

Estimación Espectral

Estimación de parámetros de una señal aleatoria

- En temas previos se ha tratado la caracterización de señales deterministas, incluso a nivel espectral.
- En aplicaciones prácticas (comunicaciones) los modelos deterministas pierden validez:
 - Se desconoce la señal “a priori”
 - La señal está afectada por ruido y/o distorsión
- Las señales se modelan como procesos estocásticos:
 - Una señal concreta es una realización de un proceso estocástico
 - Los sistemas se diseñan para responder a cualquier posible realización del proceso
 - Se parte del conocimiento de las características principales del proceso con el que se modelan las señales:
 - Media
 - Varianza
 - Autocorrelación
 - Estacionariedad
 - Ergodicidad
 - Etc.

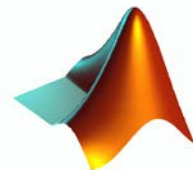
- En las lecciones anteriores se ha supuesto que estos parámetros se conocen, pero...
- En la práctica es necesario **estimar** las propiedades estadísticas de los procesos estocásticos mediante los cuales modelamos las señales
- Generalmente contaremos con un registro de observaciones (muestras) del proceso y deberemos extraer toda la información posible de esas muestras

$$\vec{x} = \{x[1], x[2], \dots, x[N]\} \quad \text{o} \quad \mathbf{x} = [x[1], x[2], \dots, x[N]]^T$$

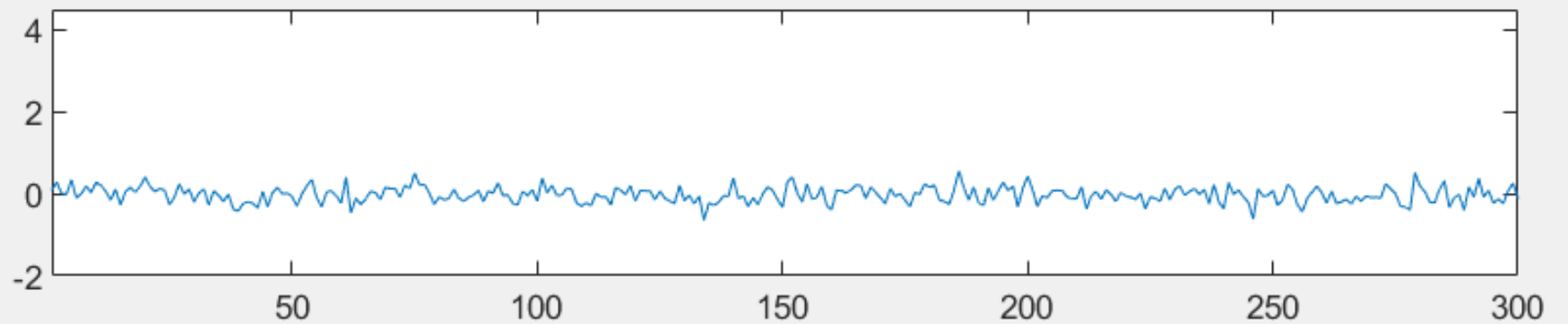
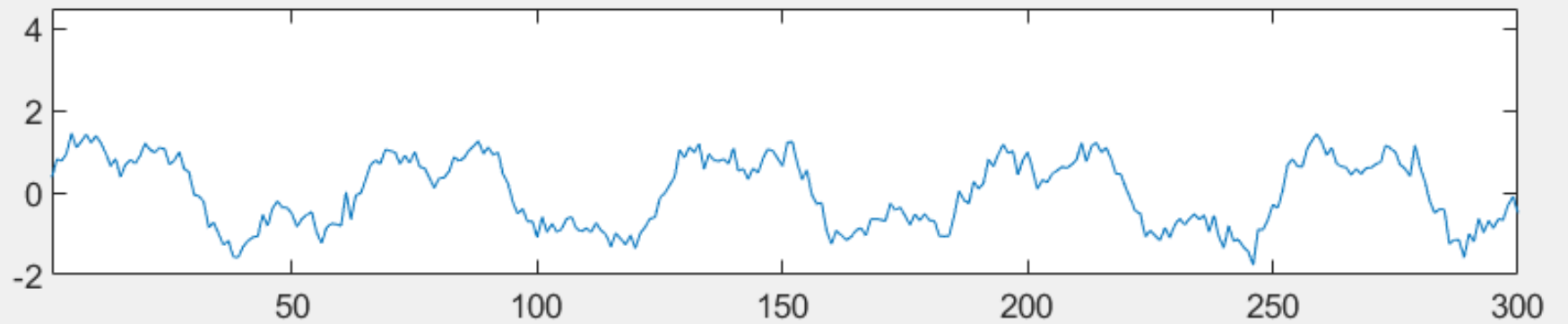
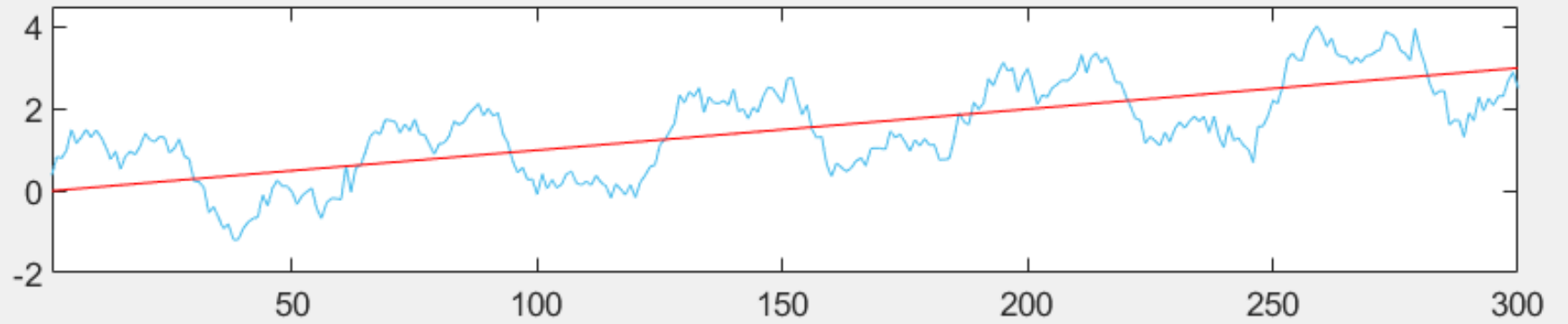
- Necesitaremos, por ejemplo:
 - Media
 - Autocorrelación
 - Correlación cruzada entre dos procesos
 - **Densidad espectral de potencia**
 - Etc.

