

Señales aleatorias en variable discreta

Procesos estocásticos en variable discreta

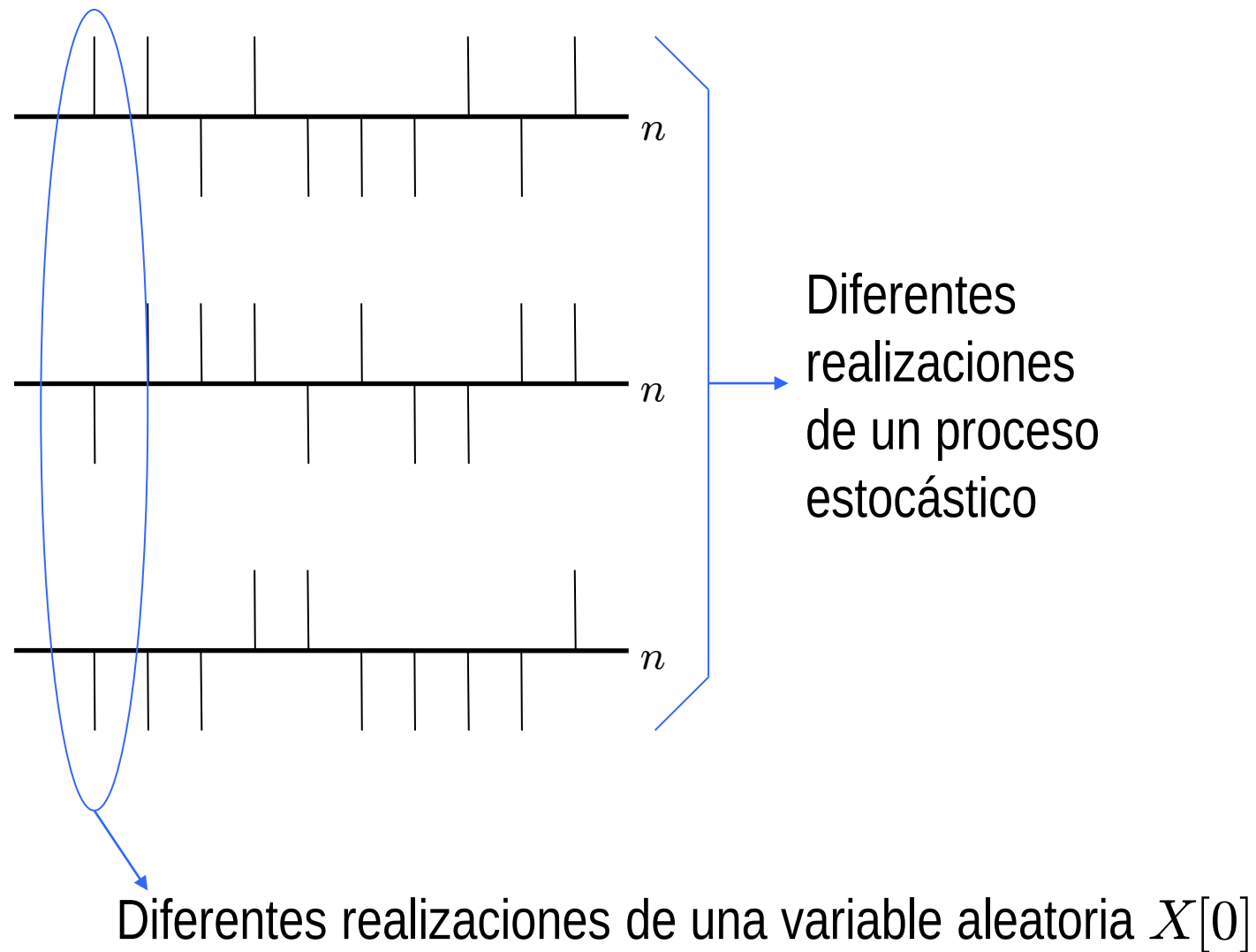
Procesos estocásticos

- Las señales que se manejan en problemas de comunicaciones, o de tratamiento digital de señales en general, suelen ser de naturaleza aleatoria.
- El valor de las señales en un determinado índice n (instante, si se trata de tiempo) es una variable aleatoria de valor $x[n]$. Esto responde perfectamente a la definición de *proceso estocástico*.
- Las señales aleatorias se modelan como procesos estocásticos, lo que permite utilizar herramientas estadísticas para su tratamiento.
- Pero... ¿qué es un proceso estocástico?
- Conjunto de variables aleatorias indexadas

$X[n]$ Una variable aleatoria para cada n

Procesos estocásticos

- Ejemplo: Salida de un Modem (+1 y -1)



Procesos estocásticos

- Un proceso estocástico es un vector de variables aleatorias:

