

Estimación Espectral

Alternativas al Periodograma

Promediado de periodogramas

- El objetivo de la mayoría de los métodos no paramétricos que estudiaremos es mejorar la consistencia del periodograma, aunque sea en detrimento de la resolución.
- ¿Forma de mejorar la consistencia?

Promediado de periodogramas

- El objetivo de la mayoría de los métodos no paramétricos que estudiaremos es mejorar la consistencia del periodograma, aunque sea en detrimento de la resolución.
- Forma de mejorar la consistencia: promediado
 - Los métodos de Bartlett y Welch se basan en promediar diferentes periodogramas (K)
 - Así la varianza será

$$\text{var}\{\bar{I}(\omega)\} \approx \frac{S^2(\omega)}{K}$$

donde K es el número de periodogramas promediados

- El estimador se vuelve consistente pero... ¿de dónde sacar más periodogramas con el mismo número de muestras?

Método de Bartlett

- Propuesto por Bartlett en 1953
- Método para aumentar (conseguir) la **consistencia** de la estimación espectral a partir del periodograma
- Si conseguimos reunir K periodogramas del conjunto de N muestras de que se dispone, la varianza de la estimación también se dividirá por un factor K :

$$\text{var}\{\bar{I}(\omega)\} \approx \frac{S^2(\omega)}{K}$$

- El problema es conseguir K periodogramas desde el registro de N muestras.
 - Conseguir más muestras hasta un total de KN no siempre es posible
 - La idea es solucionar el mismo problema que teníamos planteado con N muestras: se divide el registro en K segmentos y se hace el periodograma de cada uno de ellos

- El problema es conseguir K periodogramas desde el registro de N muestras.
 - Conseguir más muestras hasta un total de KN no siempre es posible
 - La idea es solucionar el mismo problema que teníamos planteado con N muestras: se divide el registro en K segmentos y se hace el periodograma de cada uno de ellos

Compromiso:

- Promediar reduce la varianza de la estimación, se gana consistencia
- Al reducir el tamaño de la ventana temporal empleada:
 - Se pierde resolución
 - Se aumenta el sesgo (el periodograma es asintóticamente insesgado)
- Los K registros serán:

$$x_r[n] = x[rR + n]w[n]$$

r es el número de segmento ($r=0\dots K-1$)

rR es el índice inicial de cada segmento

$w[n]$ es una ventana rectangular de longitud R

No hay solapamiento: $0 \leq n \leq R - 1$

Método de Bartlett

- El método de Bartlett no contempla solapamientos
- Cada uno de los periodogramas se calcularía como

$$I_r(\omega) = \frac{1}{R} \cdot |X_r(\omega)|^2 = \frac{1}{R} \cdot \left| \sum_{n=0}^{R-1} x_r[n] e^{-j\omega n} \right|^2$$

La ventana empleada es siempre rectangular

- Aumenta el sesgo y disminuye la resolución
- Disminuye la varianza
- **Se cambia sesgo por varianza**

Método de Welch

- Es una variante del método de Bartlett (Welch, 1967)
- Introduce dos modificaciones:
 - Los segmentos pueden solaparse
 - El enventanado puede no ser rectangular (periodogramas modificados)
- Los segmentos, entonces, serán

