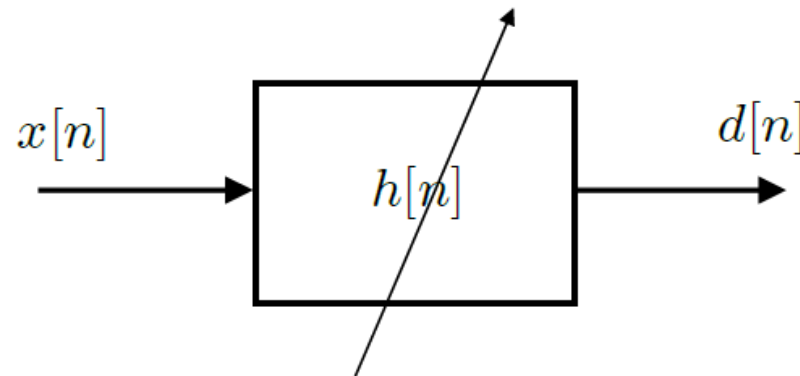


Filtrado Óptimo y Adaptativo

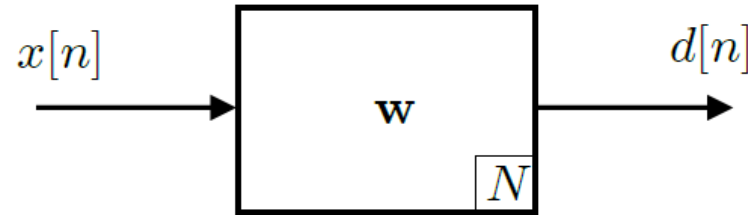
Filtrado Óptimo: el filtro de Wiener

- En muchos casos nos enfrentamos a problemas en los que se requiere que un sistema se adapte automáticamente en función de diferentes circunstancias
 - Control Automático de Ganancia
 - Igualador de canal en comunicaciones móviles
 - Etc.
- Este problema puede resolverse en muchas ocasiones empleando un filtro cuyos coeficientes se modifiquen en función del caso
- Requiere dos aspectos:
 - Algoritmo de adaptación de los coeficientes
 - Obtención de cuáles son los coeficientes adecuados en cada caso



Filtro lineal óptimo

- Objetivo: diseñar un filtro digital FIR de longitud finita N (predefinida) que convierta una señal de entrada $x[n]$ en otra de salida deseada $d[n]$ con mínimo error



$$\mathbf{w} = \{w_0, w_1 \dots w_{N-1}\}^T$$

$$\mathbf{x} = \{x[n], x[n-1] \dots x[n-N+1]\}^T$$

$$\hat{d}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} w_k x[n-k] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$$

- Se deben obtener los coeficientes óptimos para el filtro según algún criterio de error predefinido
- Típicamente: mínima esperanza del error cuadrático $E[e^2[n]]$

- Lógico: equivocarse (en media) lo menos posible:

$$J = E[e^2[n]]$$

- Para hacer mínima esta función se deriva respecto a cada coeficiente y se iguala la derivada a cero
- Desarrollando...

... se llega al **principio de ortogonalidad**

Filtro lineal óptimo

- Desarrollando el principio de ortogonalidad, se obtiene:

- Desarrollando el principio de ortogonalidad, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} R_{xx}[0] & R_{xx}[1] & \cdots & R_{xx}[N-1] \\ R_{xx}[1] & R_{xx}[0] & & \\ \vdots & & \ddots & \\ R_{xx}[N-1] & & & R_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{dx}[0] \\ R_{dx}[-1] \\ \vdots \\ R_{dx}[-(N-1)] \end{pmatrix}$$

Son las **ecuaciones normales**

¿Por qué salen estas ecuaciones?