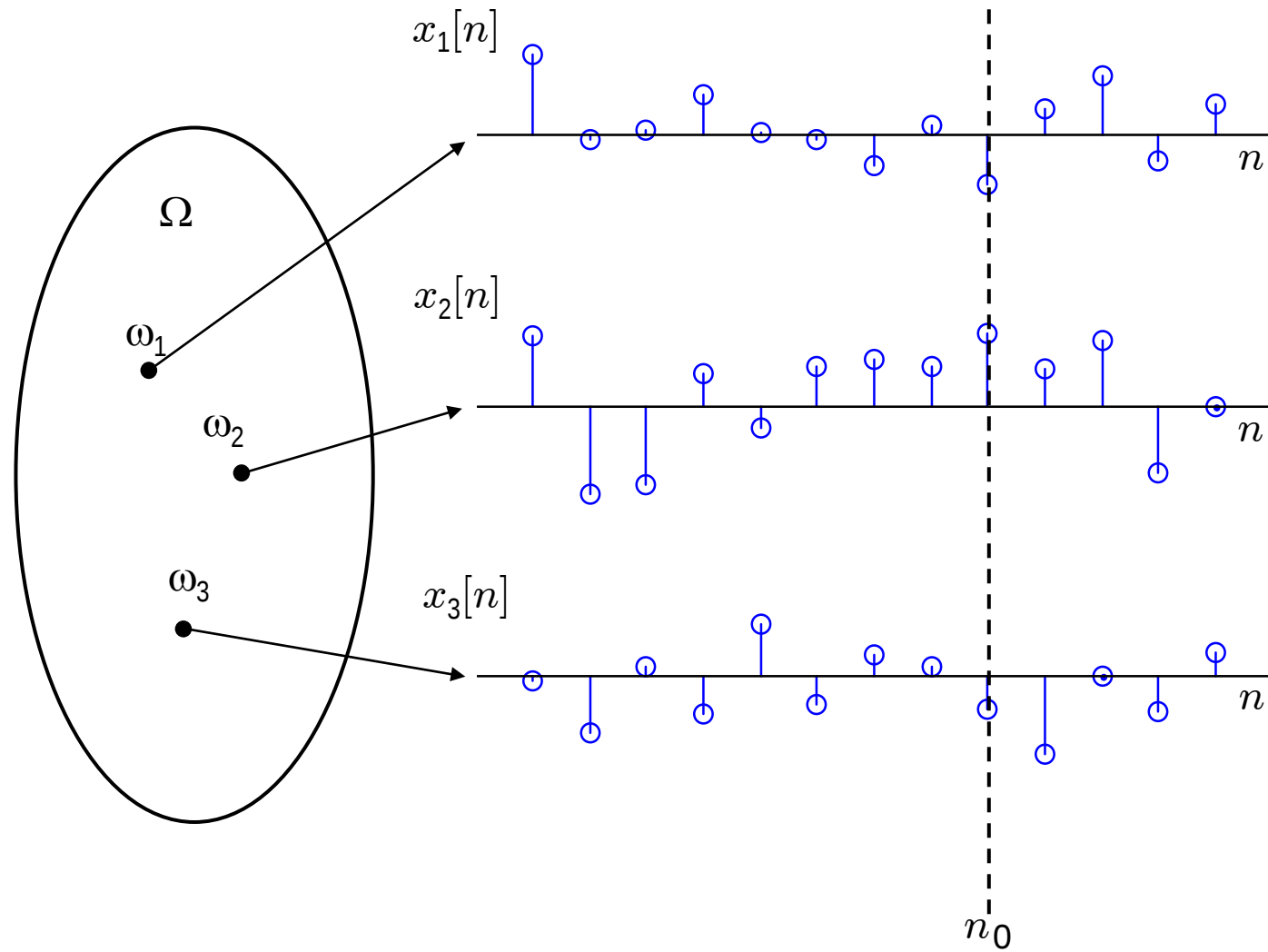
$$X[n] = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4 \ \dots] = [X[1] \ X[2] \ X[3] \ X[4] \ \dots]$$

- Del mismo modo que una variable aleatoria puede interpretarse como un mapeo de un experimento del espacio muestral en el conjunto de los números reales (o complejos)...

... un proceso estocástico en variable discreta es un mapeo de un experimento del espacio muestral en el conjunto de señales de variable discreta $X[n]$ (generalmente expresada cada una de ellas como $x[n]$)

- Entonces, un proceso estocástico en variable discreta es un fenómeno aleatorio cuyo posible resultado es un conjunto de señales de variable discreta
 - Finito si el conjunto de eventos del espacio muestral es finito (discreto)
 - Infinito si el conjunto de eventos del espacio muestral es infinito (continuo)

Procesos estocásticos



Procesos estocásticos

- Un proceso estocástico es un vector de variables aleatorias:

$$X[n] = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4 \ \dots] = [X[1] \ X[2] \ X[3] \ X[4] \ \dots]$$

- Esas variables aleatorias no tienen por qué ser iguales
- Cada una de las variables aleatorias tiene una función de distribución de probabilidad:

$$F_{X[n]}(x) = P(X[n] \leq x)$$

Y una función densidad de probabilidad:

$$f_{X[n]}(x) = \frac{d}{dx} F_{X[n]}(x)$$

- Cada una de esas variables aleatorias tiene una esperanza matemática:

$$E[X[n]] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X[n]}(x) dx$$

Y una varianza:

$$\text{var}(X[n]) = \sigma_{X[n]}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X[n]])^2 f_{X[n]}(x) dx$$