Propiedades genéricas de los procesos

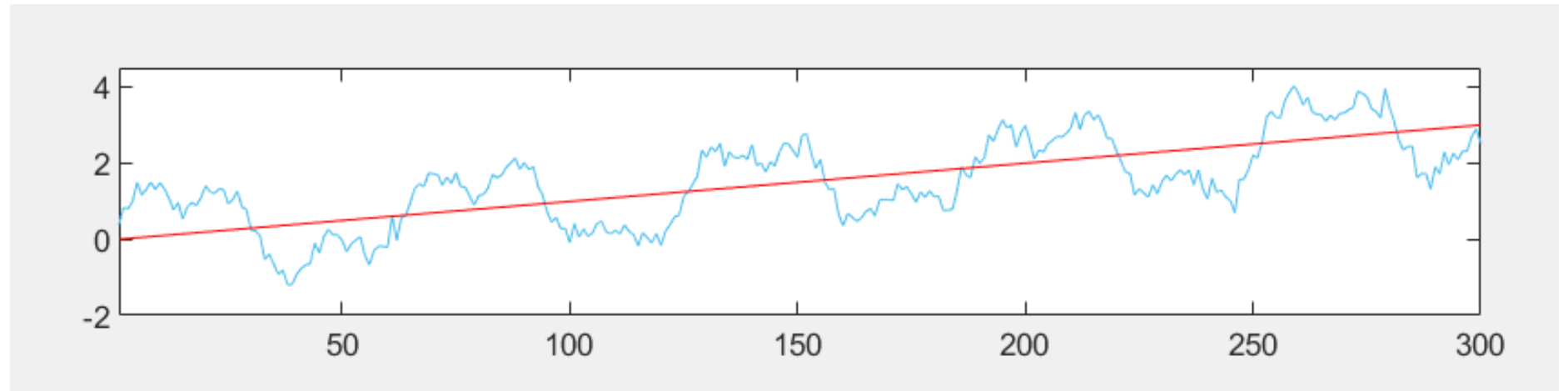
- Hay tres factores que componen los procesos y que deben ser tratados independientemente:
 - Tendencia
 - Componentes periódicas o estacionales
 - Residuo



