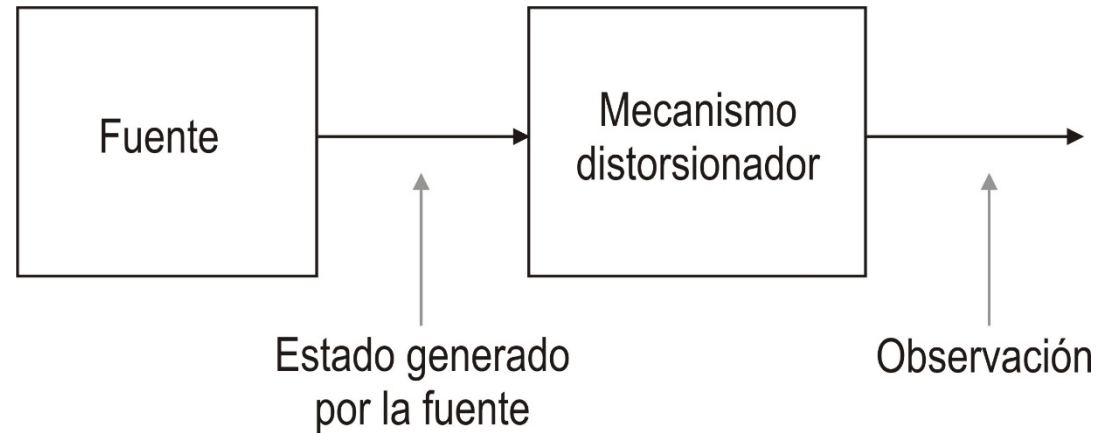


Teoría de la Decisión

Decisión RADAR: Criterio de Neyman-Pearson

- Problema genérico



- La fuente puede generar un conjunto finito de estados $H_0, \dots, H_N$ llamados *hipótesis*
- **Objetivo:** determinar la hipótesis más probable a partir de la observación realizada
 - Basado en:
 - Conocimiento de las hipótesis
 - Conocimiento de las características del mecanismo distorsionador (ej.: canal, ruido, etc.)

Problema RADAR

- Un problema de decisión de especial interés se produce cuando las probabilidades a priori son desconocidas
- Se recurre a trabajar con probabilidades condicionales:

$$P_F = P(H_1|H_0)$$

$$P_M = P(H_0|H_1)$$

$$P_D = P(H_1|H_1) = 1 - P_M$$

- Los subíndices son mnemónicos tomados del problema RADAR en el que H_1 corresponde a la presencia de un blanco y H_0 a su ausencia
 - P_F , probabilidad de falsa alarma
 - P_M , probabilidad de pérdida
 - P_D , probabilidad de detección
- Esta notación “heredada” realmente responde a una clase mucho más amplia de problemas que el propio problema RADAR

$$P_F = \int_{R_1} f(x|H_0)dx \qquad P_M = \int_{R_0} f(x|H_1)dx$$

$$P_D + P_M = 1$$

- Ejemplo: caso RADAR

H_0 = No hay blanco

H_1 = Hay blanco

En este caso es mucho más importante que no haya pérdidas (las consecuencias podrían ser catastróficas) que las falsas alarmas

- El caso ideal sería tener mínimas la probabilidad de falsa alarma y la probabilidad de pérdida

¿Dónde debo situar el umbral para mínima probabilidad de falsa alarma? ¿Y para mínima probabilidad de pérdida?

$$P_F = \int_{R_1} f(x|H_0)dx \qquad P_M = \int_{R_0} f(x|H_1)dx$$

$$P_D + P_M = 1$$

- Ejemplo: caso RADAR

H_0 = No hay blanco

H_1 = Hay blanco

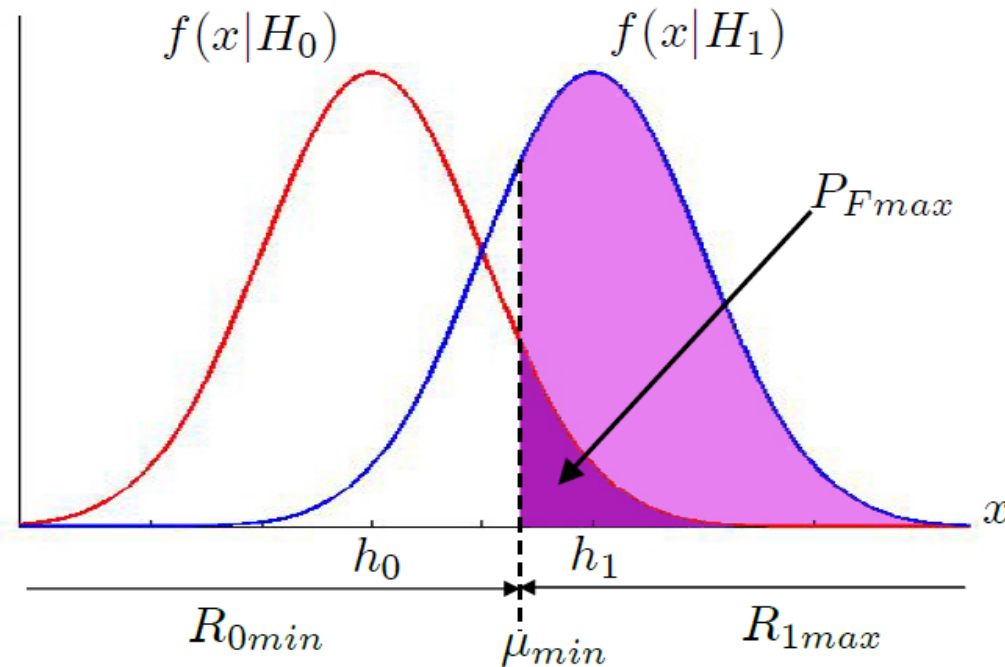
En este caso es mucho más importante que no haya pérdidas (las consecuencias podrían ser catastróficas) que las falsas alarmas