$$x_r[n] = x[rR + n]w[n]$$

r es el número de segmento

rR es el índice inicial de cada segmento

$w[n]$ es una ventana de longitud Q que debe especificarse

$$0 \leq n \leq Q - 1$$

$$Q \geq R$$

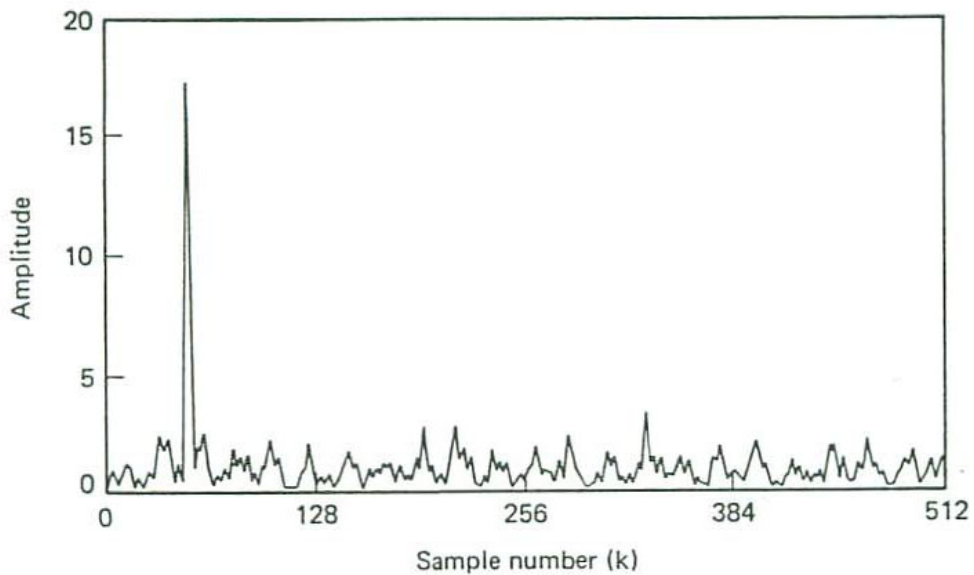
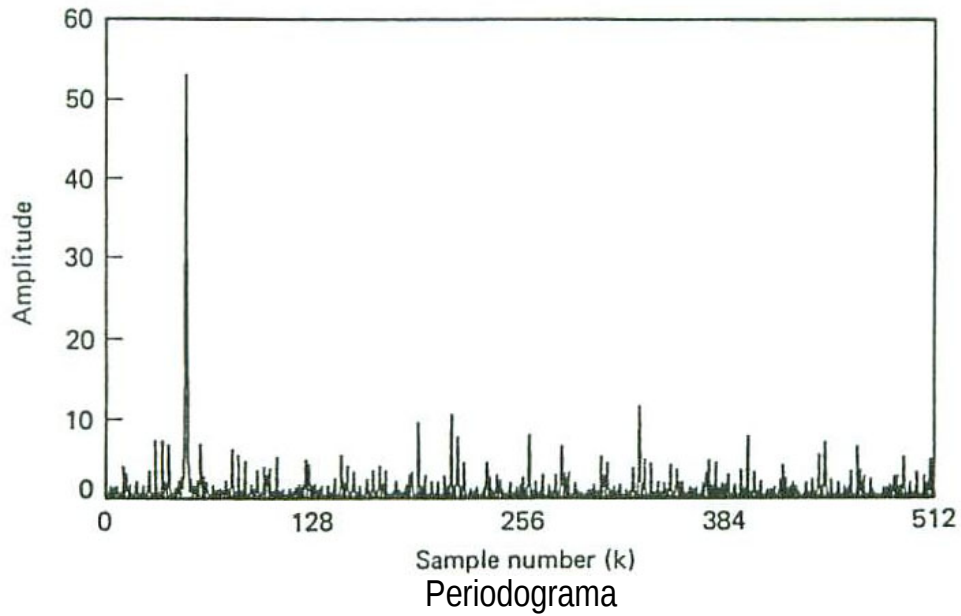
Ahora R representa lo que se “avanza” para formar el nuevo segmento, y Q es la longitud del mismo.

Método de Welch

- La idea “intuitiva” en este método es que al emplear solapamiento puedo:
 - Emplear el mismo número de registros, pero más grandes
 - Misma mejora de la varianza
 - No pierdo tanta resolución ni aumento tanto el sesgo como en el M. Bartlett
 - Emplear más registros del mismo tamaño
 - Con la misma pérdida de resolución y aumento de sesgo, mejoro más la varianza de la estimación
- En realidad, lo que se consigue es un “término medio” entre el periodograma y el método de Bartlett, puesto que no incorporo información nueva, sólo reutilizo la misma en los solapamientos
- Al igual que el Periodograma y el Bartlett, es asintóticamente insesgado (al aumentar la ventana, su transformada tiende a una delta)
- La resolución es dependiente de la ventana empleada
- Al igual que el método de Bartlett, el de Welch es consistente

Ejemplos

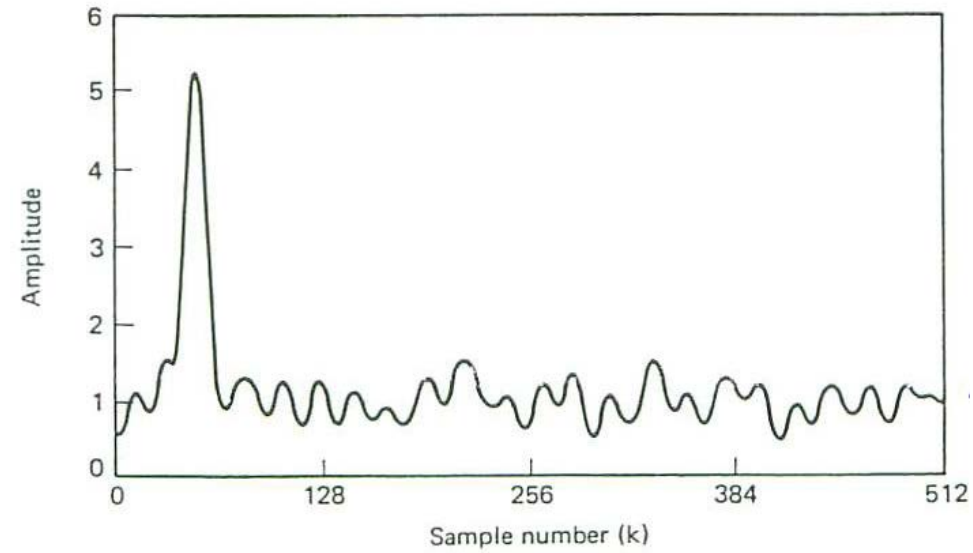
Efecto del promediado para señal blanca de 1024 muestras.