Propiedades genéricas de los procesos

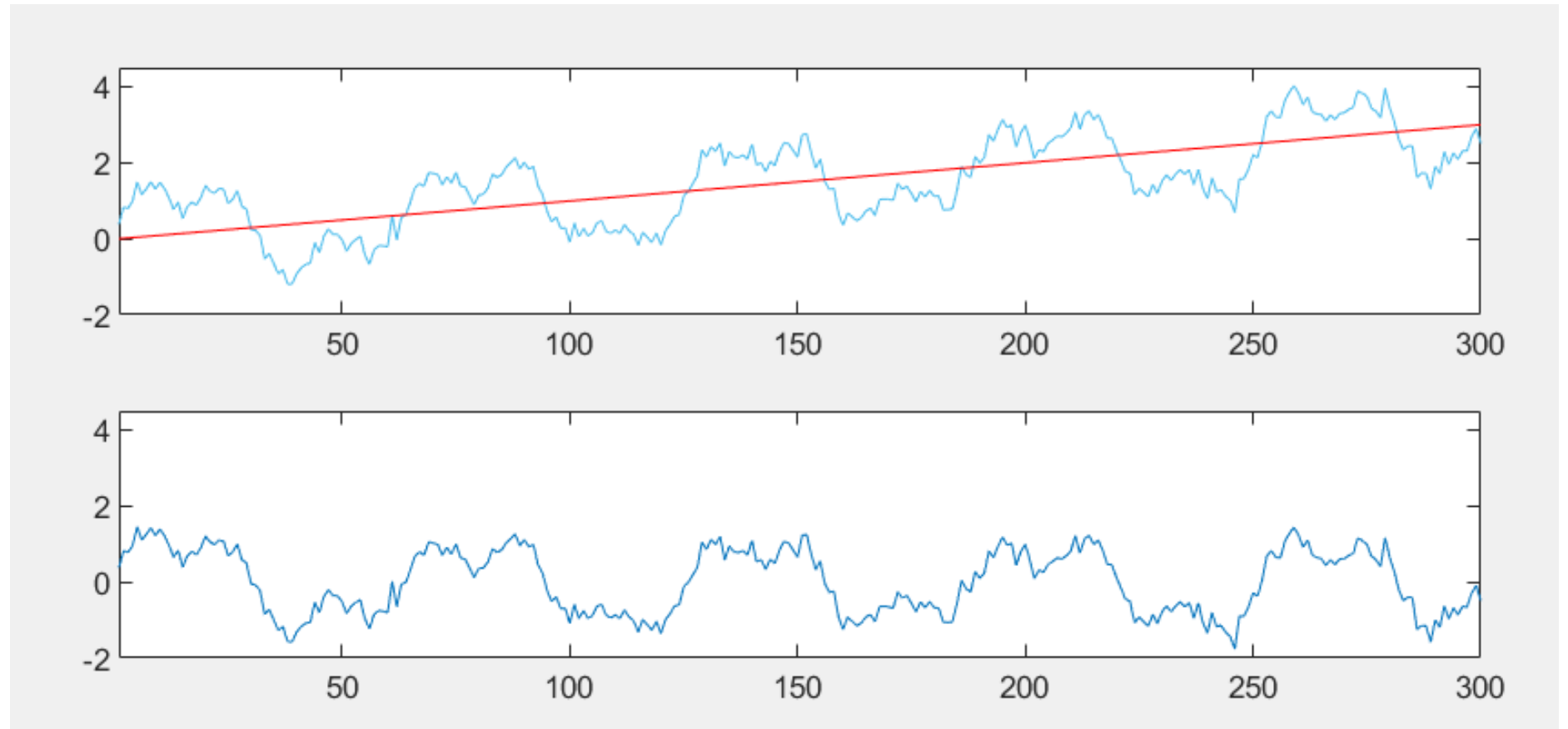


Propiedades genéricas de los procesos



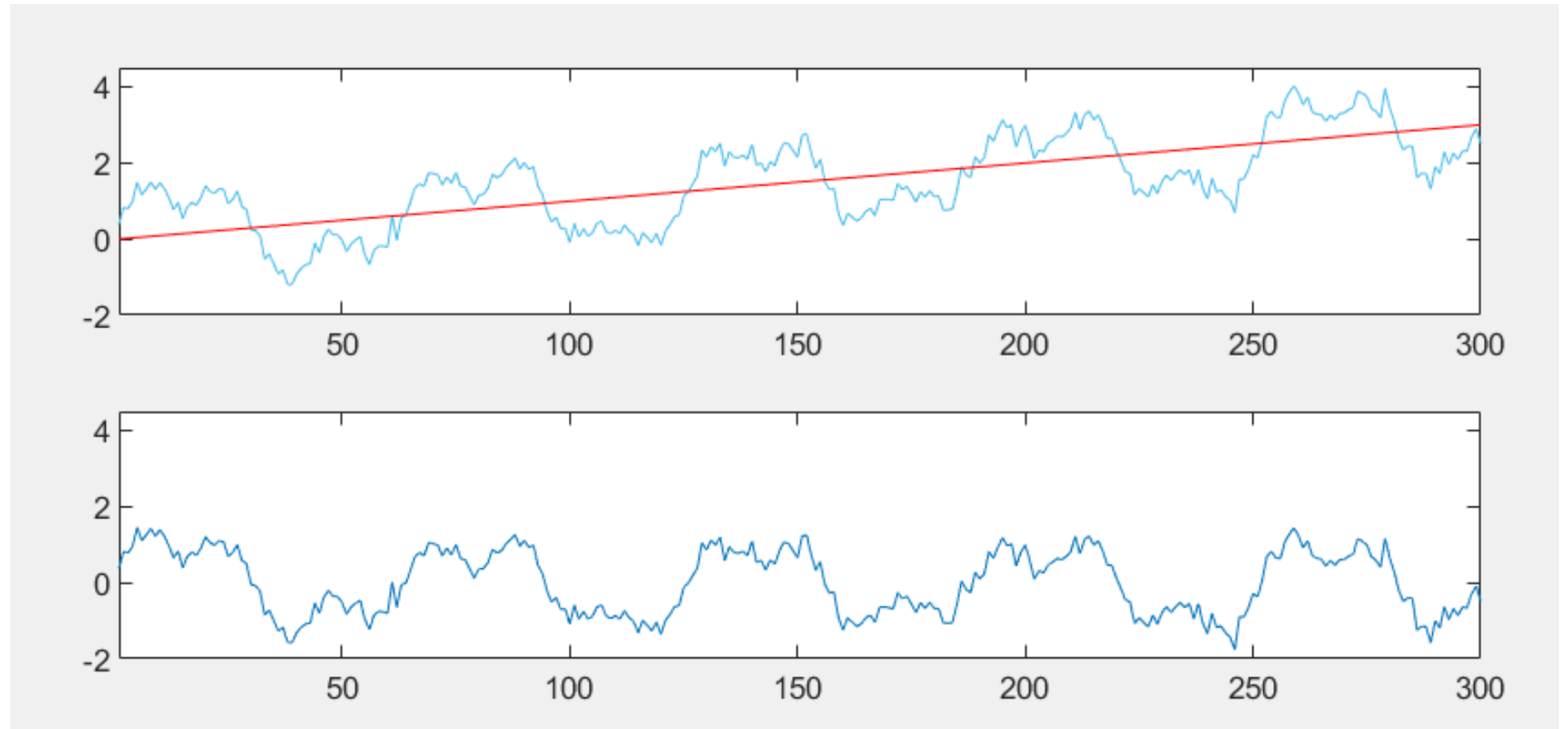
- Tendencia:
 - Una señal con tendencia no es un proceso estocástico estacionario
 - La tendencia se “separa” para estudiarla independientemente de la señal