- Desarrollando el principio de ortogonalidad, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} R_{xx}[0] & R_{xx}[1] & \cdots & R_{xx}[N-1] \\ R_{xx}[1] & R_{xx}[0] & & \\ \vdots & & \ddots & \\ R_{xx}[N-1] & & & R_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{dx}[0] \\ R_{dx}[-1] \\ \vdots \\ R_{dx}[-(N-1)] \end{pmatrix}$$

Son las **ecuaciones normales**

¿Por qué salen estas ecuaciones?

$$\hat{d}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} w_k x[n-k] = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$$

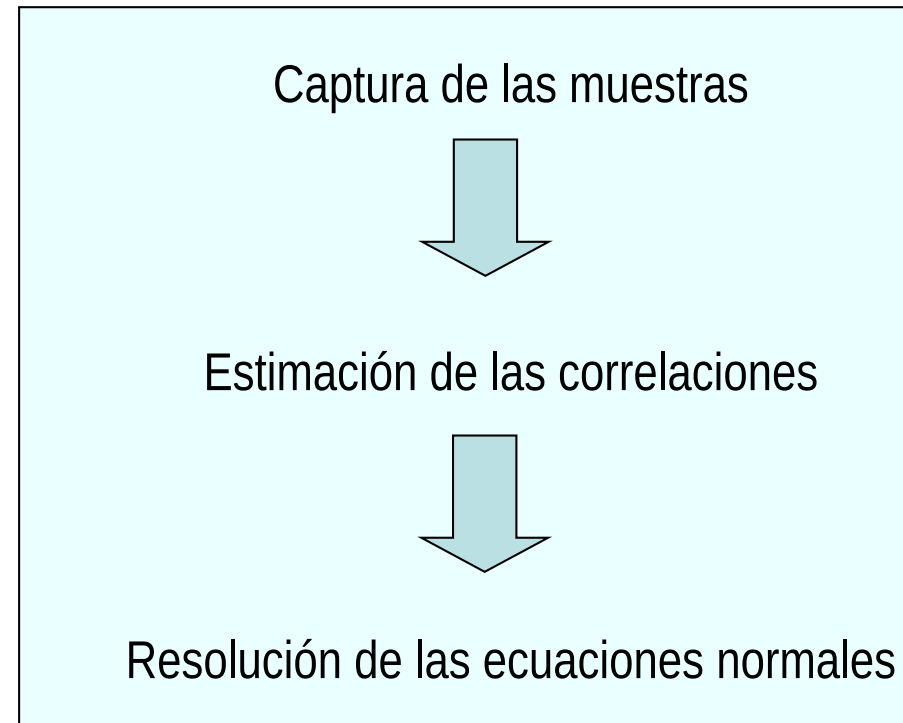
- Estamos buscando los coeficientes que mejor aproximan mediante una combinación lineal de muestras el valor deseado
 $\Rightarrow$ Es un problema de estimación lineal, y se resuelve como tal

- El problema habitual es
 - Disponemos de un registro finito de N muestras

$$\mathbf{x} = \{x[n], x[n-1], x[n-2] \dots x[n-N+1]\}$$

$$\mathbf{d} = \{d[n], d[n-1], d[n-2] \dots d[n-N+1]\}$$

- Para obtener el modelo completo:



$$\underbrace{\mathbf{R}}_{\begin{pmatrix} R_{xx}[0] & R_{xx}[1] & \cdots & R_{xx}[N-1] \\ R_{xx}[1] & R_{xx}[0] & & \\ \vdots & & \ddots & \\ R_{xx}[N-1] & & & R_{xx}[0] \end{pmatrix}} \underbrace{\mathbf{w}}_{\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{pmatrix}} = \underbrace{\mathbf{p}}_{\begin{pmatrix} R_{dx}[0] \\ R_{dx}[-1] \\ \vdots \\ R_{dx}[-(N-1)] \end{pmatrix}}$$

- Normalmente las ecuaciones normales se expresan nombrando cada matriz

$$\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{p}$$

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p}$$

- Filtro de Wiener