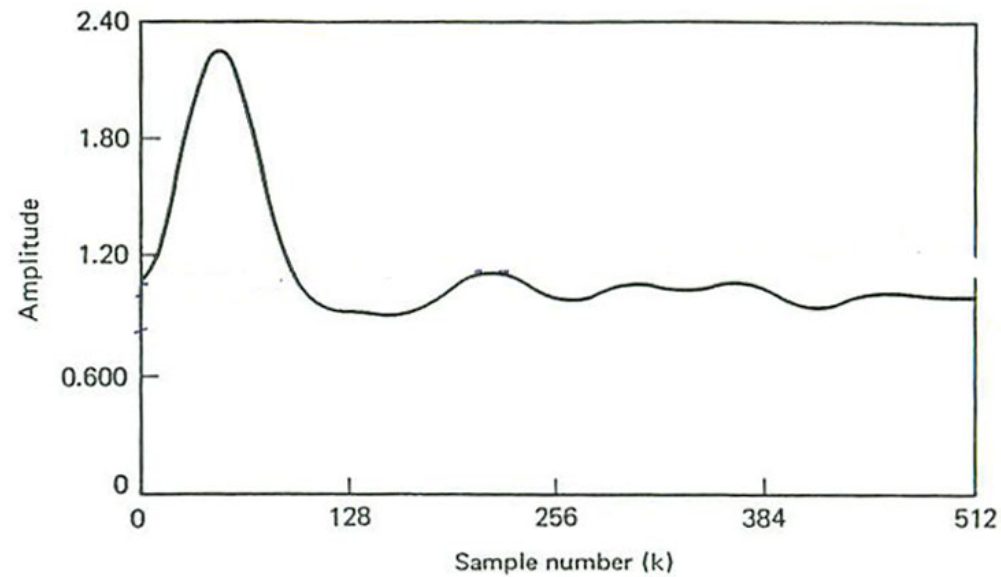
Promediado de 7 periodogramas de longitud 256.

Ejemplos

Efecto del promediado para señal blanca de 1024 muestras.



Promediado de 31 periodogramas de longitud 64.

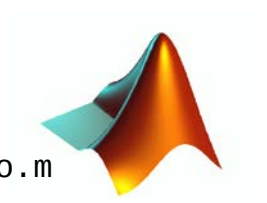


Promediado de 127 periodogramas de longitud 16.

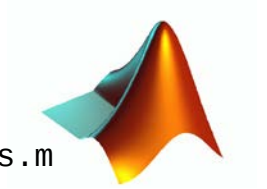
Ejemplos

- Comparación de los diferentes métodos:

AnalizadorComparacion_blanco.m



AnalizadorComparacion_tonos.m



Suavizado de periodogramas

- Los métodos de promediado de periodogramas (Bartlett y Welch) pretenden reducir la varianza del periodograma (o periodograma modificado).
- Otra forma de reducir la variabilidad estadística es mediante el suavizado del periodograma: Método de Blackman-Tukey o correlograma
- El periodograma se obtiene tomando la transformada de Fourier de una estima consistente de la autocorrelación
- El problema de la estima de la autocorrelación es que al trabajar con registros finitos presentará mucha variabilidad para m cercano a N

Ejemplo:

$$\hat{R}_{xx}^s[N-1] = \frac{1}{N}x[0]x[N-1]$$

Hay muy poco promediado para valores grandes de m , de forma que no se reduce varianza

¿Qué consecuencia tiene esto en la fiabilidad de la estima de la DEP?

Método de Blackman-Tukey

- La única forma de reducir la varianza del periodograma es reducir la varianza de estas estimas o reducir su contribución al periodograma
 - Métodos de Bartlett y Welch: reducen varianza en la estima de la autocorrelación mediante el promediado
 - Método de Blackman-Tukey: reduce la contribución al periodograma de las muestras menos fiables de la estima de la autocorrelación
- ¿Cómo?

Método de Blackman-Tukey

- La única forma de reducir la varianza del periodograma es reducir la varianza de estas estimas o reducir su contribución al periodograma
 - Métodos de Bartlett y Welch: reducen varianza en la estima de la autocorrelación mediante el promediado
 - Método de Blackman-Tukey: reduce la contribución al periodograma de las muestras menos fiables de la estima de la autocorrelación
- ¿Cómo?