Propiedades genéricas de los procesos



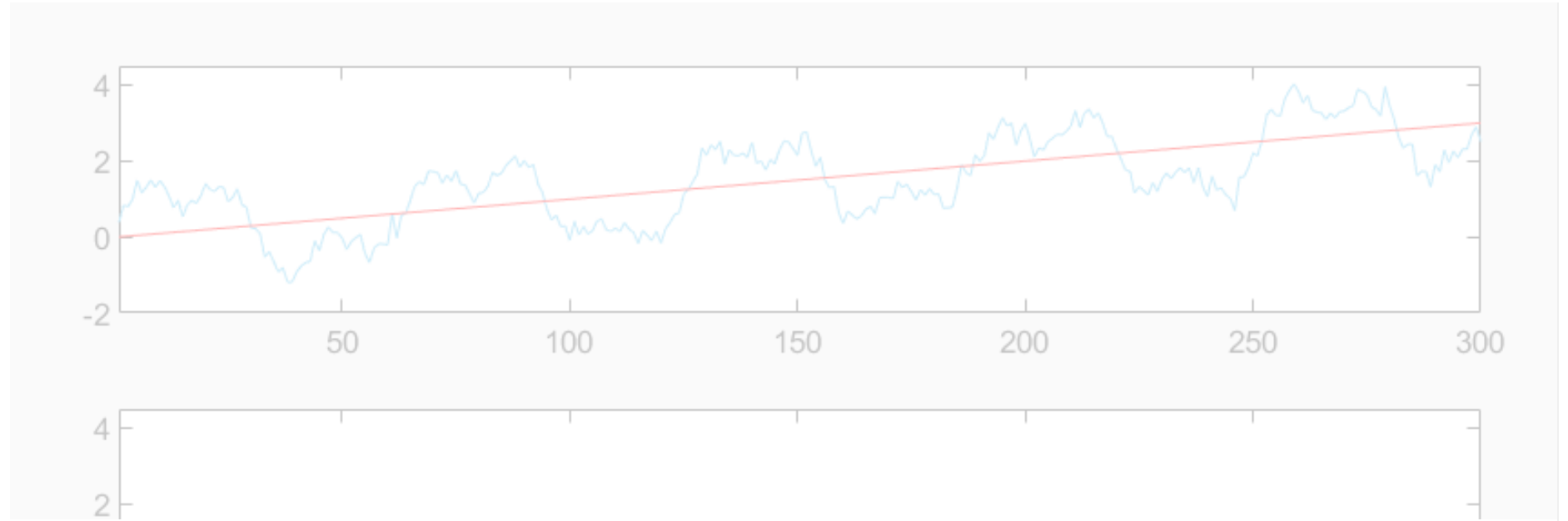
- Tendencia:
 - Una señal con tendencia no es un proceso estocástico estacionario
 - La tendencia se “separa” para estudiarla independientemente de la señal

Propiedades genéricas de los procesos

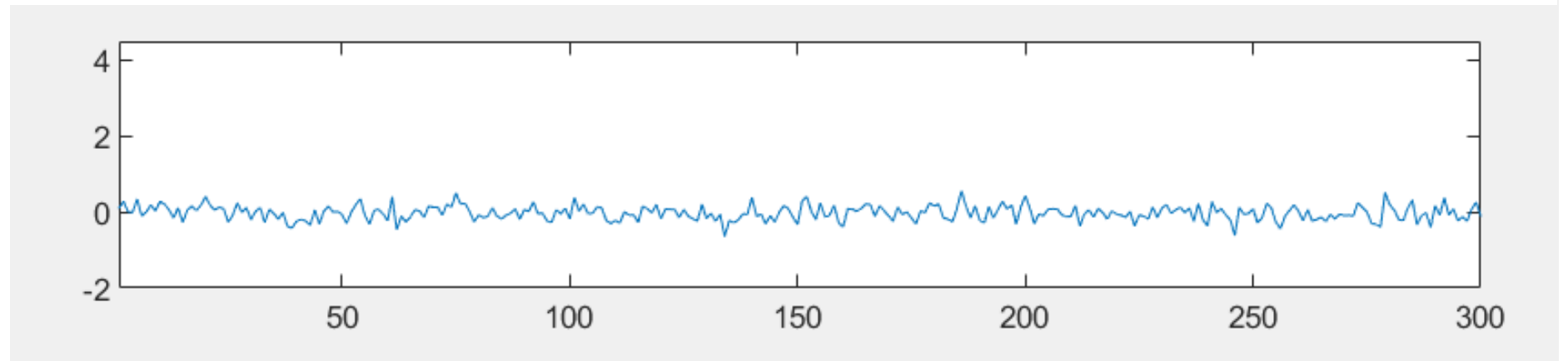


- Componente periódica o estacional:
 - No tiene por qué ser sinusoidal
 - También puede ser eliminada de varias formas:
 - Predicción
 - Técnicas basadas en la autocorrelación
 - Etc.

