por encima: hay señal.

Por debajo: no la hay.

b) $Y = \sum_{i=1}^{N} s_i n_i$, es lo que veríamos sin señal.

↳ combinación lineal de gaussianas:

- Gaussiana { media 0, varianza $\sum s_i^2 \sigma_n^2$

$G(0, \sum s_i^2 \sigma_n^2)$

c) $P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma_n'}\right)$

$d = \sum s_i^2 - 0 = \sum s_i^2$

$\sigma_n' = \sqrt{\sum s_i^2 \sigma_n^2}$

$$P_e = Q\left(\frac{\sum s_i^2}{2\sqrt{\sum s_i^2 \sigma_n^2}}\right) = Q\left(\frac{\sum s_i^2}{2\sigma_n \sqrt{\sum s_i^2}}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{\sum s_i^2}}{2\sigma_n}\right)$$

Para ver si detectamos o no:

$\sum s_i x_i = 29 > 21 = \sum s_i^2$

↓

sí detectamos señal.

d) $P_e = Q\left(\frac{\sqrt{\sum cte^2}}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{N \cdot cte^2}}{2\sigma_n}\right) = Q\left(\frac{cte \cdot \sqrt{N}}{2\sigma_n}\right)$

☑ lo mismo que teníamos como mínima P_e para N observaciones de una señal de amplitud "constante" y "0".