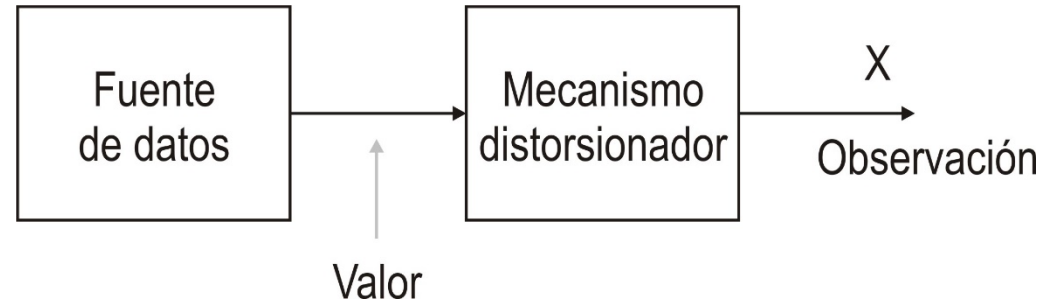


Estimación

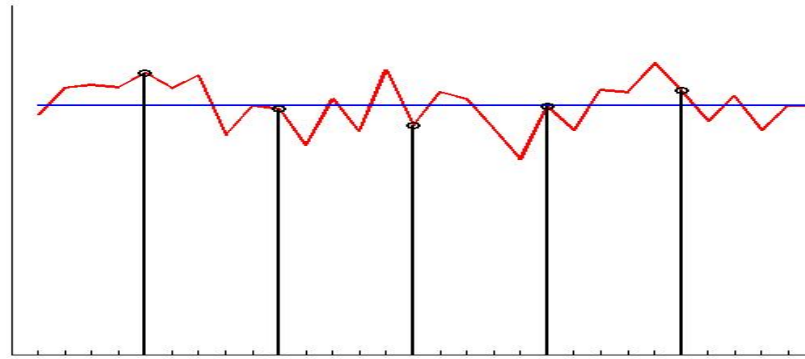
El problema de estimación y los estimadores

- Problema genérico



- La fuente puede generar un conjunto de valores o incluso cualquier valor.
- **Objetivo:** determinar una **estimación** del valor original a partir de la observación realizada de forma que se cometa el menor error
 - Basado en:
 - Conocimiento de las características de la fuente de datos
 - Conocimiento de las características del mecanismo distorsionador (ej.: canal, ruido, etc.)

- Ejemplo: se recibe un valor que se observa

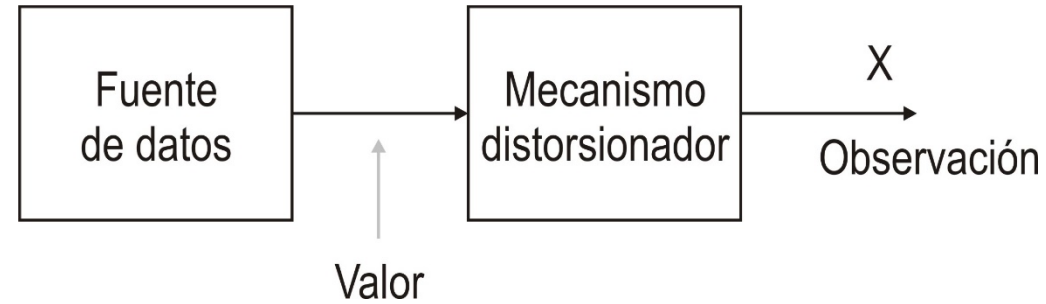


- La distorsión no nos permite observar exactamente el valor
 - Si se conocen las propiedades de la distorsión, se pueden utilizar para intentar corregir su efecto mediante herramientas estadísticas
-

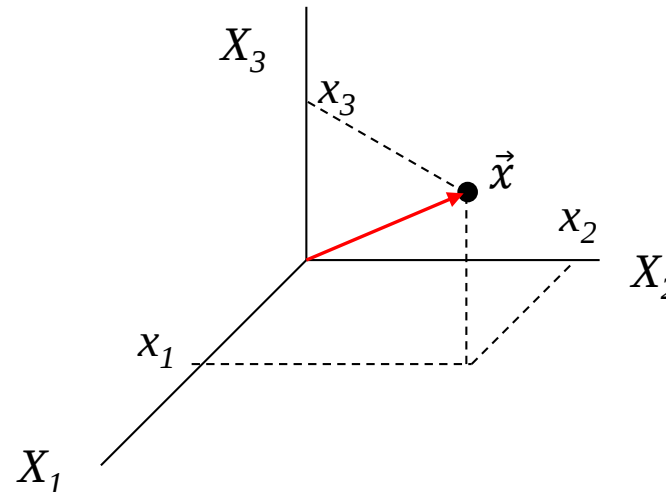
- Este problema comparte conceptos con el de **decisión** o **detección**
- En **decisión** el número de posibles valores es limitado (se trata de escoger entre ellos)
- En **estimación** no hay un conjunto de valores posibles, aunque sí puede haber un “rango”.

