

Filtrado Óptimo y Adaptativo

Filtrado adaptativo: el algoritmo LMS

- Algoritmo de Máxima Pendiente:
 - El cálculo del gradiente puede complicar los métodos iterativos de forma que pierdan capacidad de adaptarse rápidamente a los cambios
 - Es posible acelerar los métodos **estimando el valor del gradiente**, a costa de perder precisión (algoritmos subóptimos)
 - **Realmente no es un algoritmo adaptativo capaz de seguir los cambios de un sistema**
 - Para ser adaptativo necesitamos un conjunto de coeficientes para el filtro en cada instante n

¿Y eso cómo lo hacemos?

- Widrow, 1960's

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu E[e[n] \cdot \mathbf{x}]$$

- Propone estimar el gradiente estimando la esperanza matemática

¿Cómo estimar la esperanza matemática?

Con un promediado:

$$\hat{E}[e[n] \cdot \mathbf{x}] = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e[n-l] \mathbf{x}[n-l]$$

donde

$$\mathbf{x} = \{x[n], x[n-1] \dots x[n-N+1]\}^T = \mathbf{x}[n]$$

$$\mathbf{x}[n-l] = \{x[n-l], x[n-l-1] \dots x[n-l-N+1]\}^T$$

$$\hat{E}[e[n] \cdot \mathbf{x}] = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e[n-l] \mathbf{x}[n-l]$$

- Si se incluye esta estima en el algoritmo de máxima pendiente:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \frac{\mu}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e[n-l] \mathbf{x}[n-l]$$

- Si $L=1$ se realiza una estima instantánea del valor de la esperanza matemática
- En ese caso, los coeficientes se actualizan en cada instante n , no en cada iteración

$$\mathbf{w}[n+1] = \mathbf{w}[n] + \mu \cdot e[n] \cdot \mathbf{x}[n]$$

$$e[n] = d[n] - \mathbf{w}^T[n] \mathbf{x}[n]$$

$$\mathbf{w}[n + 1] = \mathbf{w}[n] + \mu \cdot e[n] \cdot \mathbf{x}[n]$$

$$e[n] = d[n] - \mathbf{w}^T[n] \mathbf{x}[n]$$

- Algoritmo **LMS** (Least Mean Square)
 - La estima instantánea del gradiente se obtiene como el producto del valor actual de entrada al algoritmo multiplicado por el error cometido.
 - Se trata de un algoritmo “ruidoso”: emplea una única muestra para cada estima progresiva (para cada iteración) en lugar de emplear todas (el sumatorio del error).
 - Requerirá más iteraciones, pero acabará “promediando” el “ruido”.
 - Ya no se trata de un algoritmo iterativo, sino **secuencial**, para adaptarse a la entrada mientras ésta varía
 - Es el algoritmo más empleado en sistemas adaptativos

$$\mathbf{w}[n + 1] = \mathbf{w}[n] + \mu \cdot e[n] \cdot \mathbf{x}[n]$$

$$e[n] = d[n] - \mathbf{w}^T[n] \mathbf{x}[n]$$

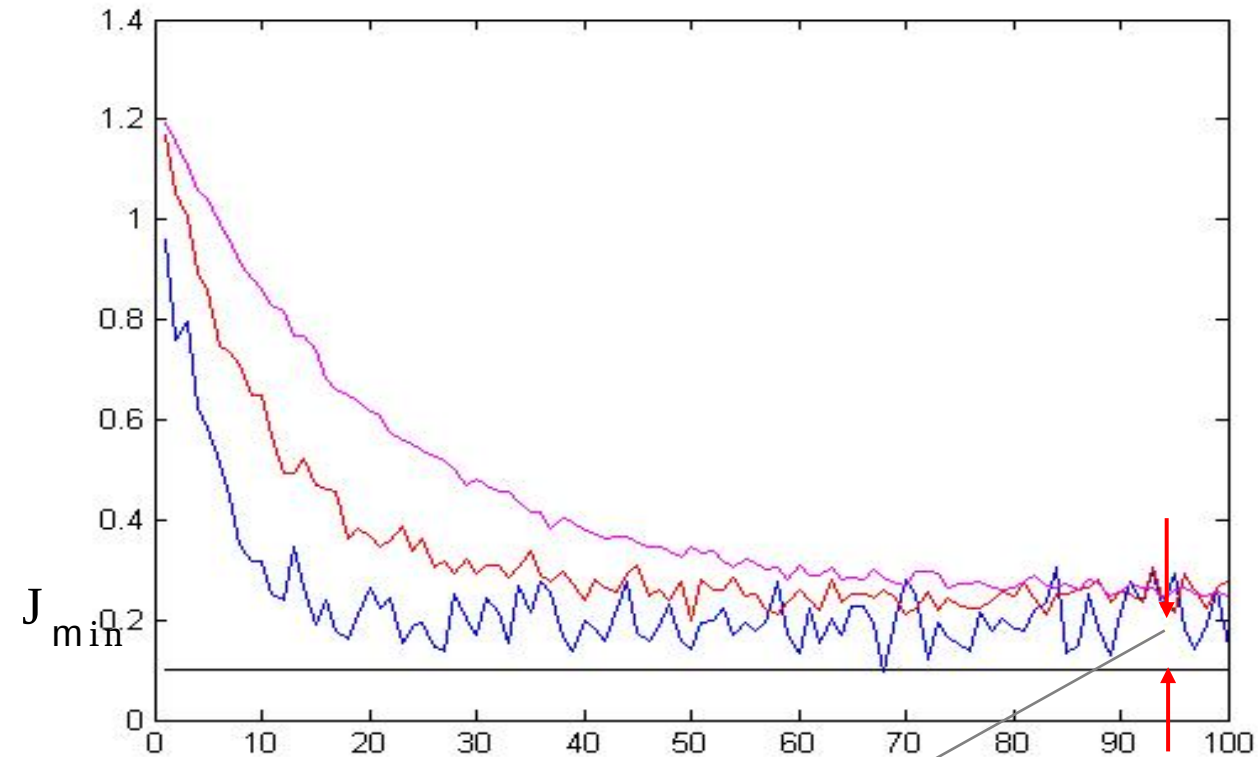
- Como la estima es “muy mala”, se trata de un algoritmo “subóptimo”.
- Además, actualiza cada conjunto de coeficientes en función del error cometido en la muestra anterior, no en la que “entra”.
- Tiende al óptimo con un cierto desajuste, y de forma inestable e irregular, pero responde muy rápidamente a las variaciones de la entrada.
- El parámetro μ tiene la misma importancia que en los métodos iterativos:

μ grande $\Rightarrow$ Convergencia rápida con oscilaciones

μ pequeño $\Rightarrow$ Convergencia lenta y suave

Algoritmo LMS Convergencia

- Curvas de aprendizaje del LMS



- Desajuste:

$$M = \frac{J_{final} - J_{min}}{J_{min}}$$