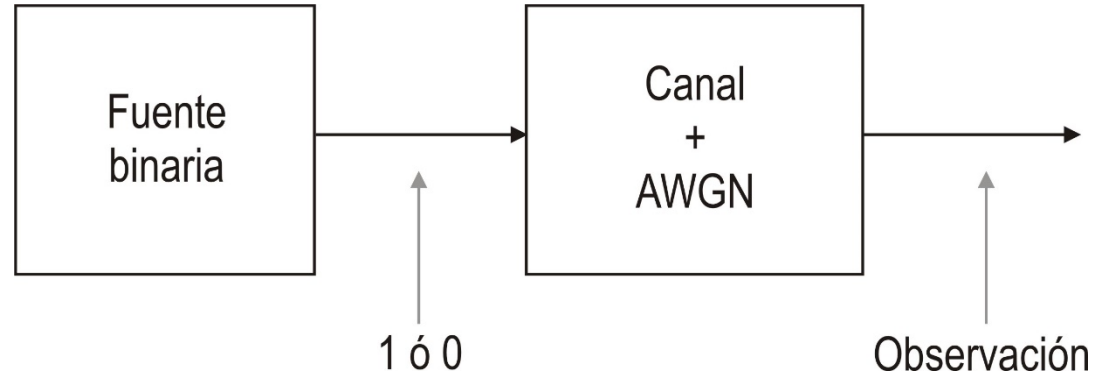


Teoría de la Decisión

Detección de formas de onda



- Se trata de un problema con dos hipótesis (1 y 0) – en principio.
- El mecanismo distorsionador consta del propio canal de comunicaciones y del ruido aditivo blanco gaussiano
- En el problema de detección de formas de onda las hipótesis son **“la forma de onda está presente”** y **“la forma de onda no está presente”**
 - Ejemplo: modulación ASK, el 1 corresponde a la presencia de una forma de onda, y el 0 a su ausencia
 - Ejemplo: RADAR, el 1 corresponde a que hay un blanco y la onda se refleja, y el 0 a que no hay blanco

- Un problema muy habitual es la detección de una determinada forma de onda
 - Ejemplos:
 - Demodulación digital
 - RADAR
 - Diagnóstico médico (estudio de EEG, ECG...)
 - Etc
- Se trata de un problema de decisión que se rige por los mismos principios tratados anteriormente
- Lo que se observa es un vector de N componentes

$$\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$$

Pero ahora **no son observaciones del mismo valor**

- ¿Cómo se plantea ahora la decisión?

- En una señal de amplitud variable el ruido afectará más a la fiabilidad de las observaciones más pequeñas
- Conviene dar mayor importancia a las muestras mayores a la hora de decidir
- Se realiza una ponderación de las observaciones basada en la decisión N -dimensional ya estudiada

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \mu$$

- La variable Y se somete a un criterio de decisión unidimensional como los ya planteados. Es una media ponderada que constituye el estadístico suficiente
- Queda definir el valor de los coeficientes de ponderación h_i para que la decisión sea óptima empleando este estadístico suficiente

Detección de formas de
onda
Caso gaussiano

- La variable Y tiene propiedades definidas por el tipo de ruido:
Si la señal $s[n]$ no está presente (H_0):

$$x_i = x[i] = n[i] \quad (\text{ruido})$$

$$E[Y|H_0] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i E[N_i]$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N h_i^2 \sigma_{\text{ruido}}^2$$

Si la señal $s[n]$ está presente (H_1):