El problema de estimación

- Planteamos el siguiente problema

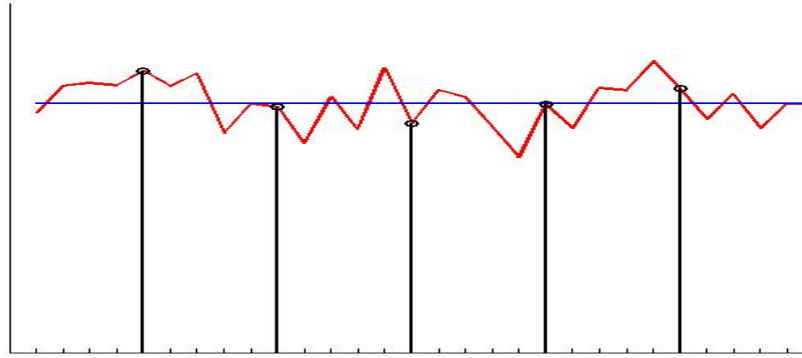


- Disponemos de una serie de observaciones del valor desconocido, a partir de las cuales queremos estimar de forma óptima el original
- Dispondremos de un espacio de observaciones N -dimensional



El problema de estimación

- Si observamos N veces un determinado valor:



- Cada una de las N observaciones cometerá un error e_i
- Necesito establecer un criterio de error para ver qué estimación puedo realizar conforme a ese criterio
- Por ejemplo, mínimo error cuadrático en las observaciones:

$$\min \left[\sum_{i=1}^N e_i^2 \right] = \min \left[\sum_{i=1}^N (x_i - s)^2 \right]$$

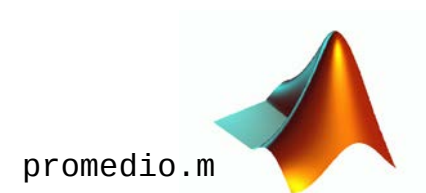
El problema de estimación

$$\min \left[\sum_{i=1}^N e_i^2 \right] = \min \left[\sum_{i=1}^N (x_i - s)^2 \right]$$

