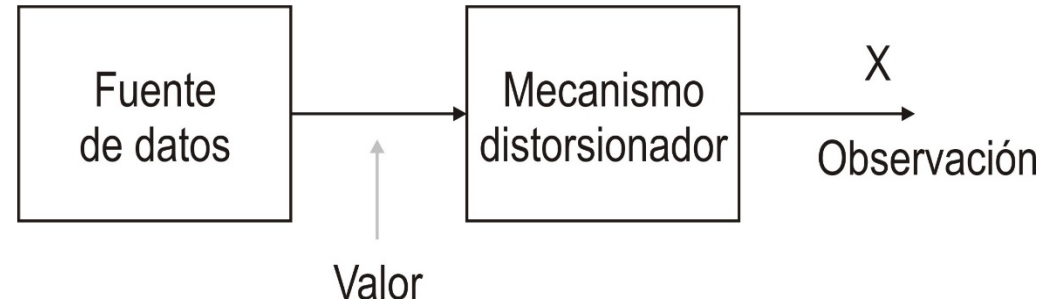


Estimación

Estimadores Lineales

- Problema genérico



- La fuente puede generar un conjunto de valores o incluso cualquier valor.
- **Objetivo:** determinar una **estimación** del valor original a partir de la observación realizada de forma que se cometa el menor error
 - Basado en:
 - Conocimiento de las características de la fuente de datos
 - Conocimiento de las características del mecanismo distorsionador (ej.: canal, ruido, etc.)

No linealidad de los estimadores Bayesianos

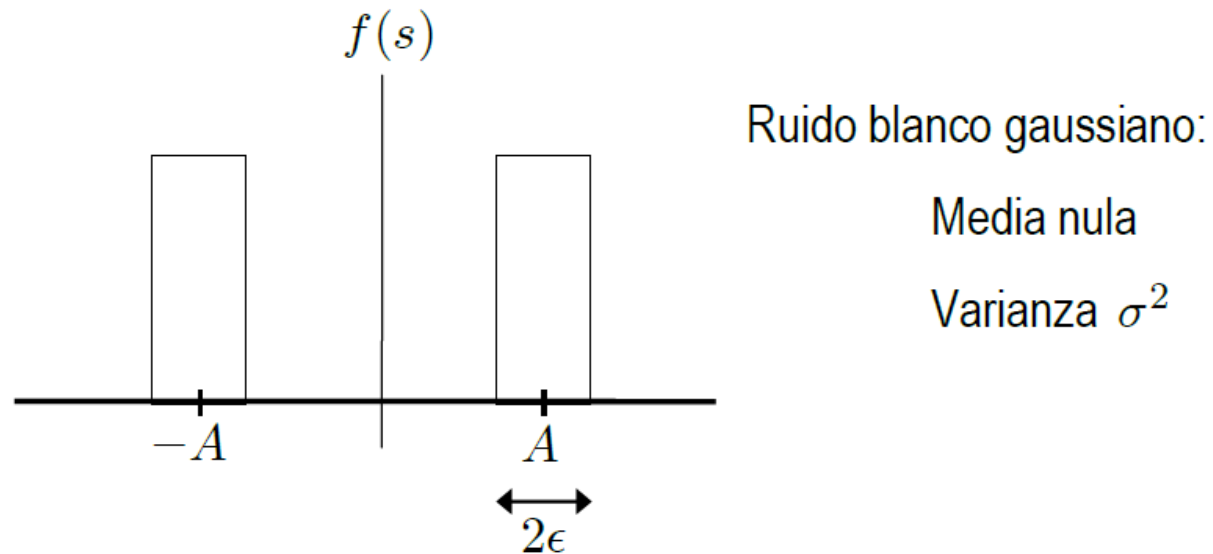
- Los estimadores que se han presentado hasta el momento se obtienen en general como una función no lineal de las observaciones realizadas:

$$\hat{s}_{MSE}(x) = E[s|x]$$

$$\hat{s}_{MAP}(x) = \operatorname{argmax}\{f(s|x)\}$$

$$\hat{s}_{ML}(x) = \operatorname{argmax}\{f(x|s)\}$$

- Ejemplo:



- Podemos plantear un estimador como una combinación lineal de las observaciones realizadas:

$$\hat{s}_{lineal} = \sum_{j=1}^N h_j x_j$$

- El problema entonces se reduce a encontrar los coeficientes que minimizan una cierta función de coste o criterio de error.
- Supongamos un criterio de error de mínima esperanza del error cuadrático:

$$J = E[e^2] = E \left[\left(s - \sum_{j=1}^N h_j x_j \right)^2 \right]$$

- Para minimizar el error, la función de coste se deriva con respecto a cada coeficiente buscado y se iguala a cero:

$$\frac{\partial J}{\partial h_i} = \frac{\partial E[e^2]}{\partial h_i} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial h_i} = \frac{\partial E[e^2]}{\partial h_i} = 0$$

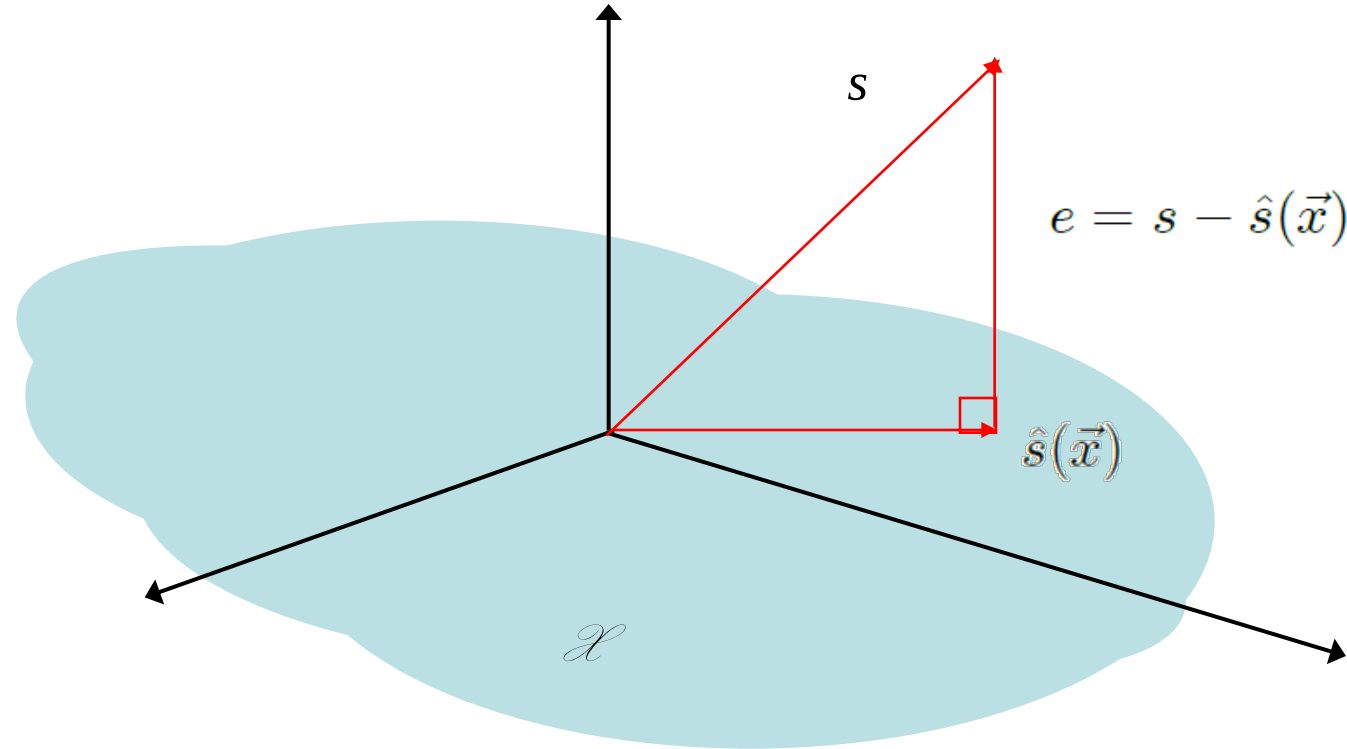
- Desarrollando, conduce a:

$$E[x_i \cdot e] = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

- **PRINCIPIO DE ORTOGONALIDAD**

- Todos los elementos del vector de observaciones son ortogonales al error.
- En estas circunstancias los coeficientes h_j son óptimos según un criterio de mínimo MSE.
- Es el principio sobre el que se basa toda la regresión lineal de mínima MSE.

- PRINCIPIO DE ORTOGONALIDAD



- El espacio sombreado representa los puntos que pueden ser expresados como una combinación lineal de las muestras observadas.
- El estimador óptimo será el punto de este espacio más cercano al punto s
- Intuitivamente, deberemos escoger el punto que está justo debajo de s
- El “vector” error será perpendicular a $\mathcal{X}$ y por tanto a cualquier vector en $\mathcal{X}$

- Desarrollando el principio de ortogonalidad:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{g}$$

- Ecuaciones normales. Su solución es:

$$\mathbf{h} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{g}$$

- Ejemplo: Caso gaussiano N -dimensional:
 - S gaussiana de media nula y varianza σ_s^2
 - Ruido gaussiano de media nula y varianza σ_n^2

- Un problema de estimación lineal puede ser predecir el valor de una muestra de una secuencia a partir de las p muestras anteriores.
- Este problema se denomina **predicción lineal**.

$$\hat{x}[n] = - \sum_{i=1}^p \alpha_i x[n-i]$$

- Si se emplea un criterio de mínimo MSE, se trata del mismo problema de estimación lineal que hemos estudiado.
- También se resuelve empleando las ecuaciones normales, aunque ahora las correlaciones cruzadas que intervienen serán autocorrelaciones desplazadas.
- El cálculo de los coeficientes α_i para la predicción lineal se denomina análisis LPC.
 - Extremadamente útil en problemas de procesamiento de voz.

$$\hat{x}[n] = - \sum_{i=1}^p \alpha_i x[n-i]$$

- En muchos casos, resulta de más interés el error de predicción, también llamado **residuo** (por ejemplo, en aplicaciones de voz)

$$e[n] = x[n] - \tilde{x}[n] = x[n] + \sum_{i=1}^p \alpha_i x[n-i]$$

- Si suponemos un coeficiente $\alpha_0 = 1$

$$e[n] = \sum_{i=0}^p \alpha_i x[n-i] = \alpha_n * x[n]$$

- El residuo representa la parte no predecible de $x[n]$, ya que se puede expresar

$$x[n] = \tilde{x}[n] + e[n]$$

- Los mismos coeficientes permiten extraer la predicción o el residuo dependiendo de cómo se utilicen

$$\hat{x}[n] = - \sum_{i=1}^p \alpha_i x[n-i]$$

- Las ecuaciones normales adquieren una forma especial en este problema debido a que lo que se pretende estimar y lo que se observa son muestras de la misma secuencia

¿Qué forma adoptan las ecuaciones normales?

$$\hat{x}[n] = - \sum_{i=1}^p \alpha_i x[n-i]$$

- Las ecuaciones normales adquieren una forma especial en este problema debido a que lo que se pretende estimar y lo que se observa son muestras de la misma secuencia

$$R_{xx}[m] = - \sum_{k=1}^p \alpha_k R_{xx}[m-k]$$

p ecuaciones con p incógnitas

$$\begin{pmatrix} R_{xx}[0] & R_{xx}[1] & \cdots & R_{xx}[p-1] \\ R_{xx}[1] & R_{xx}[0] & & \\ \vdots & & \ddots & \\ R_{xx}[p-1] & & & R_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ \vdots \\ -\alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx}[1] \\ \vdots \\ R_{xx}[p] \end{pmatrix}$$

Estimación

Estimadores Lineales