Propiedades genéricas de los procesos



- Residuo:
 - Suele ser el objeto de los diferentes estudios estadísticos o del procesado
 - En algunos casos se considera que el residuo es ruido blanco (ej: voz)



Estimación de las propiedades estadísticas de un proceso

- El residuo suele ser el objeto de la mayor parte del estudio del proceso, estudiando la tendencia y las componentes periódicas por separado.
- El principal estudio en muchos casos es el de la Densidad Espectral de Potencia (análisis espectral o estimación espectral):
 - No puede “medirse” sino estimarse
 - Existen diferentes procedimientos para estimar la DEP basados en las propiedades estadísticas del proceso
 - Normalmente tampoco conocemos estas propiedades estadísticas
 - Lo que tenemos es un conjunto de muestras de una realización del proceso
- ¿Cómo estimar la DEP?
 1. A partir de las muestras del proceso, estimar sus propiedades
 2. A partir de las propiedades estimadas, estimar la DEP

- **Media de un proceso:**

$x[n]$ es un proceso con media $\mu_x = E[x[n]]$

- Si el proceso es estacionario y ergódico, la media muestral coincide con la estadística:

$$\mu_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N x[n]$$

- Problema: nunca dispondremos de infinitas muestras para promediar
- Tendremos un segmento de N muestras

$$\mathbf{x} = \{x[0] \ x[1] \ x[2] \ \dots \ x[N - 1]\}$$

- Estimador “razonable”:

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

Estimación de las
propiedades
estadísticas de un
proceso

Estimación de la media

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

- Este estimador resulta ser
 - Insesgado
 - Varianza dependiente de la autocovarianza del proceso
 - Consistente

- **Autocorrelación de un proceso** (estacionario):

$$R_{xx}[m] = E[x[n] \cdot x[n + m]]$$

- En estas condiciones se puede considerar la autocorrelación como la media de una secuencia
- Si además de estacionario, el proceso es ergódico, la autocorrelación estadística y la muestral coinciden:

$$R_{xx}[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N + 1} \sum_{n=-N}^N x[n]x[n + m]$$

- En realidad se puede ver esta expresión como la media de una secuencia producto de secuencias
- Puedo emplear el estimador de la media que se acaba de presentar

Estimación de las
propiedades
estadísticas de un
proceso
Estimación de la
autocorrelación

$$R_{xx}[m] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]x[n+m]$$

Se estima como:

$$\hat{R}_{xx}^i[m] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]x[n+|m|]$$

- Este estimador resulta ser:
 - Insesgado
 - Consistente
- Este estimador resulta problemático:
 - Varianza elevada y dependiente de m
 - El máximo de la autocorrelación puede aparecer en un punto distinto del origen: imposible en procesos reales

Estimación de las
propiedades
estadísticas de un
proceso
Estimación de la
autocorrelación