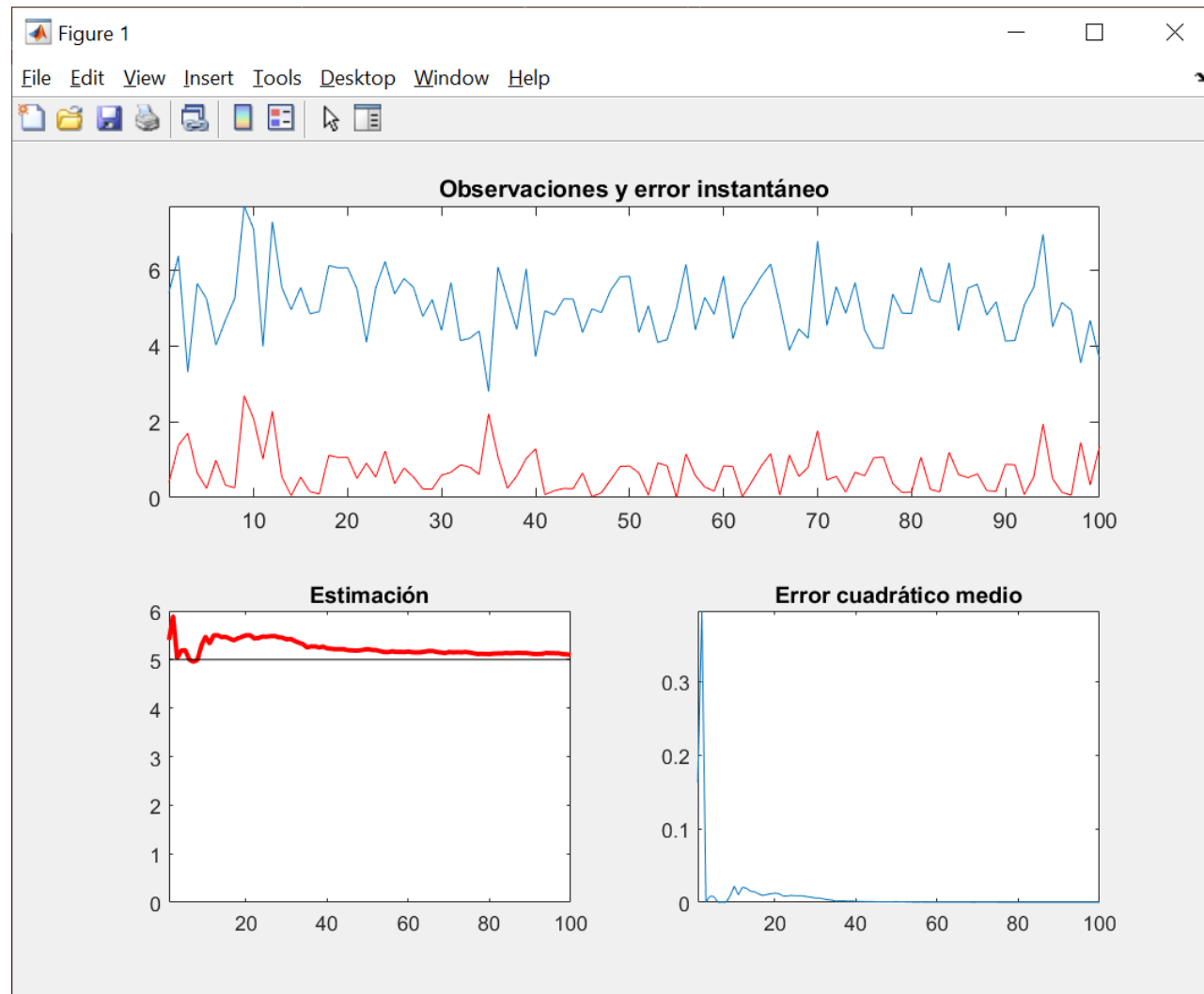
- Para minimizar la función derivamos respecto de s e igualamos a cero
- Se obtiene:

$$\hat{s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

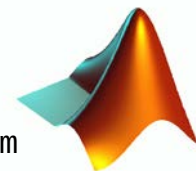
- En este caso, y con este criterio de error, el mejor estimador es la media de las observaciones realizadas: el promediado reduce el efecto del error
 - Siempre es buena medida promediar realizaciones independientes



