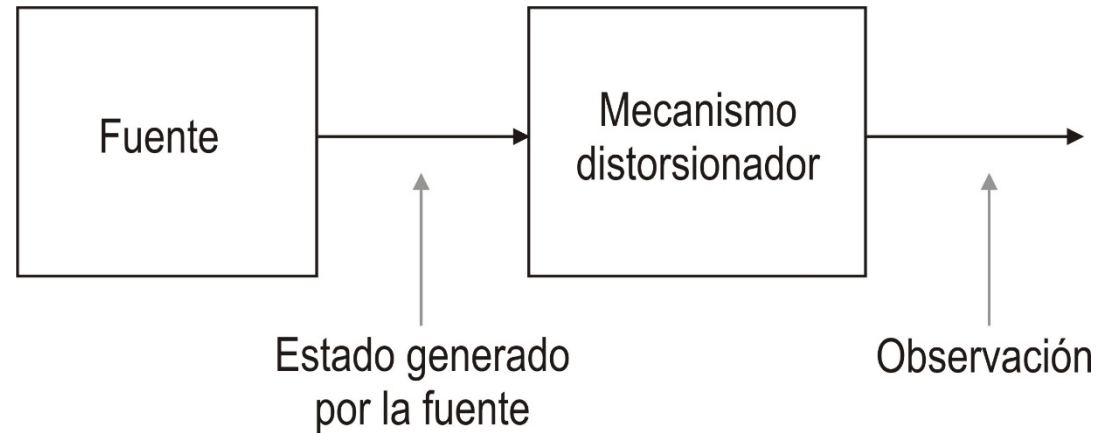


Teoría de la Decisión

Decisión N -dimensional

- Problema genérico



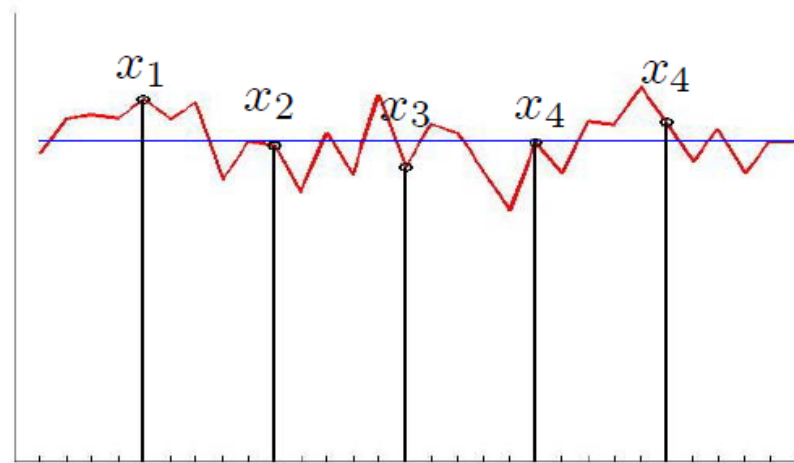
- La fuente puede generar un conjunto finito de estados $H_0, \dots, H_N$ llamados *hipótesis*
- **Objetivo:** determinar la hipótesis más probable a partir de la observación realizada
 - Basado en:
 - Conocimiento de las hipótesis
 - Conocimiento de las características del mecanismo distorsionador (ej.: canal, ruido, etc.)

Criterio de mínima
probabilidad de error
Caso
 N -dimensional

- Se trata de minimizar la P_e con
 - N observaciones
 - Un vector de dimensión N

$$\vec{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]; \quad \vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]$$

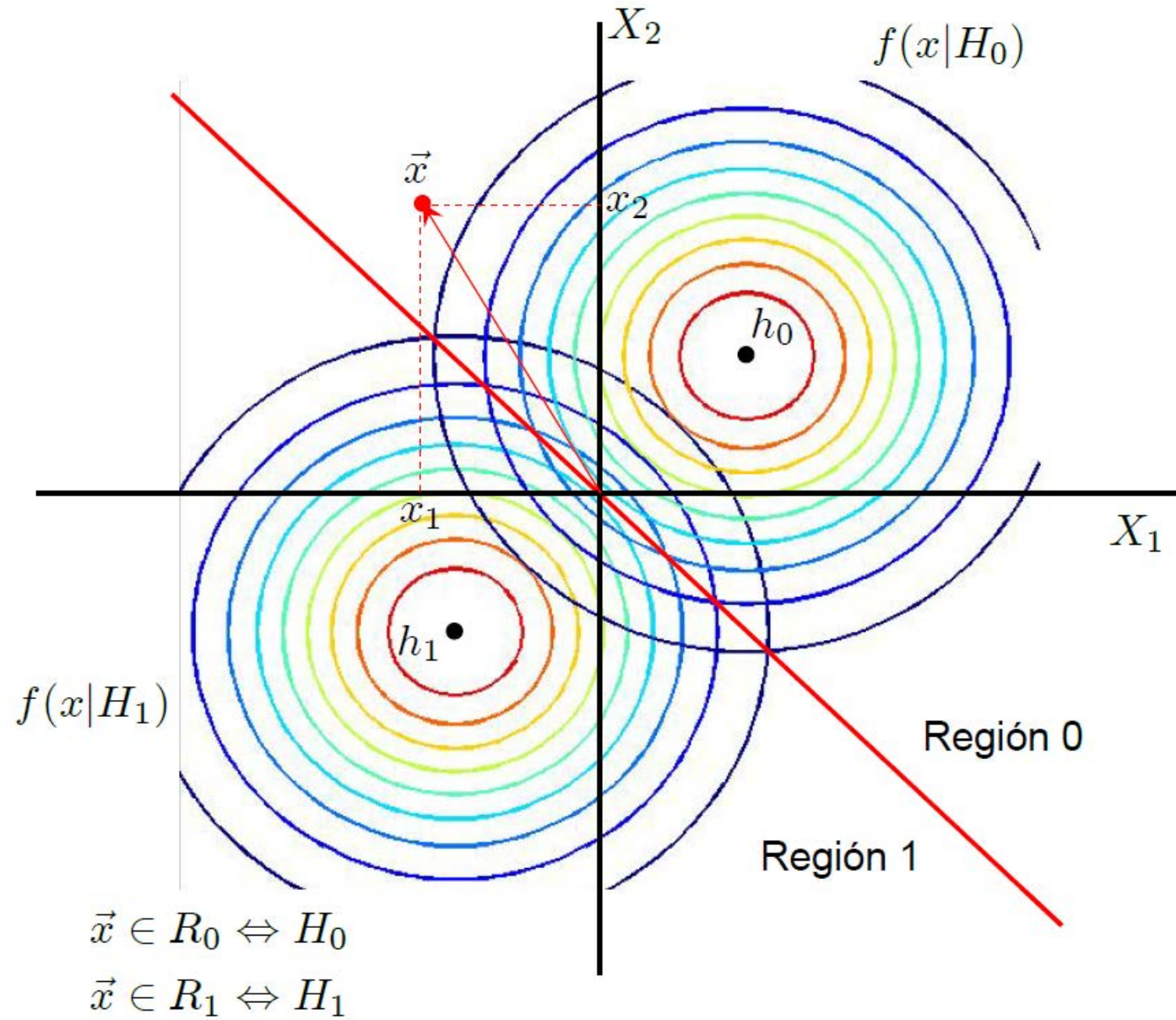
- En lugar de tomar una *muestra* de un fenómeno se toman N