Enventanando la estima de la autocorrelación

- Dando menos peso o eliminando las muestras menos fiables
- Quedándonos con el centro de la autocorrelación ($|m|$ pequeño)

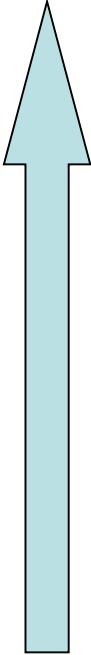
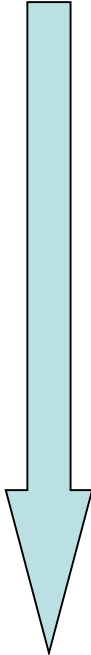
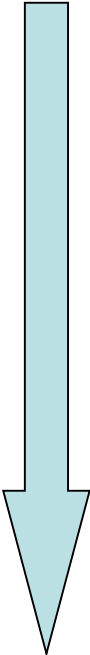
$$\hat{S}_{xx}(\omega) = TF\{\hat{R}_{xx}^s[m]w[m]\}$$
$$\hat{S}_{xx}(\omega) = \sum_{m=-M}^M \hat{R}_{xx}^s[m]w[m]e^{-j\omega m}$$

Donde $w[m]$ es una ventana que se extiende entre $-M$ y M , $M < N-1$

Método de Blackman-Tukey

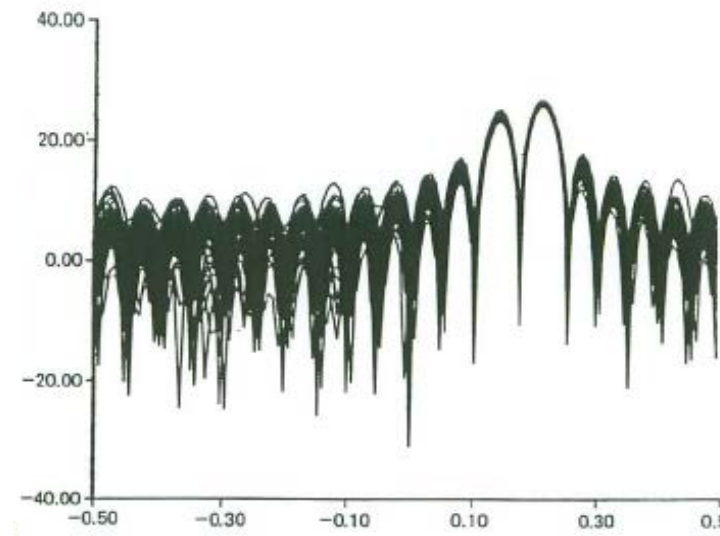
- Si, por ejemplo, se emplea una ventana rectangular, las estimas peores de la autocorrelación son anuladas, y la varianza del estimador de la DEP disminuye
- El compromiso de esta reducción de varianza es una importante reducción en la resolución, puesto que se emplea un número menor de muestras para la estima del espectro
- **Compromiso:**
 - Para sesgo pequeño, interesa M grande
 - Para varianza pequeña, interesa M pequeño (para hacer pequeño el sumatorio)
 - Generalmente se recomienda $M_{max} = \frac{N}{5}$

Recapitulación

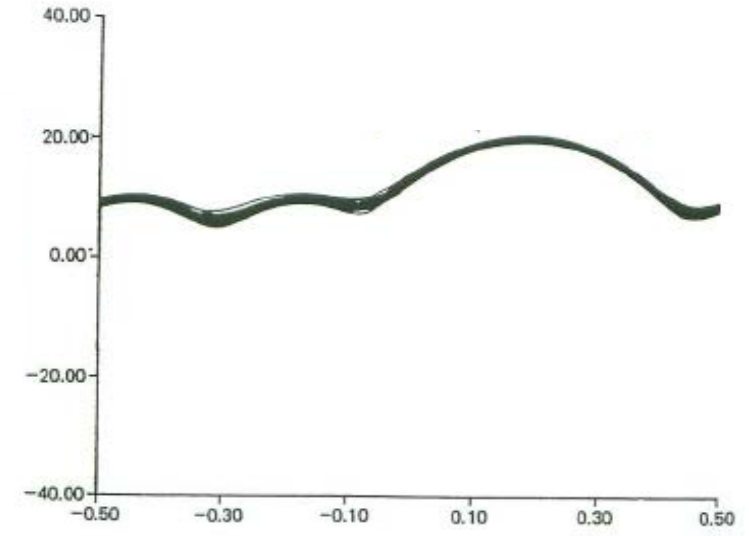
	Resolución	Varianza	Sesgo
Periodograma			
Welch (*)			
Bartlett (*)			
Blackman-Tukey (*)			

(*) Dependiendo del tamaño de segmentos, ventanas, etc.

