

Procesado de Señal – Hoja de problemas 3

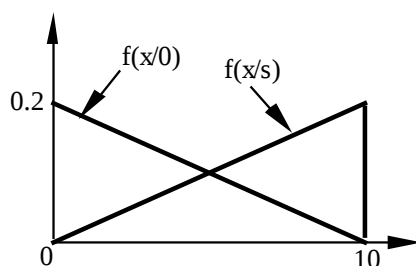
1. Se dispone de un vector de observaciones $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \dots, x_N]$ y se debe decidir entre dos posibles hipótesis. En ambas, los valores x_i son realizaciones de variables aleatorias Gaussianas independientes, idénticamente distribuidas y de media cero. Bajo la hipótesis H_0 cada x_i tiene varianza σ_0^2 y bajo la hipótesis H_1 presenta varianza σ_1^2 . Las probabilidades a priori son iguales para ambos casos.

a) Calcular el test para decidir (con mínima probabilidad de error) a qué hipótesis pertenece un vector de observaciones.

b) ¿Existe un estadístico suficiente para tomar esta decisión? ¿Cuál es?

c) ¿Se le ocurre alguna aplicación de ese test de decisión?

2. Un profesor de universidad pretende aprobar o no a un determinado alumno basándose en si ha estudiado o no. Para ello modela el problema con las dos densidades de probabilidad condicionales de la figura:



$f(x/0)$ implica que son más probables notas bajas entre los alumnos que no han estudiado, mientras que $f(x/s)$ viene a decir que los alumnos que estudian tienen con más probabilidad notas altas.

a) Deduzca el cociente de verosimilitud $l(x)$ para esta decisión y demuestre que la condición $l(x) < \lambda$ es equivalente a la condición $x < \eta$ para un η .

b) ¿Puede calcular el η para minimizar la probabilidad de error al aprobar o suspender a un alumno?

c) Encuentre el η que maximiza la probabilidad de detectar correctamente que un alumno ha estudiado, con una probabilidad del 0.09 de equivocarnos aprobando a un alumno que realmente no ha estudiado.

d) ¿Cuál es la probabilidad de detección para el umbral obtenido en c)?

3. Para detectar la presencia o ausencia de la señal en la figura se toman 8 muestras en ruido blanco gaussiano. Existe la misma probabilidad de que la señal exista o no. Las muestras de ruido son independientes, gaussianas, de media cero y varianza σ_n^2 . Se pretende minimizar la probabilidad de error al tomar la decisión.

a) Obtenga la regla de decisión.

b) Calcule la distribución correspondiente a $\sum_{i=1}^8 s(i)n_i$ siendo n_i las muestras de ruido.

c) Calcule la probabilidad de error. ¿Cuál es la decisión para un vector de observaciones con valores $\mathbf{x}=\{-2, -6, 1, 6, 4, 2, 0, -7\}$?

d) Suponga ahora que la señal a detectar es constante, de amplitud 3.5. Calcule nuevamente la probabilidad de error.

