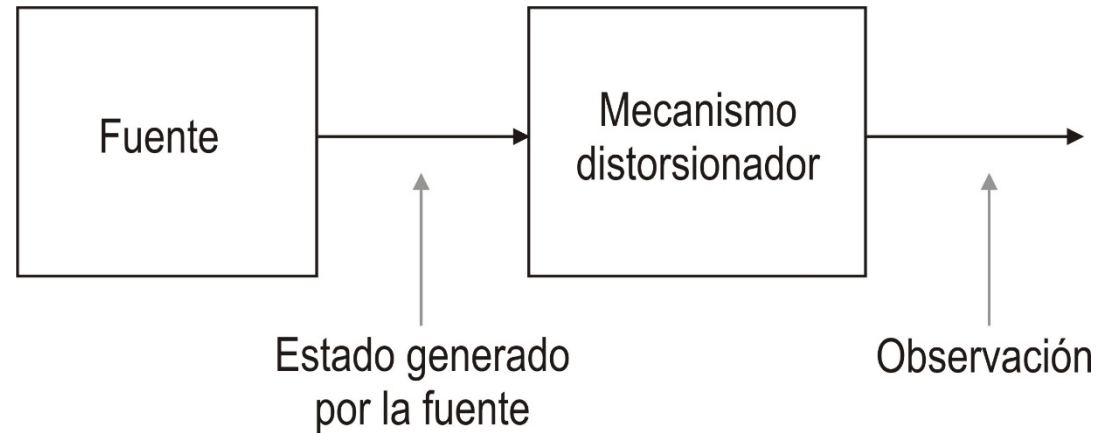


Teoría de la Decisión

Decisión Bayesiana

- Problema genérico



- La fuente puede generar un conjunto finito de estados $H_0, \dots, H_N$ llamados *hipótesis*
- **Objetivo:** determinar la hipótesis más probable a partir de la observación realizada
 - Basado en:
 - Conocimiento de las hipótesis
 - Conocimiento de las características del mecanismo distorsionador (ej.: canal, ruido, etc.)

Decisión Bayesiana

- Se basa en la cuantificación de los compromisos entre varias decisiones de clasificación utilizando la probabilidad y los costes asociados a tales decisiones
- Es una formalización del “sentido común”
- Se asume que el problema se especifica en términos probabilísticos y que todas las probabilidades relevantes son conocidas
 - Las salidas de la fuente están gobernadas por probabilidades “a priori” que representan la información que el observador tiene sobre la fuente antes del experimento
- Supongamos dos posibles estados o hipótesis H_0 y H_1
- Posibles situaciones:

Sucede	Decido	Situación
H_0	H_0	Acierto
H_1	H_0	Error
H_0	H_1	Error
H_1	H_1	Acierto

- Se asume que se puede definir el **coste** de cada decisión:

C_{00} Coste de decidir H_0 cuando ha sucedido H_0 (acierto)

C_{10} Coste de decidir H_1 cuando ha sucedido H_0 (error)

C_{01} Coste de decidir H_0 cuando ha sucedido H_1 (error)

C_{11} Coste de decidir H_1 cuando ha sucedido H_1 (acierto)

- Asumimos que los costes de un error son siempre mayores que los de un acierto
- Los valores de los costes vienen determinados por el problema a resolver
- El objetivo de la decisión Bayesiana no es minimizar el error sino el coste *promedio* de las decisiones tomadas
- El coste total viene dado por