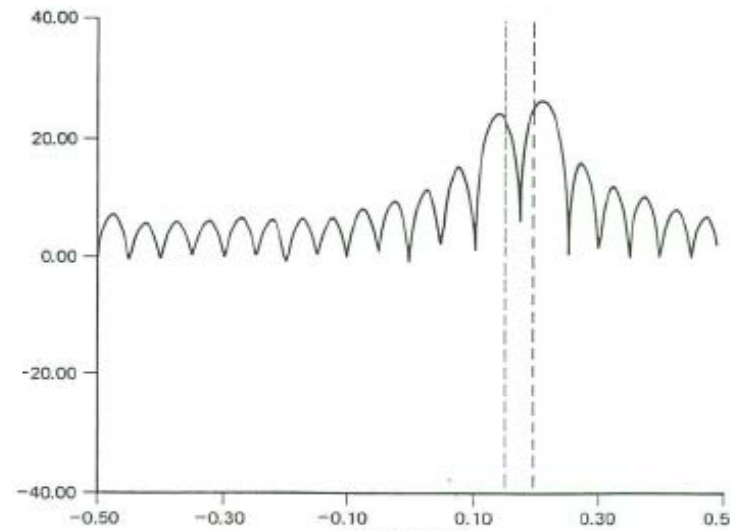
Ejemplos



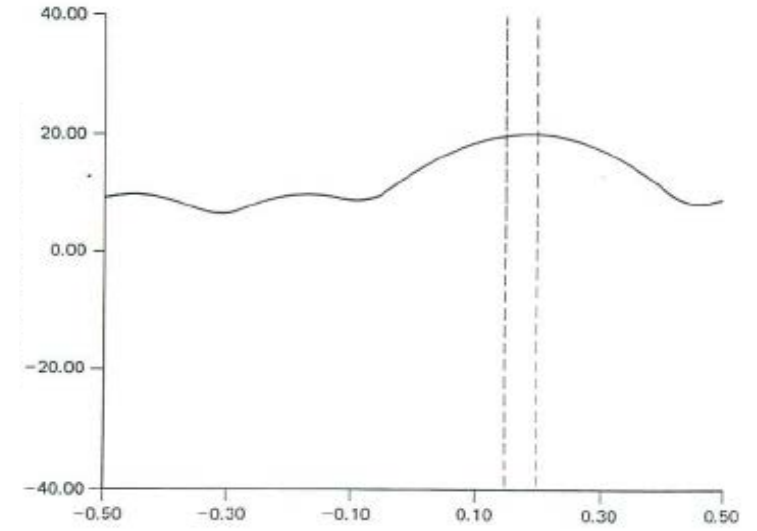
(a)



(b)



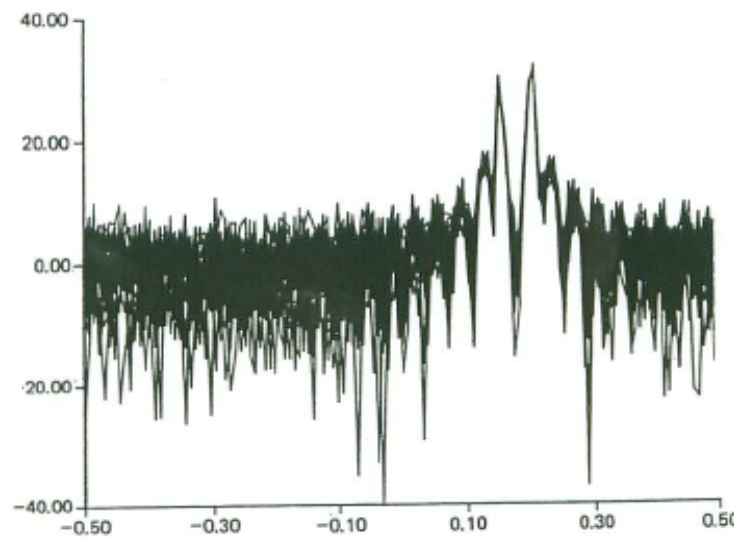
(a)