El problema de estimación



promedio.m



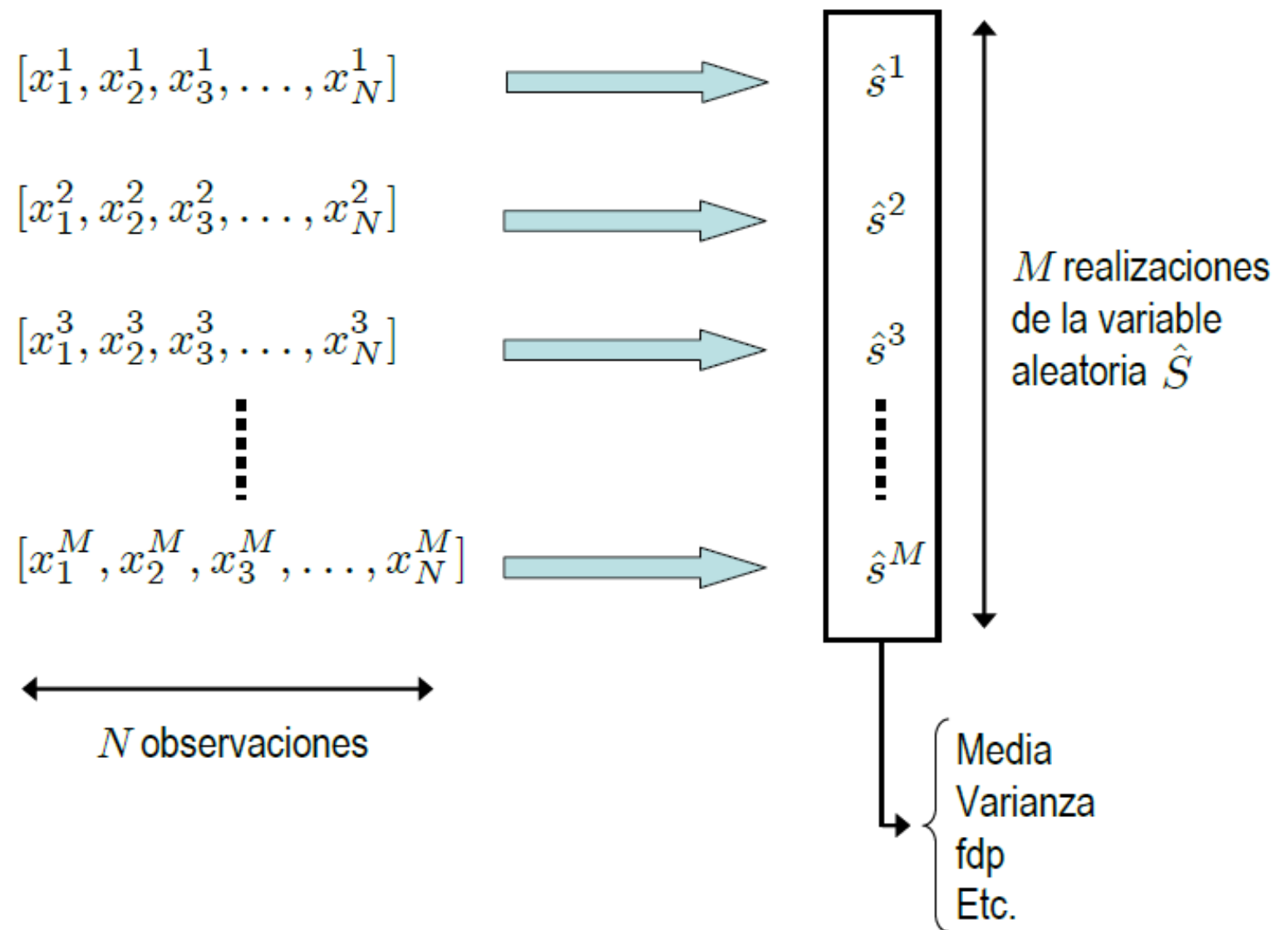
El problema de estimación

- El problema de estimación puede presentarse en dos contextos:
 - Se dispone de información a priori sobre el datos a estimar
 - Ejemplo: RADAR de carretera: la velocidad de los vehículos se encuentra entre unos ciertos valores (rango), y cada subrango de valores tendrá mayor o menor probabilidad.
 - No se dispone de información a priori
 - Ejemplo: se envía un cierto dato desconocido por un canal de transmisión. En principio ese dato puede ser cualquiera.
- El problema es diferente en ambas situaciones.
- El conocimiento de la información a priori sobre el valor s que se quiere estimar (v.a. S) significa conocer $f(s)$
 - En el problema de decisión significaba conocer las probabilidades a priori de cada una de las posibles hipótesis
 - En el problema de estimación no se trabaja con soluciones limitadas en número

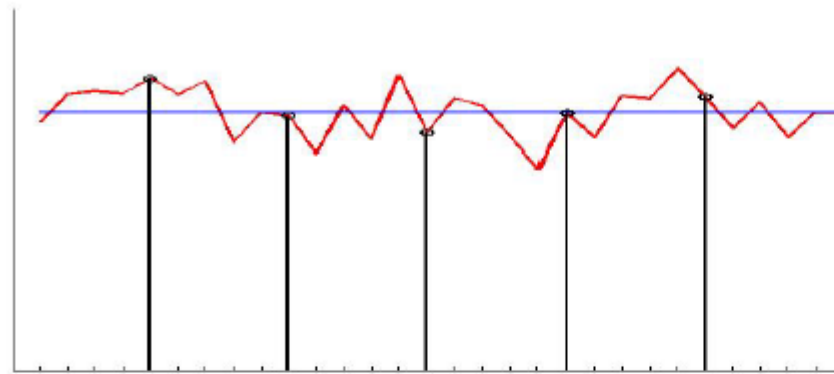
Propiedades de los estimadores

- Para el diseño de un estimador es importante tener en cuenta con qué criterios se va a decir si un estimador es bueno o malo.
- Idea fundamental: un estimador es una función, generalmente no lineal, de las observaciones, que son realizaciones de variables aleatorias.
- Al ser una combinación de variables aleatorias, el **estimador** también es una **variable aleatoria**.
- Si realizamos N observaciones y calculamos el estimador, consideramos su valor como una realización de la variable aleatoria que representa, $\hat{S}$
- Dicha variable aleatoria:
 - Tiene una **media** (esperanza matemática)
 - Tiene una **varianza**
 - Etc.