$$x_i = x[i] = s[i] + n[i] \quad (\text{señal} + \text{ruido})$$

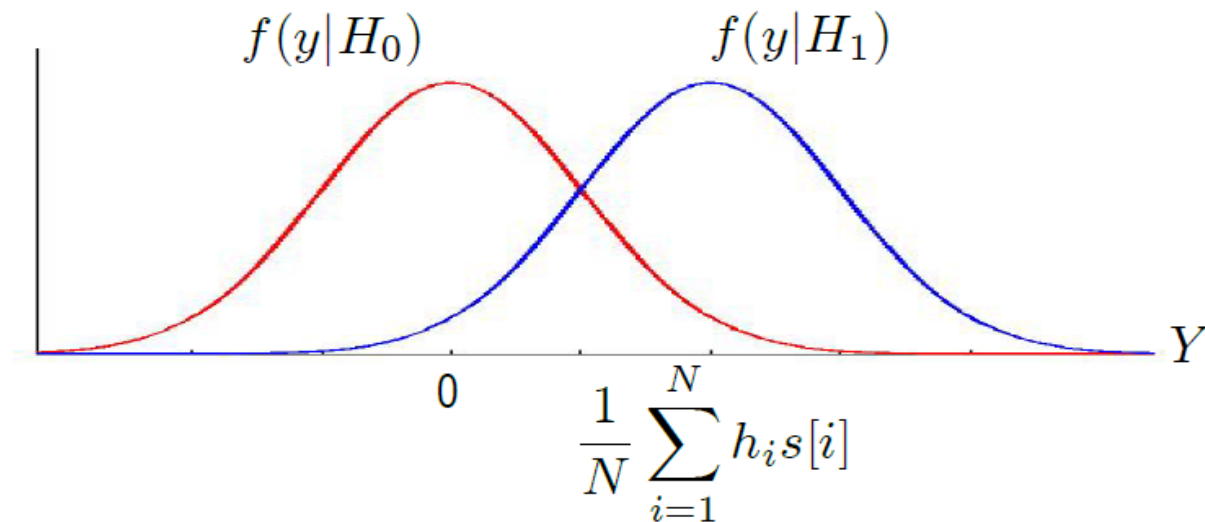
$$E[Y|H_1] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i (s[i] + E[N_i])$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N h_i^2 \sigma_{\text{ruido}}^2$$

Detección de formas de onda
Caso gaussiano

- Si el ruido es gaussiano de media cero, la distribución de Y es gaussiana con las siguientes propiedades

	H_0	H_1
Media	0	$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i s[i]$
Varianza	$\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N h_i^2 \sigma_{ruido}^2$	$\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N h_i^2 \sigma_{ruido}^2$



Representación para el caso ML o $P(H_0)=P(H_1)$

Detección de formas de
onda
Caso gaussiano

- Aún quedan por definir los coeficientes h_i
- Recordemos que el objetivo es minimizar la probabilidad de error

$$P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma_y}\right)$$

- En este caso tenemos

$$d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i s[i] - 0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i s[i]$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N h_i^2 \sigma_{ruido}^2$$

- Como la función Q es decreciente, podemos minimizar la P_e maximizando $\frac{d^2}{\sigma_y^2}$

$$\frac{d^2}{\sigma_y^2} = \frac{\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i s_i - 0 \right]^2}{\sigma_y^2}$$

$$\frac{d^2}{\sigma_y^2} = \frac{\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i s_i \right]^2}{\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N h_i^2 \sigma_x^2} = \frac{\left[\sum_{i=1}^N h_i s_i \right]^2}{\sigma_x^2 \sum_{i=1}^N h_i^2}$$

- La desigualdad Schwartz establece

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i b_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^N a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N b_i^2 \right) \cos^2 \alpha$$

siendo α el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

- Por tanto

$$\left(\sum_{i=1}^N a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^N a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N b_i^2 \right)$$

Detección de formas de
onda
Caso gaussiano

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{\sigma_y^2} &= \frac{\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i s_i \right]^2}{\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N h_i^2 \sigma_x^2} = \frac{\left[\sum_{i=1}^N h_i s_i \right]^2}{\sigma_x^2 \sum_{i=1}^N h_i^2} \\ \left(\sum_{i=1}^N a_i b_i \right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^N a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^N b_i^2 \right) \end{aligned} \right\}$$

- Aplicando la desigualdad Schwartz a la primera expresión

$$\frac{d^2}{\sigma_y^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^N h_i^2 \sum_{i=1}^N s_i^2}{\sigma_x^2 \sum_{i=1}^N h_i^2}$$

$$\frac{d^2}{\sigma_y^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^N s_i^2}{\sigma_x^2}$$

- Nuestro objetivo es escoger los h_i que maximizan el cociente $\frac{d^2}{\sigma_y^2}$

Detección de formas de
onda
Caso gaussiano

- Nuestro objetivo es escoger los h_i que maximizan el cociente $\frac{d^2}{\sigma_y^2}$
$$\frac{d^2}{\sigma_y^2} \leq \frac{\sum_{i=1}^N s_i^2}{\sigma_x^2} \quad \left[\sum_{i=1}^N h_i s_i \right]^2 \leq \sum_{i=1}^N h_i^2 \sum_{i=1}^N s_i^2$$