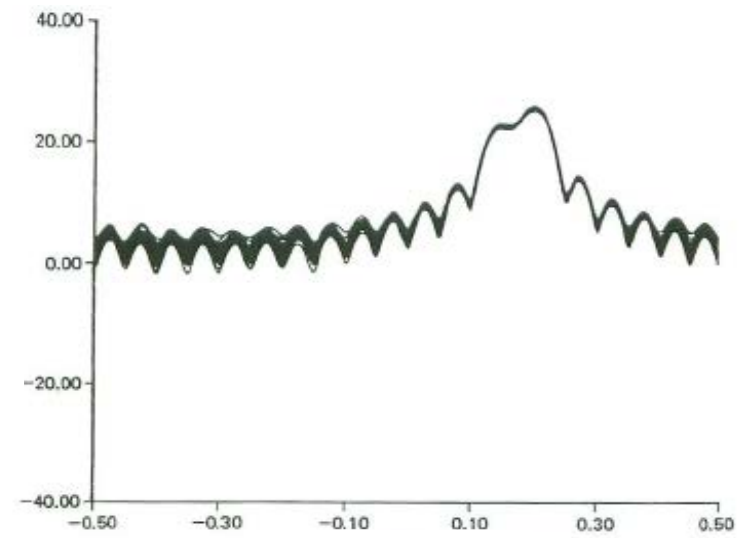
(b)

Dos tonos complejos en ruido blanco, $N=20$
a) Periodograma b) Blackman-Tukey con ventana de Bartlett de $M=4$

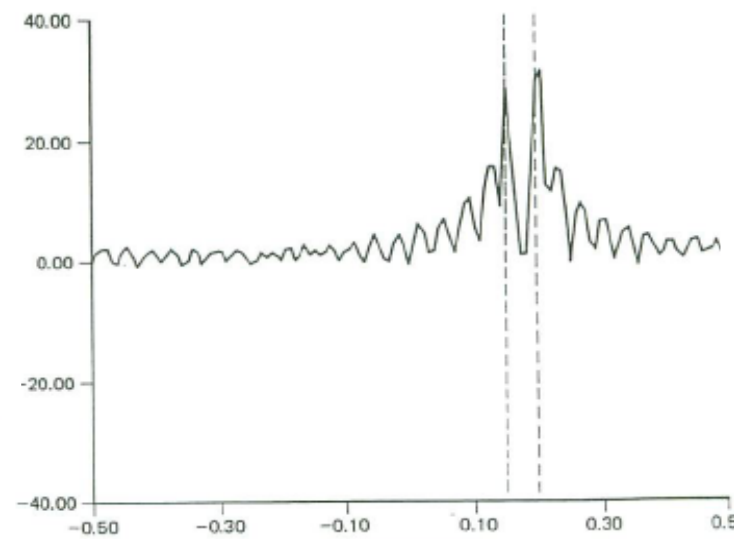
Ejemplos



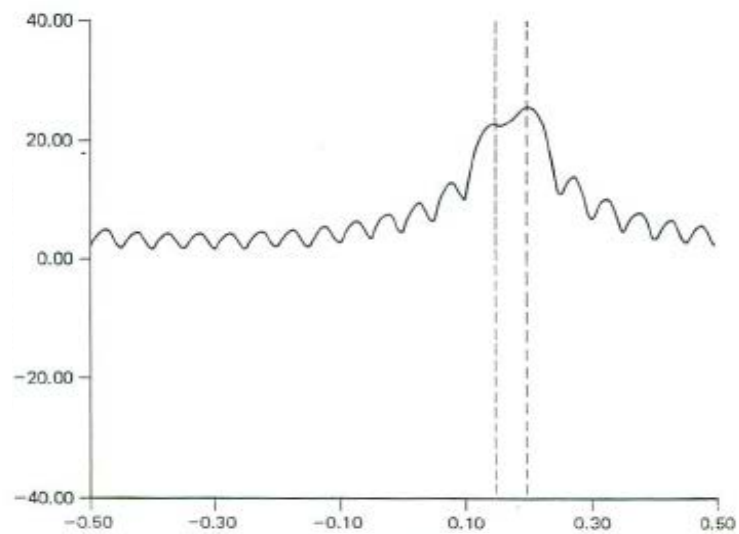
(a)



(b)



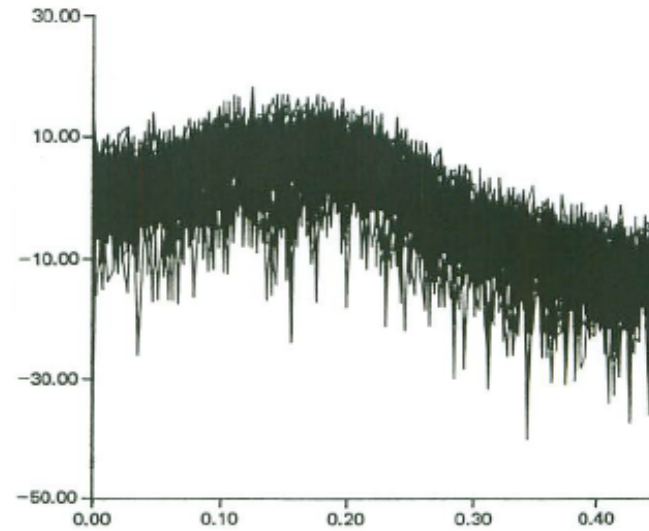
(a)