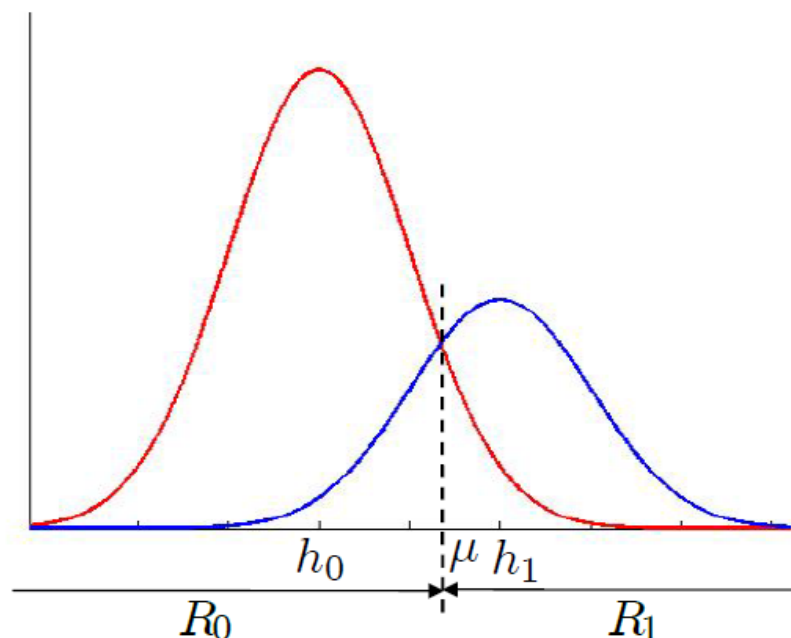
$$J = C_{00}P(H_0)P(H_0|H_0) + C_{10}P(H_0)P(H_1|H_0) \\ + C_{01}P(H_1)P(H_0|H_1) + C_{11}P(H_1)P(H_1|H_1)$$

$$J = C_{00}P(H_0)P(H_0|H_0) + C_{10}P(H_0)P(H_1|H_0) \\ + C_{01}P(H_1)P(H_0|H_1) + C_{11}P(H_1)P(H_1|H_1)$$

$$P(H_0|H_0) = \int_{R_0} f(x|H_0)dx \quad P(H_0|H_1) = \int_{R_0} f(x|H_1)dx$$

$$P(H_1|H_0) = \int_{R_1} f(x|H_0)dx \quad P(H_1|H_1) = \int_{R_1} f(x|H_1)dx$$

- R_1 y R_0 son las regiones en que se deciden las hipótesis H_1 y H_0 respectivamente



$$J = C_{00}P(H_0)P(H_0|H_0) + C_{10}P(H_0)P(H_1|H_0) \\ + C_{01}P(H_1)P(H_0|H_1) + C_{11}P(H_1)P(H_1|H_1)$$

- A la expresión del coste total se le suman y restan dos términos:

$$J = J + P(H_0)C_{00} \int_{R_1} f(x|H_0)dx - P(H_0)C_{00} \int_{R_1} f(x|H_0)dx \\ + P(H_1)C_{01} \int_{R_1} f(x|H_1)dx - P(H_1)C_{01} \int_{R_1} f(x|H_1)dx$$

- Minimizando la expresión resultante se obtiene el criterio de decisión

$$\frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)[C_{10} - C_{00}]}{P(H_1)[C_{01} - C_{11}]}$$

- Si se considera el caso N -dimensional:

$$\vec{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]; \quad \vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$$

$$\frac{f(\vec{x}|H_1)}{f(\vec{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)[C_{10} - C_{00}]}{P(H_1)[C_{01} - C_{11}]}$$

$$\frac{f(x|H_1)}{f(x|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)[C_{10} - C_{00}]}{P(H_1)[C_{01} - C_{11}]}$$

- Por ejemplo, si se consideran

$$\begin{aligned} C_{00} = C_{11} &= 0 \\ C_{10} = C_{01} &= 1 \end{aligned}$$

Entonces tenemos el criterio de estimación MAP para mínima probabilidad de error:

- Acertar no presenta ningún coste
- Equivocarme presenta igual coste independientemente de la hipótesis

⇒ Mínimo coste = mínima probabilidad de error

$$\begin{aligned} J = C_{00}P(H_0)P(H_0|H_0) + C_{10}P(H_0)P(H_1|H_0) \\ + C_{01}P(H_1)P(H_0|H_1) + C_{11}P(H_1)P(H_1|H_1) \end{aligned}$$

- Si además $P(H_0)=P(H_1)$ o desconozco la información *a priori*, resulta el criterio de estimación ML, pero **ya no es decisión bayesiana** propiamente dicha

Teoría de la Decisión

Decisión Bayesiana