Propiedades de los estimadores



- Ejemplo:



$$\hat{s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$x_i = s + n_i$$

$$f(n) = G(0, \sigma_n^2)$$

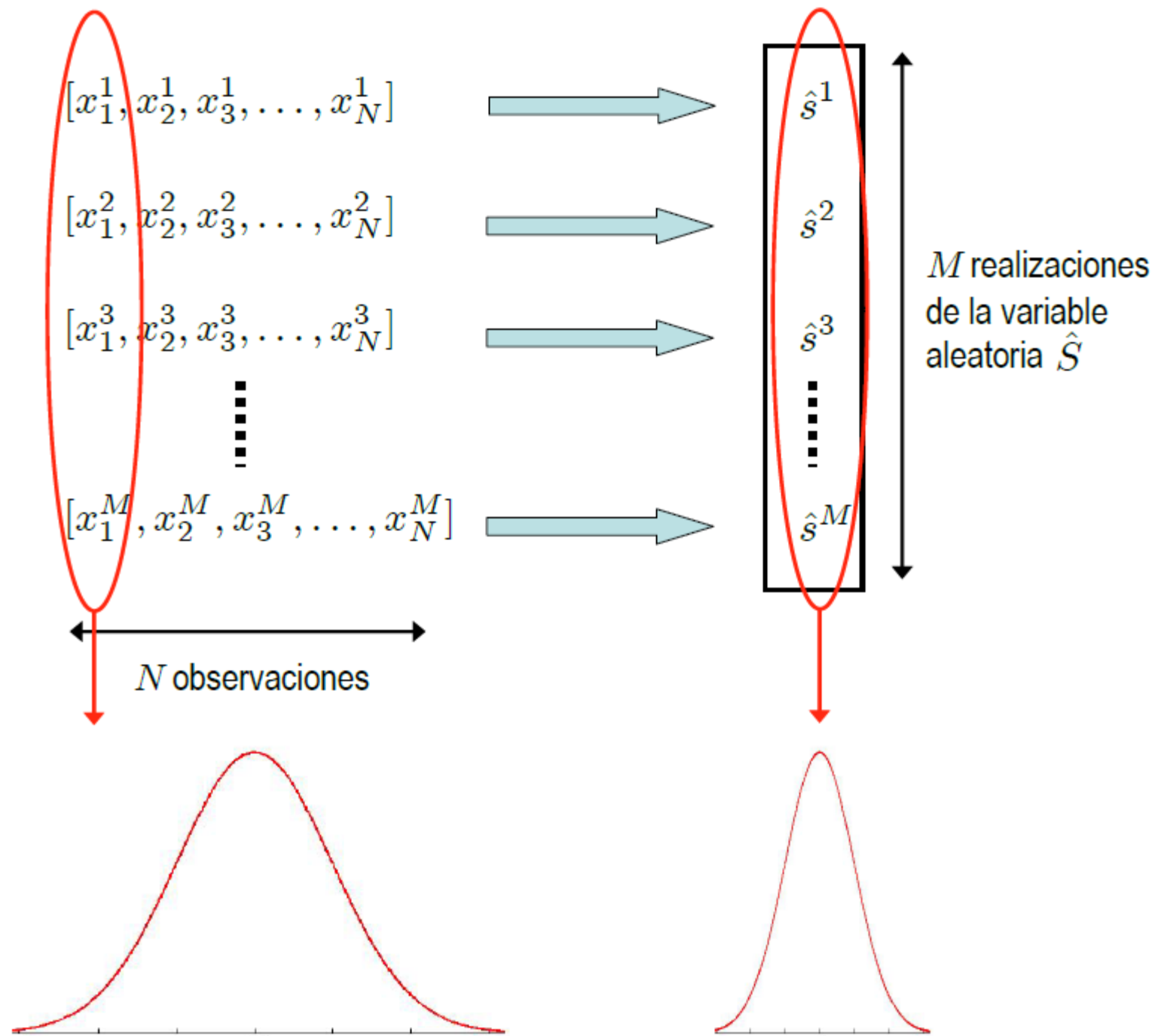
$$E[\hat{s}] = E \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (s + n_i) \right] = E \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s \right] + 0$$

$$E[\hat{s}] = s \quad \text{Esperanza matemática del estimador}$$

$$E[(\hat{s} - E[\hat{s}])^2] = E[(\hat{s} - s)^2] = \frac{\sigma_n^2}{N}$$

Varianza del estimador

Propiedades de los estimadores



- **Sesgo:**

- Si el promediado de diferentes realizaciones de la estimación tiende al valor exacto que se quiere estimar, el estimador es **insesgado** (“unbiased”).
- En caso contrario, el estimador es **sesgado** (“biased”).
- El “error sistemático” que introduce un estimador sesgado se conoce como **sesgo** (“bias”).
- Ejemplo: se diseña un estimador de la forma

$$\hat{s} = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N x_i \Rightarrow E[\hat{s}] = \frac{s}{2}$$