- El cociente tendrá máximo valor cuando se cumpla la igualdad
- La igualdad, según la relación de Schwartz, se cumple cuando $\alpha=0$
- Si el ángulo entre el vector $\vec{h}$ y el $\vec{s}$ es nulo, son vectores colineales, y por tanto

$$\vec{h} = K \vec{s}$$

$$h_i = K s_i = K s[n]$$

- La relación se cumple para cualquier constante K , de forma que escogemos $K=1$, y $h_i=s[i]$, quedando definida la nueva variable aleatoria unidimensional como

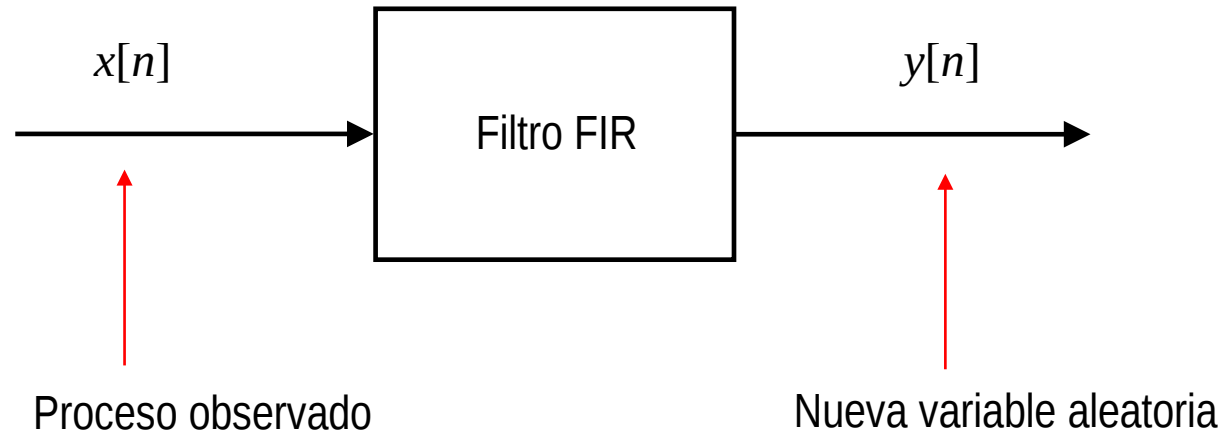
$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s[i] x_i$$

¿Qué sentido tiene?

Detección de formas de
onda
Caso gaussiano

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s[i] x_i$$

- La expresión de la nueva variable aleatoria es la misma que la de un filtro FIR por el que se pasa al proceso observado X
- Puede establecerse un modelo de la forma



- Donde la respuesta del filtro FIR es $h[n]$

$$h[n] = \frac{s_{inv}[n]}{N}$$

Detección de formas de
onda
Caso gaussiano

- La salida del filtro se compara entonces con un umbral calculado a partir de la teoría de decisión unidimensional

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s[i]x[i] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \mu$$

- El filtro FIR definido que se emplea para la detección de la forma de onda $s[n]$ se denomina **FILTRO ADAPTADO**
- Con las medias y varianzas calculadas antes para cada caso, podemos resolver el problema unidimensional gaussiana sobre Y

$$\frac{f(y|H_1)}{f(y|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

Llegando a

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s[i]x[i] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s^2[i]}{2} + \frac{\sigma_y^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s^2[i]} \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

donde

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N s^2[i] \sigma_n^2$$

Detección de formas de
onda
Caso gaussiano

- Sustituyendo el valor de la varianza se tiene

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s[i]x[i] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s^2[i]}{2} + \frac{\sigma_y^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s^2[i]} \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s[i]x[i] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N s^2[i] + \frac{\sigma_n^2}{N} \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

Detección de formas de onda

- La aproximación que acabamos de proponer se basa en resultados previos particularizados para el caso gaussiano
- Existe una aproximación mucho más general basada en decisión N -dimensional sobre variables aleatorias con propiedades diferentes

- La decisión N -dimensional de mínima probabilidad de error propone un test óptimo de la forma

$$\frac{f(\vec{x}|H_1)}{f(\vec{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

- En este test no se ha asumido nada sobre las variables aleatorias X_i que representan las observaciones
- Puede establecerse el test para el caso particular de detección de una forma de onda conocida, $s[n]$, y resolverlo como cualquier problema de decisión binaria N -dimensional donde los estados son “presencia de la señal” y “ausencia de la señal”

- Cada variable aleatoria X_i tiene propiedades definidas por el tipo de ruido:

Si la señal $s[n]$ no está presente (H_0):

$$\begin{aligned}x_i &= x[i] = n[i] \quad (\text{ruido}) \\E[x_i|H_0] &= E[n[i]] \\ \sigma^2 &= \sigma_{\text{ruido}}^2 = \sigma_n^2\end{aligned}$$

Si la señal $s[n]$ está presente (H_1):

$$\begin{aligned}x_i &= x[i] = s[i] + n[i] \quad (\text{señal} + \text{ruido}) \\E[x_i|H_1] &= E[s[i] + n[i]] = s[i] + E[n[i]] \\ \sigma^2 &= \sigma_{\text{ruido}}^2 = \sigma_n^2\end{aligned}$$

- Analizando así las variables aleatorias que representan las observaciones podemos acudir de nuevo al cociente de verosimilitud y compararlo con el umbral

- Así:

$$\frac{f(\vec{x}|H_1)}{f(\vec{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

$$f(\vec{x}|H_0) = \prod_{i=1}^N f(x_i|H_0)$$

$$f(\vec{x}|H_1) = \prod_{i=1}^N f(x_i|H_1)$$

- Es necesario caracterizar cada fdp $f(x_i|H_0)$ y $f(x_i|H_1)$
- Por ejemplo, en el caso gaussiano...

Detección de formas de onda

Caso gaussiano

- Con los valores que se han determinado, suponiendo ruido gaussiano de media nula y varianza σ_n^2

$$f(x_i|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x_i}{\sigma_n}\right]^2}$$

$$f(x_i|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x_i - s[i]}{\sigma_n}\right]^2}$$

- Entonces, planteando el cociente de verosimilitud

$$\frac{f(\vec{x}|H_1)}{f(\vec{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \quad \text{con}$$

$$f(\vec{x}|H_0) = \prod_{i=1}^N f(x_i|H_0)$$

$$f(\vec{x}|H_1) = \prod_{i=1}^N f(x_i|H_1)$$

Llegando a

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s[i]x[i] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s^2[i]}{2} + \frac{\sigma_y^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s^2[i]} \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

donde

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N s^2[i] \sigma_n^2$$

Detección de formas de
onda
Caso gaussiano

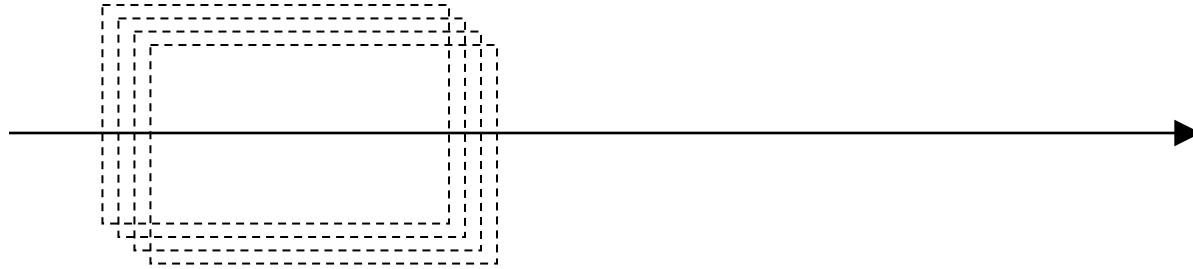
- Sustituyendo el valor de la varianza se tiene

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s[i]x[i] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s^2[i]}{2} + \frac{\sigma_y^2}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s^2[i]} \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

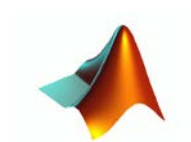
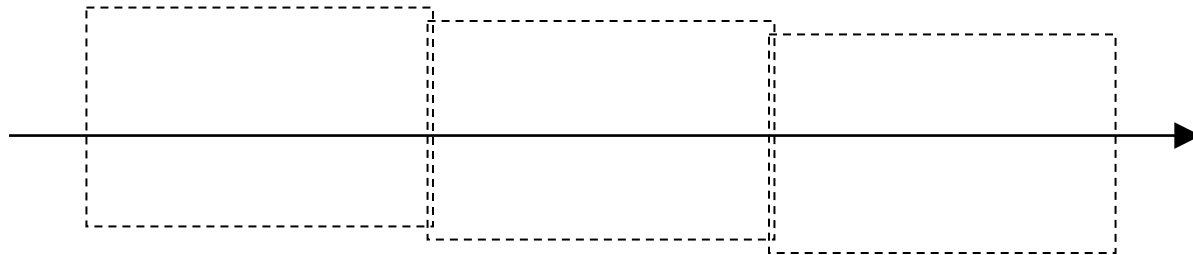
$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s[i]x[i] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N s^2[i] + \frac{\sigma_n^2}{N} \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)$$