- Ejemplo: En comunicaciones digitales, tomar varias muestras de un mismo símbolo
 - Cada muestra estará afectada por un valor distinto e independiente de ruido

Criterio de mínima
probabilidad de error
Caso
 N -dimensional

- Ejemplo: $P(H_0)=P(H_1)$, $N=2$



Criterio de mínima
probabilidad de error
Caso
 N -dimensional

- Cociente de verosimilitud MAP para el caso N -dimensional

$$\frac{f(\vec{x}|H_1)}{f(\vec{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

- Cociente de verosimilitud ML para el caso N -dimensional

$$\frac{f(\vec{x}|H_1)}{f(\vec{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} 1$$

$$f(\vec{x}|H_0) = \prod_{i=1}^N f(x_i|H_0)$$

$$f(\vec{x}|H_1) = \prod_{i=1}^N f(x_i|H_1)$$

Criterio de mínima
probabilidad de error

Caso

N -dimensional

Particularización para el
caso gaussiano

- Cociente de verosimilitud MAP para el caso N -dimensional

$$\frac{f(\vec{x}|H_1)}{f(\vec{x}|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

$$f(\vec{x}|H_0) = \prod_{i=1}^N f(x_i|H_0)$$
$$f(\vec{x}|H_1) = \prod_{i=1}^N f(x_i|H_1)$$

$$\frac{\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-h_1}{\sigma}\right)^2}}{\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-h_0}{\sigma}\right)^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

- Desarrollando, se obtiene

$$\underbrace{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)}_{\text{ESTADÍSTICO SUFICIENTE}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \underbrace{\left(\frac{h_1 + h_0}{2} \right)}_{\text{Umbral } \mu} + \underbrace{\frac{\sigma^2}{dN} \ln \left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right)}_{d = h_1 - h_0}$$

- ¿Qué representa esa N en el segundo término?

Criterio de mínima
probabilidad de error

Caso

N -dimensional

Efecto del promediado

- En la decisión N -dimensional se han considerado N muestras modeladas como variables aleatorias

$$\vec{X} = [X_1, X_2, \dots, X_N]$$

- Con todas ellas se define un estadístico suficiente que constituye una nueva variable aleatoria. Por ejemplo:

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

- Tenemos definido un nuevo problema unidimensional a partir del N -dimensional

$$\frac{f(y|H_1)}{f(y|H_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(H_0)}{P(H_1)}$$

Donde y es una realización (observación) de la variable aleatoria Y

- Si conocemos la distribución de cada X_i , ¿cuál es la de Y ?

Criterio de mínima
probabilidad de error

Caso

N -dimensional

Efecto del promediado

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

- La media de la nueva variable aleatoria será la misma combinación lineal de las medias de las gaussianas

$$m_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N m_x = m_x$$

- La varianza de la nueva variable aleatoria responderá a

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sigma_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$$

- Por tanto

$$f(y|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{y-h_0}{\sigma_y} \right]^2}$$

$$f(y|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{y-h_1}{\sigma_y} \right]^2}$$

- Las nuevas fdp son gaussianas centradas en las mismas medias que en el caso unidimensional, pero con varianza N veces menor

$\Rightarrow$ Menor potencia de ruido, mejor decisión

Criterio de mínima
probabilidad de error

Caso

N -dimensional

Efecto del promediado

- La utilización de más muestras proporciona mejor robustez en la decisión (menor efecto del ruido/distorsión)
- Este efecto también se refleja en la probabilidad de error

$$P_e = Q\left(\frac{d}{2\sigma_y}\right) = Q\left(\frac{d\sqrt{N}}{2\sigma_x}\right)$$

- Como la función Q es decreciente, el promediado (o lo que es lo mismo, la N -dimensionalidad) también reduce la P_e

- **Conclusión**

- El promediado de diferentes observaciones mejora mi probabilidad de error
- El trabajo con más dimensiones siempre mejora mis resultados:

Más observaciones $\Rightarrow$ Más información $\Rightarrow$ Menos incertidumbre

Teoría de la Decisión

Decisión N -dimensional