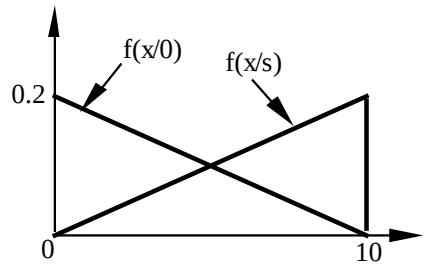
Se dispone de un vector de observaciones x={x[1],x[2],...,x[N]} y se debe decidir entre dos posibles hipótesis. En ambas, los valores x[n] son realizaciones de variables aleatorias Gaussianas independientes, idénticamente distribuidas y de media cero. Bajo la hipótesis H0 cada xi tiene varianza sigma0 y bajo la hipótesis H1 presenta varianza sigma1. Las probabilidades a priori son iguales para ambos casos.

a) Calcular el test para decidir (con mínima probabilidad de error) a qué hipótesis pertenece un vector de observaciones.

b) ¿Existe un estadístico suficiente para tomar esta decisión?¿Cuál es?

Un profesor de universidad pretende aprobar o no a un determinado alumno basándose en si ha estudiado o no. Para ello modela el problema con las dos densidades de probabilidad condicionales de la figura:



f(x|0) implica que son más probables notas bajas entre los alumnos que no han estudiado, mientras que f(x|s) viene a decir que los alumnos que estudian tienen con más probabilidad notas altas.

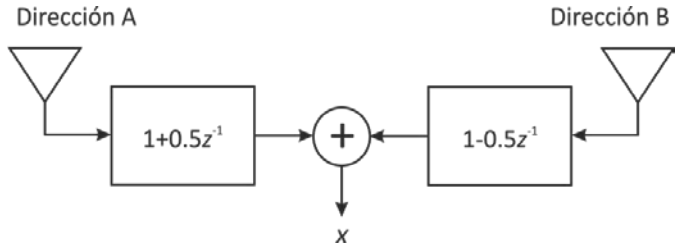
a) Deduzca el cociente de verosimilitud l(x) para esta decisión y demuestre que la condición l(x) < y es equivalente a la condición x<u para un u.

b) ¿Puede calcular el u para minimizar la probabilidad de error al aprobar o suspender a un alumno?

c) Encuentre el umbral que maximiza la probabilidad de detectar correctamente que un alumno ha estudiado, con una probabilidad del 0.09 de equivocarnos aprobando a un alumno que realmente no ha estudiado.

d) ¿Cuál es la probabilidad de detección para el umbral obtenido en c)?

Un sistema rastrea el espacio en busca de la llegada de una señal. El sistema divide el espacio en dos partes, empleando un sensor para cada una de ellas según la figura:



La señal captada por cada sensor atraviesa un filtro. Las señales después se suman generando la observación *x*. La señal que se busca ha sido modelada como una señal blanca, gaussiana, de media 1 y varianza 1. Además, ambos sensores captan ruido de fondo, haya o no señal, modelado como blanco, gaussiano, de media nula y varianza 0.1.
Se asume que la señal buscada llega por uno (y sólo uno) de los dos sensores.
a. Determine la función de densidad de probabilidad de la observación *x* tanto cuando llega la señal buscada desde la dirección A como cuando llega desde la dirección B.
b. Establezca una regla de decisión que permita determinar de qué dirección llega la señal con mínima probabilidad de error.

Un ingeniero de telecomunicación debe implementar un sistema automático que decida si un paciente padece Síndrome de Estocolmo Biliar Agudo Sistémico (SEBAS), terrible enfermedad que origina esporádicamente espasmos y catalepsia simultáneamente. Existen cuatro síntomas inequívocos de la aparición de la enfermedad:

- La temperatura corporal toma un valor que sigue una distribución gaussiana de media 38 grados con varianza 0.2, mientras que un paciente sano tiene en media 36.5 grados con varianza 0.2 (también con distribución gaussiana).
- El nivel de hematíes sufre un aumento siguiendo su valor también una distribución gaussiana de media 21 y varianza 0.4, frente a la media 17 con varianza 0.4 del paciente sano.
- El ritmo cardíaco se incrementa hasta una media de 140 pulsaciones por minuto, siguiendo una distribución gaussiana con varianza 3, mientras que en el paciente sano esta distribución tiene un valor medio de 75 pulsaciones por minuto con una varianza de 3.
- El índice de Aslo aumenta a un valor medio de 30, con varianza 0.3 (distribución gaussiana), mientras que en un paciente sano el valor medio es de 20 con varianza 0.3.

Además, la probabilidad de que un paciente padezca la enfermedad se estima en un 20%.

a) Determine el criterio de decisión que indica si un paciente sufre este trastorno con mínima probabilidad de error.

b) Un paciente presenta el siguiente cuadro:

Temperatura corporal:	37.5 grados
Nivel de hematíes:	19.6 puntos
Ritmo cardíaco:	108 pulsaciones
Índice de Aslo:	25

Determine, según el criterio determinado anteriormente, si el paciente padece la enfermedad.

NOTA 1: Asuma que el paciente sólo puede padecer esta enfermedad o estar sano.

NOTA 2: No se sorprenda si algunos de los valores que intervienen en las operaciones son inusualmente elevados.