- Idéntico resultado que en la primera aproximación
- Este procedimiento es mucho más general

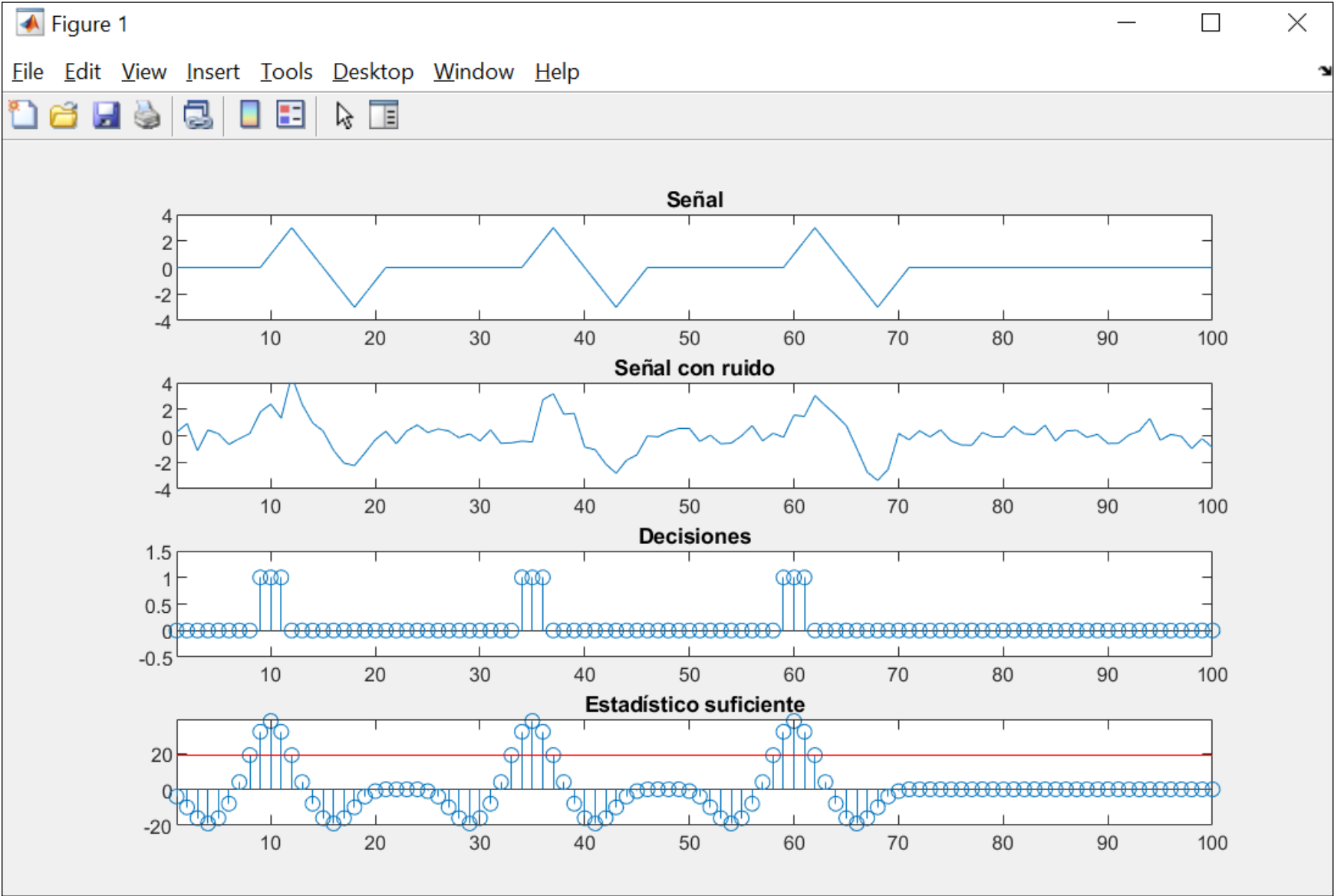
- Existen dos grandes formas de implementación práctica de un filtro adaptado:
 - Muestra a muestra
 - Ej.: RADAR



- Sincronizado con el “símbolo”
 - Ej.: Comunicaciones digitales



Detección de formas de onda



Teoría de la Decisión

Detección de formas de onda