- El caso ideal sería tener mínimas la probabilidad de falsa alarma y la probabilidad de pérdida
- Son contradictorias: si aumento R_1 para minimizar la probabilidad de pérdida, aumento la probabilidad de falsa alarma, y viceversa

- En muchos casos reales es difícil asignar costes o probabilidades a priori, como en caso RADAR recién propuesto
- En general, debería hacerse P_F lo más pequeña posible y P_D lo más grande posible, pero son contradictorias
- Un criterio inmediato es restringir una de las probabilidades y maximizar (o minimizar) la otra
- Una formalización práctica de este criterio se conoce como **Criterio de Neyman-Pearson**

Criterio de Neyman-Pearson

- El Criterio de Neyman-Pearson propone:
 - Acotar la probabilidad de falsa alarma ($P_F \leq \text{cte}$)
 - Minimizar la probabilidad de pérdida P_M
 - Maximizar la probabilidad de detección P_D



- Una vez acotada la P_F , y por tanto fijado el umbral mínimo, el objetivo es encontrar el umbral óptimo en cuanto a P_M y P_D

- Al fijar el umbral óptimo tendremos de nuevo un criterio de la forma

$$\frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} \underset{H_0}{\underset{H_1}{\geq}} \beta_{opt}$$

- Para encontrar el valor de β_{opt} se recurre a las condiciones impuestas
- Se define una función de coste adecuada. Por ejemplo

$$F = P_M + \lambda(P_F - \alpha')$$

donde $P_F = \alpha' \leq \alpha$ se fija a un cierto valor por debajo de la cota, y λ es un valor auxiliar positivo.

- Si $P_F = \alpha' \leq \alpha$ entonces resulta obvio que minimizar F minimiza P_M

$$F = \int_{R_0} f(x|H_1)dx + \lambda \left(\int_{R_1} f(x|H_0)dx - \alpha' \right)$$

$$F = \int_{R_0} f(x|H_1)dx + \lambda \left(\int_{R_1} f(x|H_0)dx - \alpha' \right)$$

- Sumando y restando

$$\lambda \int_{R_0} f(x|H_0)dx$$

(la igualdad no varía), y minimizando la expresión, se llega a

$$\frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda$$

Y λ se selecciona de forma que se cumpla

$$P_F = \int_{\mu_{opt}}^{\infty} f(x|H_0)dx = \alpha'$$

(λ y μ_{opt} están relacionados)

Criterio de Neyman-
Pearson
Caso gaussiano

- Supongamos ruido gaussiano de media nula y varianza σ^2 , y

H_0 = recibir 0

H_1 = recibir A

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-A}{\sigma}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda$$

- Desarrollando se llega a

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \underbrace{\frac{A}{2} + \frac{\sigma^2}{A} \ln \lambda}_{\text{Umbral } \mu_{opt}}$$

- Sigue sin estar definido λ , pero queda por aplicar

$$P_F = \int_{\mu_{opt}}^{\infty} f(x|H_0) dx$$

Criterio de Neyman-
Pearson
Caso gaussiano

$$P_F = \int_{\mu_{opt}}^{\infty} f(x|H_0)dx$$

$$P_F = \int_{\mu_{opt}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx = \int_{\mu_{opt}/\sigma}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Cambio de variable $z = \frac{x}{\sigma}$

- Se obtiene

$$P_F = Q(\mu_{opt}/\sigma)$$

- Por tanto, la forma de decidir es:
 - Se define el valor de la probabilidad de falsa alarma P_F
 - Con ese valor, se acude a la función Q para obtener μ_{opt}/σ
 - Como σ es conocido, se obtiene el valor del umbral y se decide

$$\begin{array}{c} H_1 \\ x \geq \mu_{opt} \\ H_0 \end{array}$$

Ejemplo

Un mensaje se transmite seleccionando uno de dos generadores de ruido. Para enviar un 0 se transmite ruido con distribución uniforme entre -1 y 1, y para enviar un 1 ruido con distribución triangular también entre -1 y 1.

a) Calcule la regla de decisión que maximiza la probabilidad de detectar un 1 (ruido con distribución triangular) manteniendo la probabilidad de detectar erróneamente 1 cuando se trataba de un 0 igual a 0.1.

b) ¿Cuál es la probabilidad de detectar correctamente el 1?

Ejemplo

Un mensaje se transmite seleccionando uno de dos generadores de ruido. Para enviar un 0 se transmite ruido con distribución uniforme entre -1 y 1, y para enviar un 1 ruido con distribución triangular también entre -1 y 1.

a) Calcule la regla de decisión que maximiza la probabilidad de detectar un 1 (ruido con distribución triangular) manteniendo la probabilidad de detectar erróneamente 1 cuando se trataba de un 0 igual a 0.1.

b) ¿Cuál es la probabilidad de detectar correctamente el 1?

Teoría de la Decisión

Decisión RADAR: Criterio de Neyman-Pearson