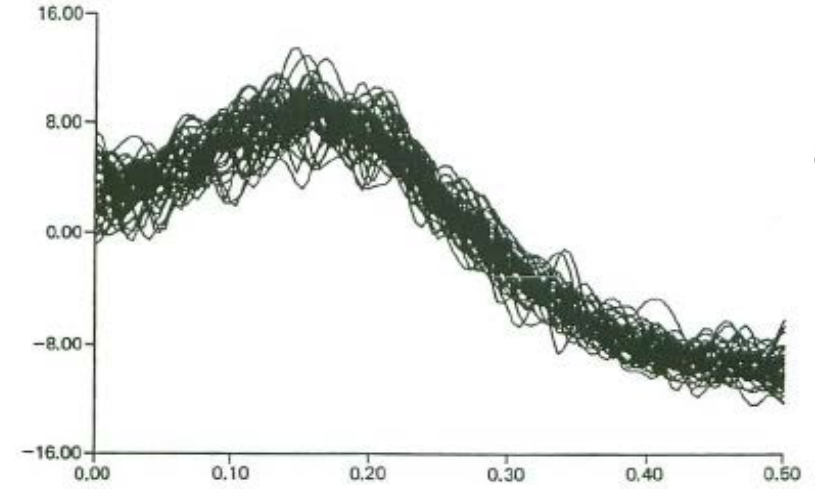
(b)

Dos tonos complejos en ruido blanco, $N=100$
a) Periodograma b) Blackman-Tukey con ventana de Bartlett de $M=20$

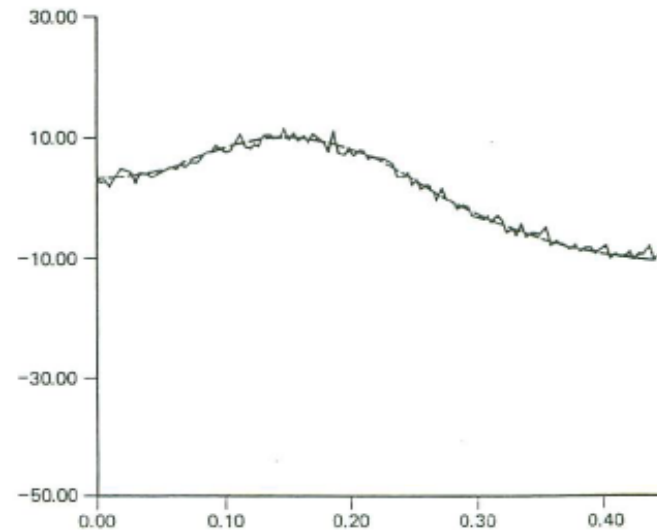
Ejemplos



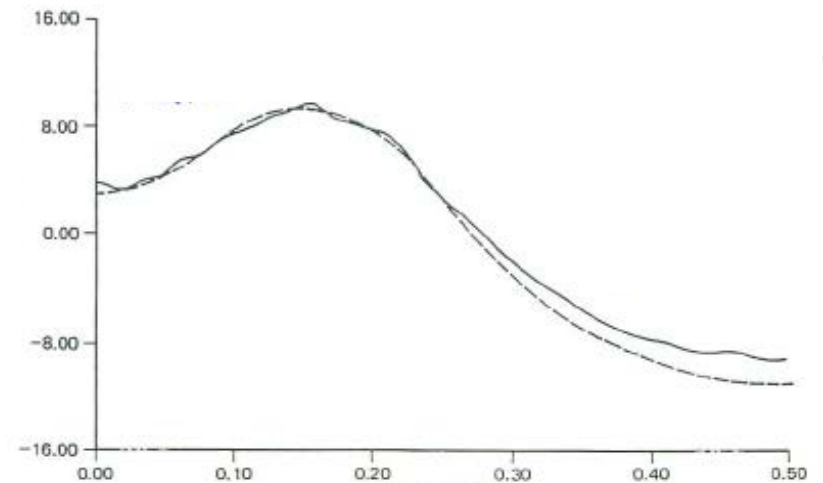
(a)



(b)



(a)

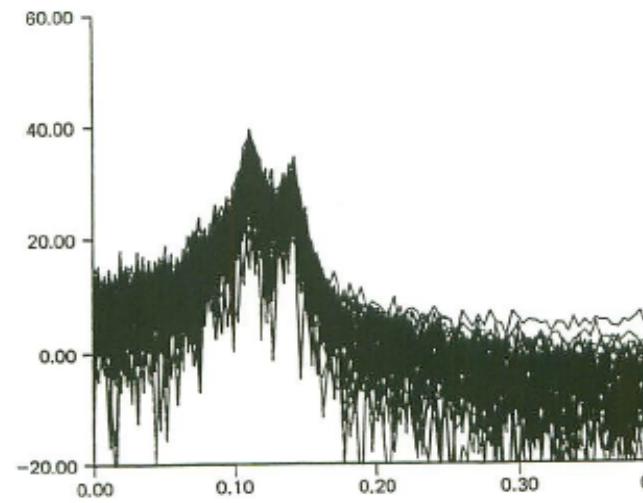


(b)