Procesos estocásticos

- Un proceso estocástico es un vector de variables aleatorias:

$$X[n] = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4 \ \dots] = [X[1] \ X[2] \ X[3] \ X[4] \ \dots]$$

- Cada una de esas variables aleatorias tiene una esperanza matemática. Podemos definir una secuencia de esperanzas matemáticas (esperanza del proceso):

$$\mu[n] = E[X[n]] = [\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3 \ \mu_4 \ \dots]$$

- Del mismo modo podemos definir una secuencia de varianzas (varianza del proceso):

$$\sigma_X^2[n] = E[(X[n] - \mu[n])^2]$$

- Otros dos estadísticos importantes para el estudio de procesos estocásticos son la *autocorrelación* y la *autocovarianza*

Autocorrelación

$$R_{XX}[l, m] = E[X[l]X[m]]$$

Autocovarianza

$$C_{XX}[l, m] = E[(X[l] - \mu[l])(X[m] - \mu[m])]$$

Procesos estocásticos

Autocorrelación

$$R_{XX}[l, m] = E[X[l]X[m]]$$

Autocovarianza

$$C_{XX}[l, m] = E[(X[l] - \mu[l])(X[m] - \mu[m])]$$

- Si $l=m$, la autocovarianza es igual a la varianza del proceso
- Se puede extraer que la autocovarianza y la autocorrelación están relacionadas por

$$C_{XX}[l, m] = R_{XX}[l, m] - \mu[l]\mu[m]$$

- Para procesos de media nula, ambas coinciden
- La autocorrelación y la autocovarianza proporcionan información sobre la relación estadística entre dos variables aleatorias que derivan del mismo proceso

Procesos estocásticos

- En aplicaciones donde intervienen dos procesos $X[n]$ e $Y[n]$:

Correlación cruzada

$$R_{XY}[l, m] = E[X[l]Y[m]]$$

Covarianza cruzada

$$C_{XY}[l, m] = E[(X[l] - \mu_X[l])(Y[m] - \mu_Y[m])]$$

- Se puede extraer que la covarianza cruzada y la correlación cruzada están relacionadas por

$$C_{XY}[l, m] = R_{XY}[l, m] - \mu_X[l]\mu_Y[m]$$

- Dos procesos estocásticos están *incorrelados* si

$$C_{XY}[l, m] = 0, \quad \forall l, m$$

- Dos procesos estocásticos son *ortogonales* si

$$R_{XY}[l, m] = 0, \quad \forall l, m$$

- Dos procesos estocásticos incorrelados de media nula son ortogonales

Procesos estocásticos Estacionariedad

- Un proceso estocástico es un vector de variables aleatorias:

$$X[n] = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4 \ \dots] = [X[1] \ X[2] \ X[3] \ X[4] \ \dots]$$

- Tenemos definida una secuencia de esperanzas matemáticas:

$$\mu[n] = E[X[n]] = [\mu_1 \ \mu_2 \ \mu_3 \ \mu_4 \ \dots]$$

- Del mismo modo tenemos definida la correlación:

$$R_{XX}[l,m] = E[X[l]X[m]]$$

- La estacionariedad de un proceso se estudia a través de su fdp. Sin embargo, en procesamiento de señal no suele ser necesario

- Un proceso estocástico es **estacionario en sentido amplio** si:

- La media no depende de n :

$$\mu[n] = \mu \ \forall n$$

- La autocorrelación sólo depende de la diferencia de índices:

$$R_{XX}[n,n+m] = R_{XX}[|m|]$$

- La varianza del proceso es finita

Procesos estocásticos Estacionariedad

- La estacionariedad en sentido amplio es una restricción más débil que la estacionariedad en sentido estricto. Sin embargo es suficiente para las aplicaciones que vamos a tratar
- En el caso de dos procesos se define la **estacionariedad conjunta**. Dos procesos $X[n]$ e $Y[n]$ son conjuntamente estacionarios en sentido amplio si
 - Ambos procesos son estacionarios en sentido amplio
 - Su correlación cruzada sólo depende de la diferencia entre índices

$$R_{XY}[n, n+m] = R_{XY}[n+l, n+l+m] = R_{XY}[m]$$

- La autocorrelación de un proceso real estacionario en sentido amplio es simétrica respecto del origen de “diferencia de índices”
- La autocorrelación de un proceso real estacionario en sentido amplio tiene como valor máximo $R_{XX}[0] = E[|X[n]|^2] = \mu^2 + \sigma^2$

donde μ es la esperanza matemática (media) del proceso y σ^2 su varianza

Procesos estocásticos Ergodicidad

- Consideremos un proceso estocástico estacionario. Si $x[n]$ es una realización cualquiera (una señal), definimos:

Media muestral (o temporal):

$$\langle x[n] \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]$$

Correlación muestral (o temporal):

$$\phi_{xx}[m] = \langle x[n]x[n+m] \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x[n]x[n+m]$$

- Un proceso estocástico estacionario es **ergódico** si la media muestral coincide con la media estadística, y la correlación muestral también lo hace con la correlación estadística.