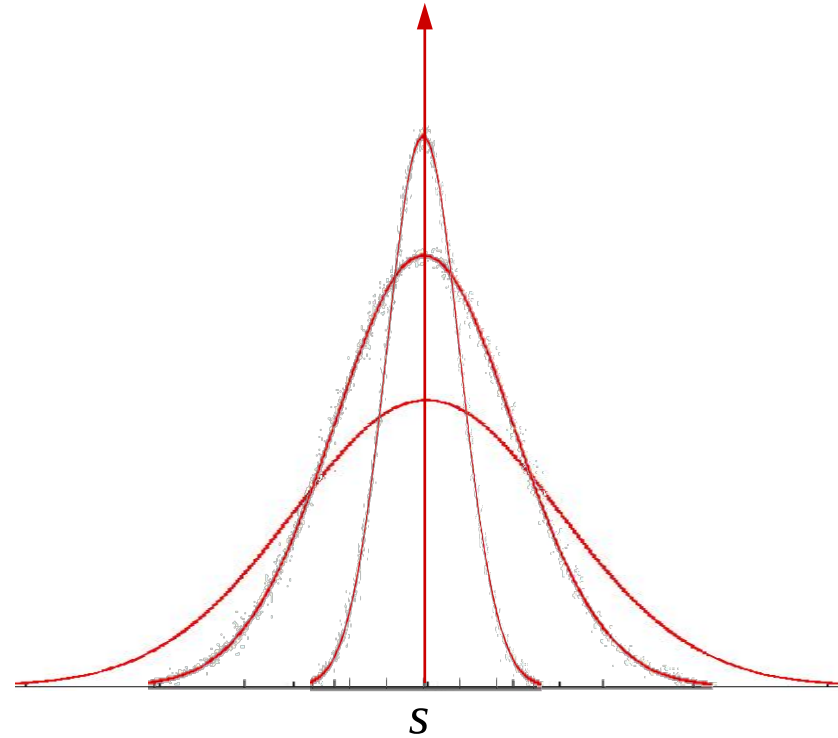
Este estimador es sesgado (excepto para $s=0$)

- **Varianza:**

- La varianza de un estimador es una medida de cuánto cambia el valor que proporcionan diferentes realizaciones de dicho estimador.

Propiedades de los estimadores

- Un buen estimador tiene que ser:
 - Insesgado
 - De mínima varianza (idealmente cero)



- En el ejemplo del promediado, la varianza es inversamente proporcional al número de observaciones/muestras, y el estimador es insesgado. Al aumentar indefinidamente el número de muestras se mejora la estima

- **Consistencia:**

- Un estimador es consistente si cuando el número de observaciones aumenta, su varianza disminuye tendiendo a cero.

⇒ Si realizo infinitas observaciones, no cometo error.

Ejemplo: el promediado realizado antes

- **Esperanza del error cuadrático medio (MSE):**

- Un estimador también puede ser “mejor” si se equivoca en media lo menos posible:

$$E[e^2] = E[(\hat{s} - s)^2]$$

- Se trata de un parámetro generalmente menos empleado.
- Se cumple:

- Si el estimador es insesgado:

$$E[e^2] = \text{varianza}$$

- Si el estimador es sesgado:

$$E[e^2] = \text{varianza} + (\text{sesgo})^2$$

Propiedades de los estimadores

- Pueden ser interesantes otras características de los estimadores dependiendo del problema que traten de resolver.

Por ejemplo:

- Estimadores de la densidad espectral de potencia de un proceso.

- Sesgo
- Varianza
- Consistencia
- Resolución

- Pueden darse casos en los que interese que alguna de las propiedades de los estimadores no sea óptima (sesgo, varianza...).

Por ejemplo:

- Estimadores de la autocorrelación de un proceso a partir de un registro.

- Puede interesar que sea sesgado.

Estimación

El problema de estimación y los estimadores