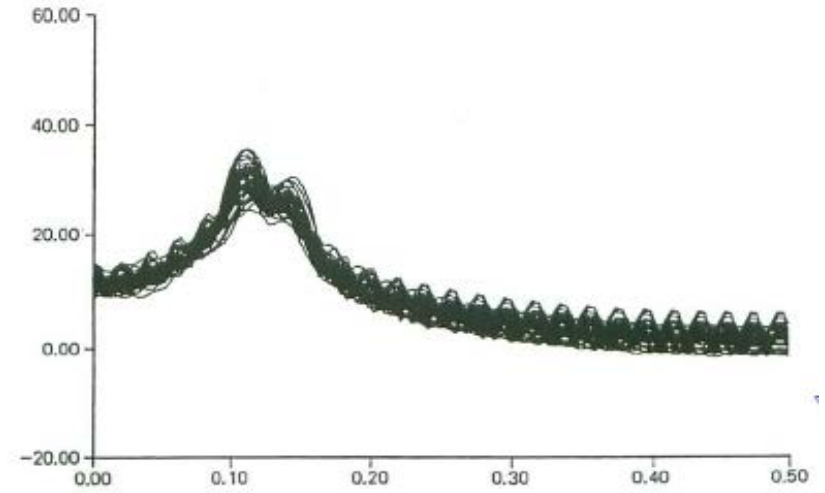
Señal de banda ancha, $N=1024$

a) Periodograma b) Blackman-Tukey con ventana de Bartlett de $M=51$

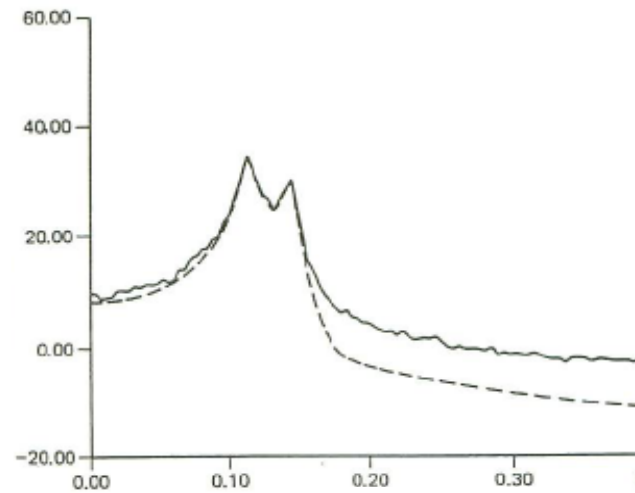
Ejemplos



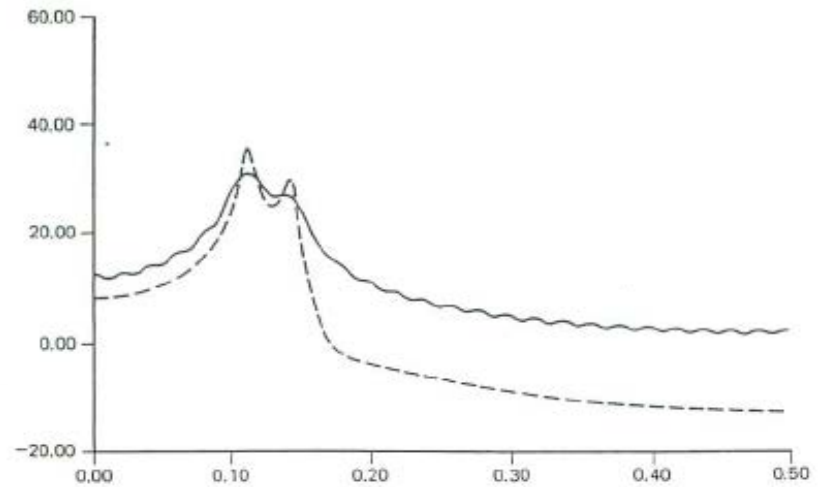
(a)



(b)



(a)



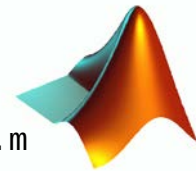
(b)

Señal de banda estrecha, $N=1024$
a) Periodograma b) Blackman-Tukey con ventana de Bartlett de $M=51$

Ejemplos

- Comparación de los diferentes métodos:

`AnalizadorComparacionBT_blanco.m`



`AnalizadorComparacionBT_tonos.m`