- Para corregir estos problemas:
 - Estimador “sesgado” de la autocorrelación

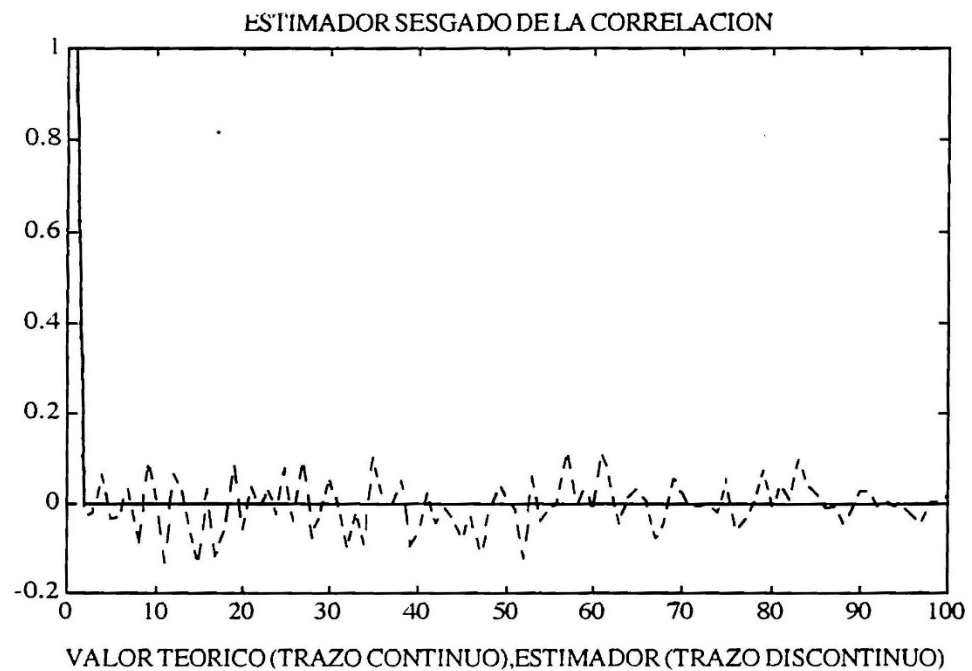
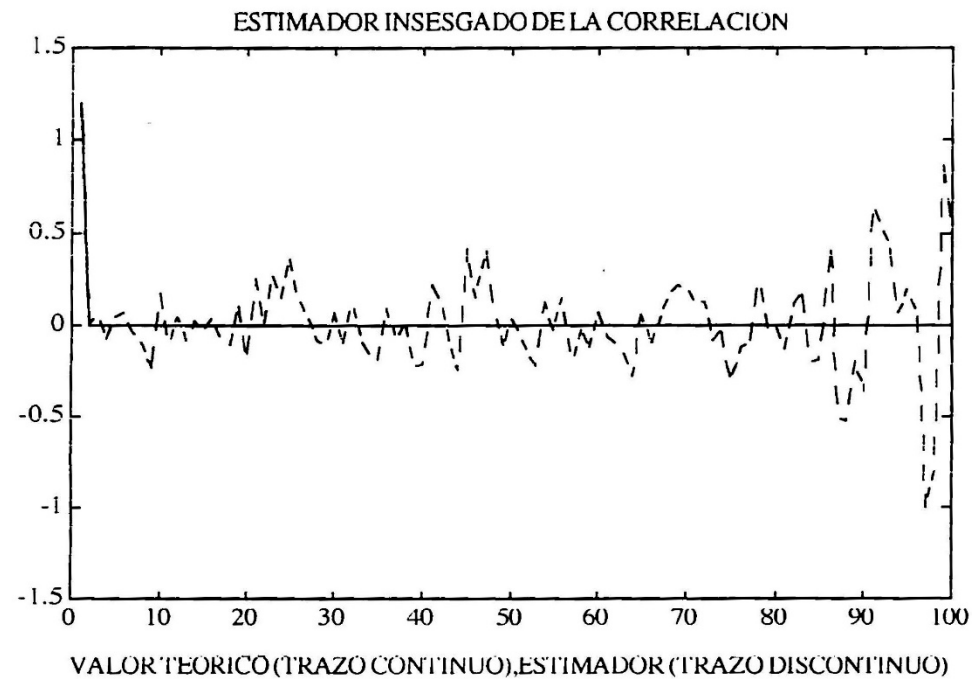
$$\hat{R}_{xx}^s[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]x[n+|m|]$$

- Frente al estimador “insesgado” de la autocorrelación

$$\hat{R}_{xx}^i[m] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]x[n+|m|]$$

- Se puede comprobar que el estimador sesgado es:
 - Sesgado
 - Asintóticamente insesgado
 - Consistente
 - De menor varianza que el insesgado
 - Garantiza el máximo de la autocorrelación en el origen

Estimación de las
propiedades
estadísticas de un
proceso
Estimación de la
autocorrelación



Estimación de las
propiedades
estadísticas de un
proceso
Estimación de la
autocorrelación

- Con el estimador insesgado:
 - No se cometen errores sistemáticos (sesgo)
 - Con tanta varianza, dada una realización del estimador no si tiene confianza en si la estima es buena o no
- Con el estimador sesgado:
 - Se asume un cierto error (sesgo)
 - Al tener varianza más baja se puede tener un grado de confianza mayor en el resultado de una realización

¿Por qué las muestras de la autocorrelación más alejadas de cero son menos fiables?



- Aplicando los mismos principios que para la estima de la autocorrelación, la **correlación cruzada entre dos procesos**

$$R_{xy} = E[x[n] \cdot y[n + m]]$$

puede estimarse como

$$\hat{R}_{xy}^i[m] = \begin{cases} \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n]y[n + m], & 0 \leq m < N \\ \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x[n + |m|]y[n], & -N < m < 0 \end{cases}$$

- También puede expresarse de esta manera el estimador sesgado de la correlación cruzada

- Cuidado con la notación en las correlaciones cruzadas:

$$R_{xy} = E[x[n] \cdot y[n + m]]$$

Estimación Espectral

Estimación de parámetros de una señal aleatoria